Phys. g.
178^{s} 4°
3

Weber

Bayerische Staatsbibliothek
<36657316940015

Phys. g. 178c. 4

WILHELM WEBER'S WERKE

HERAUSGEGEBEN

VON DER

KÖNIGLICHEN GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

ZU

GÖTTINGEN

DRITTER BAND

GALVANISMUS UND ELEKTRODYNAMIK

ERSTER THEIL

BESORGT DURCH HEINRICH WEBER

MIT I TAFEL UND IN DEN TEXT GEDRUCKTEN ABBILDUNGEN

BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER
1893

703 D

Wilhelm Weber hat dem ihm wiederholt ausgesprochenen Verlangen nach einer Gesammtausgabe seiner Werke bei aller Bescheidenheit seiner Meinung über den Werth der eigenen Schriften schon im Jahre 1890 nachgegeben. Er hat dann seinerseits den lebhaften Wunsch ausgesprochen, dass die Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, welche die Herausgabe der Werke seines grossen Freundes Gauss besorgt hat, auch seine Werke herausgebe. Die Erfüllung dieses Wunsches, welchem sich seine Verwandten gern anschlossen, hat sich die Königl. Gesellschaft durch die unterzeichnete Kommission beeifert in Angriff zu nehmen und ist zu dem Zwecke mit Herrn Professor Heinrich Weber in Braunschweig und Herrn Professor Wilhelm Braune in Leipzig als den Vertretern der Familie Wilhelm Weber's in Verbindung getreten.

Zunächst hat dieselbe an Herrn Julius Springer in Berlin einen Verleger gefunden, welcher diesem wissenschaftlichen Unternehmen das volle Verständniss entgegenbringt, für eine würdige Ausstattung sorgen und einen, dem Wunsche nach ausgedehnter Verbreitung dieser so sehr lehrreichen Werke förderlichen, möglichst geringen Preis stellen wird

Von den Erben von Ernst Heinrich Weber und von Eduard Weber sind die Autorrechte der von diesen zusammen mit ihrem Bruder Wilhelm Weber verfassten Werke an die *Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen* übertragen worden. Die Verlagshandlungen der grösseren dieser Schriften, Herr Fr. Riehm in Basel für die 1825 erschienene *Wellenlehre,* und die Dieterich'sche Buchhandlung in Göttingen für die 1836 erschienene *Mechanik der menschlichen Gehwerkzeuge,* haben ihre Genehmigung zum Abdruck der Schriften in den gesammelten Werken ertheilt.

Die Königlich Sächsische Gesellschaft der Wissenschaften in Leipzig hat bereitwillig den Abdruck der in ihren Abhandlungen erschienenen

Fortsetzung auf der dritten Umschlagseite.

WILHELM WEBER'S WERKE

HERAUSGEGEBEN

VON DER

KÖNIGLICHEN GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

ZU

GÖTTINGEN

DRITTER BAND

GALVANISMUS UND ELEKTRODYNAMIK

ERSTER THEIL

BESORGT DURCH HEINRICH WEBER

MIT I TAFEL UND IN DEN TEXT GEDRUCKTEN ABBILDUNGEN

Bayerische
Staatsbibliothek
München

BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER
1893

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS

Vorwort zum dritten Bande.

Der dritte Band enthält die von Wilhelm Weber bis zu Ende des Jahres 1857 veröffentlichten Abhandlungen aus dem Gebiete des Galvanismus und der Elektrodynamik in der nämlichen Reihenfolge, in welcher dieselben veröffentlicht wurden. In Folge dieser Anordnung erscheinen die sieben Abhandlungen, welchen Weber den gemeinsamen Titel „Elektrodynamische Maassbestimmungen“ gegeben hat, hier von einander getrennt, und zwar finden sich die ersten vier von ihnen in diesem Bande unter No. V, X, XI und XV abgedruckt, die späteren drei dagegen erhalten in dem vierten Bande Aufnahme.

Es wäre wünschenswerth gewesen, diese sieben Abhandlungen von fundamentaler Bedeutung, welche sich harmonisch aneinander anschliessen und die als abgerundetes Ganze erscheinen, in einem Bande zu vereinigen. Die Vertheilung der Abhandlungen auf zwei Bände würde jedoch hierdurch eine so ungleiche geworden sein, dass es geboten erschien, von einer solchen Zusammenfassung aller sieben Abhandlungen abzusehen. Dafür wurde durch die streng chronologische Anordnung erreicht, dass nur mit geringer Ausnahme Abhandlungen verwandten Inhaltes sich aneinander anreihen, wodurch der Leser zugleich einen Einblick in den Entwicklungsgang gewinnt, welchen die Arbeiten W. Weber's in dem Gebiet des Galvanismus und der Elektrodynamik genommen haben.

Die Abhandlungen I bis IV beschäftigen sich speciell mit dem galvanischen Strome, insbesondere wird in der Abhandlung II, S. 9, das absolute Maass für Stromintensitäten zuerst genau präcisirt, von welchem Weber wohl zum ersten Male in der Abhandlung über magnetische Friktion (Bd. II, S. 202 und 203) Gebrauch gemacht hat. Die Abhandlungen II und IV enthalten die Theorie der Tangenten-Boussole, und in der Abhandlung III wird zum ersten Male auf Grund des eingeführten absoluten Intensitätsmaasses das elektrochemische Aequivalent des Wassers einer genauen Messung unterworfen.

Die gleichzeitige Beschäftigung mit galvanischen Strömen und mit magnetischen Erscheinungen führten WEBER bald zu einem genauen Studium der AMPÈRE'schen Untersuchungen, dessen Resultat in der ersten unter dem Titel Elektrodynamische Maassbestimmungen herausgegebenen Abhandlung niedergelegt ist, welche hier unter No. V sich abgedruckt findet. Mit Hülfe einer Anzahl von ihm neuersonnener Instrumente weist WEBER auf das Schärfste die Richtigkeit des AMPÈRE'schen Gesetzes nach, und stellt sodann sein Grundgesetz der elektrischen Wirkung auf, durch welches die elektrostatischen, elektrodynamischen und die Induktions-Erscheinungen auf eine gemeinsame Grundlage zurückgeführt werden.

In den hier mit VII und XI bezeichneten Abhandlungen wendet sich WEBER der Erforschung des Diamagnetismus zu, welcher kurz nach seiner Entdeckung durch FARADAY 1846 für die Lehre vom Magnetismus von hervorragender Bedeutung geworden ist, insofern durch die Erklärung der diamagnetischen Erscheinungen zugleich eine Entscheidung zwischen den bis dahin gleichberechtigten Hypothesen über das Wesen des Magnetismus herbeigeführt wurde. Es gelang WEBER nicht blos, diamagnetische und magnetische Kräfte ihrer Grösse nach zu vergleichen, sondern auch diamagnetische Induktionsströme zu erzeugen und das Verhältniss ihrer Intensität zu derjenigen magnetischer Induktionsströme festzustellen. Aus diesen Untersuchungen ergab sich dann eine präcise Vorstellung über das Wesen des Magnetismus und des Diamagnetismus.

Durch die Konstruktion des Erdinduktors, welcher zunächst nur zu Inklinationsmessungen diente, wurde WEBER zur Feststellung eines absoluten Maasses für elektromotorische Kräfte geführt. Damit war aber zugleich unter Zuhülfenahme des bereits früher festgesetzten absoluten Intensitätsmaasses nach dem OHM'schen Gesetze das absolute Maass für galvanische Widerstände gegeben. In der Abhandlung X werden die Maasseinheiten ausführlich besprochen, und die Methoden der Widerstandsmessung nach absolutem Maasse eingehend erörtert. Dieses auf magnetische Wirkungen sich gründende Maasssystem ist heute mit unwesentlichen Abänderungen zu allgemeiner Annahme gelangt.

Das von WEBER aufgestellte Grundgesetz enthält eine Konstante, deren numerischen Werth er mit RUDOLPH KOHLRAUSCH gemeinschaftlich bestimmt und in der unter No. XV aufgeführten Abhandlung veröffentlicht hat. Die Kenntniss dieser Konstanten ermöglicht Grössen, welche nach magnetischem oder elektrodynamischem Maasse gemessen wurden, in mechanischem Maasse auszudrücken oder umgekehrt.

Es mögen diese wenigen Worte genügen, eine Andeutung von der Fülle der Geistesarbeit zu geben, welche die nachfolgenden Abhandlungen enthalten, die neben ihrer theoretischen Wichtigkeit zugleich

ein Muster für experimentelle Forschung bilden. Wie in den ersten beiden Bänden sind Bemerkungen und Citate, welche nicht von Weber selbst herrühren, durch eckige Klammern kenntlich gemacht, nur bei einigen Citaten wurde zur Bequemlichkeit des Lesers die Seitenzahl des Originaltextes unmittelbar durch die entsprechende Seitenzahl des Bandes ersetzt. Den im Texte häufig citirten Abhandlungen von Gauss ist eine Ortsangabe in Gauss' Werken beigefügt worden.

Braunschweig, im Januar 1893.

Heinrich Weber.

Inhaltsverzeichniss des dritten Bandes.

Seite

I. Zusammensetzung galvanischer Säulen. (1841) 3

II. Messung starker galvanischer Ströme bei geringem Widerstande nach absolutem Maasse. (1841) 6

III. Ueber das elektrochemische Aequivalent des Wassers. (1841) . . 13

IV. Messung starker galvanischer Ströme nach absolutem Maasse. (1842) 19

V. Elektrodynamische Maassbestimmungen über ein allgemeines Grundgesetz der elektrischen Wirkung. (1846) 25

Einleitung . 27

Beweis des Ampère'schen Gesetzes der Wechselwirkung elektrischer Ströme.

Art. 1. Beschreibung eines Instruments zur Messung der Wechselwirkung zweier Leitungsdrähte — Elektrodynamometer . . 35

„ 2. Die elektrodynamische Kraft zweier Theile einer Kette ist dem Quadrat der Stromintensität proportional 40

„ 3. Beschreibung einer elektromagnetischen Vorrichtung zur Intensitätsmessung galvanischer Ströme, welche durch das Dynamometer geleitet werden 42

„ 4. Versuche . 46

„ 5. Beweis des elektrodynam. Fundamentalgesetzes aus Messungen 52

„ 6. Reduktion der Beobachtungen 64

„ 7. Vergleichung mit dem Gesetz der magnetischen Wechselwirkung . 68

„ 8. Vergleichung des Ampère'schen Gesetzes mit d. Beobachtungen 69

„ 9. Reduktion auf absolute Maasse 80

Volta-Induktion mit dem Elektrodynamometer.

Art. 10. Beobachtungen 92

„ 11. Gesetz der durch Volta-Induktion erzeugten Dämpfung . . 103

„ 12. Ein inducirter Strom von gleicher Stärke wie der inducirende 108

Anwendungen des Elektrodynamometers.

Art. 13. Bestimmung der Dauer momentaner Ströme mit dem Dynamometer nebst Anwendung auf physiologische Versuche . . . 109

„ 14. Wiederholung des Ampère'schen Fundamentalversuchs mit gemeiner Elektricität und Messung der Dauer des elektrischen Funkens bei Entladung einer Leidener Batterie 115

„ 15. Geschwindigkeit der Stromverbreitung und elektromotorische Kraft einer Kette 122

„ 16. Anwendung des Dynamometers auf Intensitätsmessungen der Schallschwingungen 123

„ 17. Ueber verschiedene Einrichtungen des Dynamometers . . 127

Ueber den Zusammenhang der elektrostatischen und der elektrodynamischen Erscheinungen, nebst Anwendung auf die elektrodynamischen Maassbestimmungen.

Art. 18. Ueber die Bedeutung eines allgemeinen Grundgesetzes der elektrischen Wirkung 132

Seite

Art. 19. Entwickelung eines allgemeinen Grundgesetzes der elektrischen Wirkung 134
„ 20. Vergleichung mit anderen Fundamentalgesetzen 149
„ 21. Ableitung aus dem AMPÈRE'schen Gesetze der Wechselwirkung elektrischer Ströme — Transformation des AMPÈRE'schen Gesetzes . 151
„ 22. Theorie zweier konstanter Stromelemente 157
„ 23. Theorie der Volta-Induktion 165
„ 24. Gesetz der Stromerregung in einem Leiter, welcher einem ruhenden konstanten Stromelemente genähert oder von ihm entfernt wird 166
„ 25. Vergleichung mit dem Erfahrungssatze Art. 11 171
„ 26. Vergleichung mit den von FECHNER und NEUMANN aufgestellten Sätzen 178
„ 27. Gesetz der Stromerregung in einem ruhenden Leiter, wenn ein konstantes Stromelement ihm genähert oder von ihm entfernt wird 184
„ 28. Gesetz der Stromerregung in einem Leiter durch Aenderung der Stromintensität in einem benachbarten Leiter . . . 185
„ 29. Vergleichung der Induktionswirkungen konstanter Ströme auf bewegte Leiter mit denen variabler Ströme auf ruhende Leiter . 189
„ 30. Allgemeines Gesetz der Volta-Induktion 196
„ 31. Ueber den Einfluss wechselnder Geschwindigkeit und Richtung der im Strome sich bewegenden Elektricität . . . 207
„ 32. Verschiedene Aussprüche des allgemeinen Grundgesetzes der elektrischen Wirkung 211

VI. Elektrodynamische Maassbestimmungen. (1848). [Auszug aus der V. Abhandlung.] 215

VII. Ueber die Erregung und Wirkung des Diamagnetismus nach den Gesetzen inducirter Ströme. (1848) 255

VIII. Bemerkungen zu NEUMANN's Theorie inducirter Ströme. (1849) . 269

IX. Messungen galvanischer Leitungswiderstände nach einem absoluten Maasse. (1851) 276

X. Elektrodynamische Maassbestimmungen insbesondere Widerstandsmessungen. (1852) 301

I. Widerstandsmessungen nach einem gegebenen Grundmaasse.

Art. 1. Hülfsmittel 303
„ 2. Der Elektromotor 305
„ 3. Das Galvanometer 306
„ 4. Kombinationen der vier Leiter 307
„ 5. Beobachtungsmethoden 308
„ 6. Beobachtungen 309
„ 7. Berechnung der Beobachtungen 312

II. Zurückführung der Widerstandsmessungen auf absolutes Maass.

Art. 8. Ueber die Bedeutung eines absoluten Widerstandsmaasses . 317
„ 9. Ueber die absoluten Maasse mehrerer verschied. Grössenarten 320
„ 10. Definitionen der absoluten Maasse in der Elektrodynamik . 321
„ 11. Schema zur absoluten Widerstandsbestimmung eines Leiters 322

Seite
Art. 12. Ueber die Ausführung der Beobachtungen 325
„ 13. Erste Methode 327
„ 14. Beobachtungen 330
„ 15. Zweite Methode 333
„ 16. Regeln zur Berechnung des Widerstands aus den vorhergehenden Beobachtungen 337
„ 17. Berechnung des Widerstands aus der ersten Versuchsreihe 339
„ 18. Berechnung des Widerstands aus der zweiten Versuchsreihe 341
„ 19. Berechnung des Widerstands aus der dritten Versuchsreihe 345
„ 20. Vergleichung des Widerstands der Kette in der 1. Versuchsreihe mit dem Widerstande der Kette in der 2. und 3. Reihe 347
„ 21. Uebersicht der verschiedenen Maassbestimmungen für den Widerstand des Multiplikator- oder Dämpferdrahts . . . 349
„ 22. Etalons zu Widerstandsmessungen nach absolutem Maasse . 350
„ 23. Ueber Neumann's Induktions-Konstante und Kirchhoff's Bestimmung derselben 352

III. Beispiele der Anwendung des absoluten Widerstandsmaasses.
Art. 24. Anwendung des Widerstandsmaasses zur Messung galvanischer Ströme bei technischer Benutzung derselben . . . 354
„ 25. Anwendung des Widerstandsmaasses zur Messung elektromotorischer Kräfte nach absolutem Maasse 357

IV. Ueber die Principien verschiedener absoluter Maasssysteme in der Elektrodynamik.
Art. 26. Selbstständige Begründung der absoluten Maasse in der Elektrodynamik, ohne auf die magnetischen Maasse Bezug zu nehmen 358
„ 27. Ueber das Verhältniss der absoluten Maasse in der Elektrodynamik zu denen in der Mechanik 365

V. Ueber den Zusammenhang der Theorie der galvanischen Kette mit den elektrischen Grundgesetzen.
Art. 28. Ueber die Ausgleichung der elektromotorischen Kräfte in der Kette durch Vertheilung freier Elektricität 368
„ 29. Nachweisung der Möglichkeit einer Vertheilung der freien Elektricität im Leiter, wodurch die Ungleichheiten der Wirksamkeit gegebener elektromotorischer Kräfte in den verschiedenen Theilen der Kette nach Proportion ihrer Widerstände ausgeglichen werden 371
„ 30. 31. Ueber das Gesetz der Vertheilung der freien Elektricität an der Oberfläche des Leiters eines gleichförmigen und beharrlichen Stroms 376
„ 32. Nachweisung, wie die zu einem gleichförmigen und beharrlichen Strome nothwendige Vertheilung der freien Elektricität an der Oberfläche des geschlossenen Leiters entstehe 387
„ 33. Ueber Kirchhoff's Ableitung der Ohm'schen Gesetze, welche sich an die Theorie der Elektrostatik anschliesst . . . 390
Art. 34. Durch Vergleichung elektroskopischer und galvanometrischer Beobachtungen der galvanischen Kette diejenige relative Geschwindigkeit zweier elektrischer Massen zu bestimmen, bei welcher weder Anziehung noch Abstossung Statt findet 392
„ 35. Ueber das Verhältniss der Geschwindigkeit der Strömung zur Geschwindigkeit der Fortpflanzung des Stroms . . . 394
„ 36. Ueber die Ursachen des Widerstands der Leiter 400

Seite

VI. Vergleichung des allgemeinen Princips der mathematischen Theorie inducirter elektrischer Ströme von NEUMANN mit den aus dem allgemeinen Grundgesetze der elektrischen Wirkung abgeleiteten Induktionsgesetzen.

Art. 37. Ueber d. nach NEUMANN bei Gleitstellen Statt findende Differenz 405
„ 38. Beschreibung v. NEUMANN's Versuchen u. deren Wiederholung 409
„ 39. Das Induktionsgesetz für inducirende Ströme mit Gleitstellen 417

Beilagen.

A. Beschreibung eines bei Widerstandsmessungen zu gebrauchenden magnetischen Induktors 428
B. Beschreibung des Galvanometers 430
C. Uebersicht der Beobachtungsmethoden für galvanische Messungen mit Rücksicht auf den Einfluss der Dämpfung 433
D. Begründung der Regeln zur Berechnung des Widerstands eines Leiters aus den Beobachtungen 451
E. Regeln zur Berechnung des von einem Strome mit Gleitstelle inducirten Stroms 465

XI. Elektrodynamische Maassbestimmungen insbesondere über Diamagnetismus. (1852) . 473

Einleitung. Begriff der diamagnetischen Polarität 475

Elektrodiamagnetismus und Messung des Moments eines Elektrodiamagnets.

Art. 1. Elektromagnete und Elektrodiamagnete 478
„ 2. Elektrodiamagnetischer Messapparat 479
„ 3. Versuche und Messungen 483
„ 4. Berechnung der Versuche 486
„ 5. Bequemste Einrichtung zur Beobachtung der diamagnetischen Polarität 489

Diamagnetelektricität und Messung der diamagnetisch inducirten elektrischen Ströme.

Art. 6. Diamagnetische Induktion 492
„ 7. Beschreibung des diamagnetischen Induktionsapparats . . 492
„ 8. Versuche . 497
„ 9. Berechnung der Versuche 503
„ 10. Vergleichung der beiden Bestimmungen der Stärke eines Elektrodiamagnets aus seiner magnetischen und magnetelektrischen Wirkung 506
„ 11. FARADAY's Versuche 513
„ 12. FEILITZSCH's Versuche und Theorie 517

Ueber den Zusammenhang der Lehre vom Diamagnetismus mit der Lehre von dem Magnetismus und der Elektricität.

Art. 13. Ueber Begründung einer Theorie des Diamagnetismus . . 519
„ 14. Ueber den Weg zur Erforschung der Ursachen des Diamagnetismus 519
„ 15. Klassifikation der inneren Ursachen, welche den durch eine ideale Vertheilung repräsentirten Wirkungen zum Grunde liegen können 521
„ 16. Abhängigkeit der idealen Vertheilung von der magnetischen oder elektromagnetischen Scheidungskraft, nach Verschiedenheit der aufgeführten vier möglichen inneren Ursachen 522

Seite

Art. 17. Innere Ursache des Diamagnetismus 524
„ 18. Bestimmung der elektromagnetischen Scheidungskraft in einer galvanischen Spirale 525
„ 19. Bestimmung des Elektrodiamagnetismus aus der elektromagnetischen Scheidungskraft 527
„ 20. Vergleichung der Wechselwirkung diamagnetischer Molekule mit der Wechselwirkung magnetischer Molekule . . 530
„ 21. Unterscheidung magnetischer und diamagnetischer Körper durch positive und negative Werthe einer Konstanten . . 532
„ 22. Ueber die Existenz magnetischer Fluida 535

Ueber die Abhängigkeit des magnetischen und diamagnetischen Moments von der Grösse der Scheidungskraft.

Art. 23. Von der auf der Analogie mit der Elektricitätslehre beruhenden Hypothese wirklich existirender magnetischer Fluida und von dem dadurch gegebenen Gesetze der Abhängigkeit des magnetischen Moments von der Grösse der Scheidungskraft 538
„ 24. Zusammenhang des Vorhandenseins eines Maximumwerths des magnetischen Moments mit der Annahme von der Drehbarkeit der Molekule 541
„ 25. Versuche zum Beweise des Vorhandenseins eines Maximumwerths des magnetischen Moments 543
„ 26. Das Gesetz der Abhängigkeit des magnetischen Moments von der Grösse der Scheidungskraft nach der Annahme von der Drehbarkeit der Molekule, und Vergleichung mit den Versuchen. Hierzu Tafel I 547
„ 27. Anwendung auf die Art. 10 gemachte Vergleichung . . . 551

XII. Ueber den Zusammenhang der Lehre vom Diamagnetismus mit der Lehre von dem Magnetismus und der Elektricität. (1852). [Auszug aus der XI. Abhandlung] 555

XIII. Vorwort bei der Uebergabe der Abhandlung: Elektrodynamische Maassbestimmungen insbesondere Zurückführung der Stromintensitäts-Messungen auf mechanisches Maass. (1855) 591

XIV. Ueber die Elektricitätsmenge, welche bei galvanischen Strömen durch den Querschnitt der Kette fliesst, von W. Weber und R. Kohlrausch. (1856). [Auszug a. d. XV. Abhandl. von R. Kohlrausch] 597

XV. Elektrodynamische Maassbestimmungen insbesondere Zurückführung der Stromintensitäts-Messungen auf mechanisches Maass, von R. Kohlrausch und W. Weber. (1857) 609

Art. 1. Maass der Stromintensität auf Grund beobachteter magnetischer, elektrodynamischer und elektrolytischer Wirkungen 611
„ 2. Mechanisches Maass der Stromintensität auf Grund der nächsten Ursachen — Stromgeschwindigkeit und Elektricitätsgehalt des Stromleiters 614

Zurückführung des magnetischen, elektrodynamischen und elektrolytischen Maasses der Stromintensität auf mechanisches Maass.

Art. 3. Mangel der elektrostatischen Messung einer angesammelten Elektricitätsmenge, welche in Strömung versetzt werden soll 615

Seite

Art. 4. Aufgabe. Diejenige Elektricitätsmenge elektrostatisch zu bestimmen, welche bei dem magnetischen Maasse der Stromintensität in 1 Sekunde durch den Querschnitt des Stromleiters fliesst 617

„ 5. Plan zur Lösung der Aufgabe. — Elektrostatische Messung der in einer Leidener Flasche angesammelten Elektricitätsmenge. — Elektromagnetische Messung des durch Entladung der Flasche erzeugten Stroms 618

„ 6. Bestimmung des Verhältnisses, nach welchem sich die Elektricität zwischen der inneren Belegung einer Leidener Flasche und einer grossen Kugel theilt, während die äussere Belegung der Flasche mit der Erde verbunden ist 624

„ 7. Korrespondirende Beobachtungen — Ablenkung der Tangenten-Boussole durch Entladung einer Leidener Flasche — Torsion der Coulomb'schen Drehwaage, durch welche die beiden, mit einem bestimmten Bruchtheile der entladenen Elektricitätsmenge geladenen, Kugeln in gleicher Entfernung wie die ungeladenen erhalten werden 628

„ 8. Berechnung des erwähnten Bruchtheils 630

„ 9. Berechnung derjenigen Elektricitätsmenge, mit welcher die beiden Kugeln der Coulomb'schen Drehwaage geladen sein müssen, um durch ihre Abstossung die Einheit des Drehungsmoments auf die Drehwaage auszuüben 631

„ 10. Berechnung derjenigen Torsion, welche der Draht, an welchem die Coulomb'sche Drehwaage hängt, erhalten muss, um durch seine Torsionskraft die Einheit des Drehungsmoments auf die Drehwaage auszuüben 635

„ 11. Berechnung der in der Leidener Flasche (Art. 6) nach Ladung der grossen Kugel zurückgebliebenen Elektricitätsmenge . 637

„ 12. Elektricitätsverlust bis zur Entladung der Leidener Flasche 638

„ 13. Berechnung der Dauer e. Stroms von der Intensität des magnetischen Strommaasses, der gleiche Ablenkung d. Magnetnadel wie der Entladungsstrom der Leidener Flasche hervorbringt 642

„ 14. Berechnung der Elektricitätsmenge, welche bei einem Strome von der Intensität des magnetischen Strommaasses in 1 Sekunde durch den Querschnitt des Stromleiters fliesst 647

„ 15. Zurückführung des magnetischen, elektrodynamischen und elektrolytischen Maasses d. Stromintensität auf mechan. Maass 648

Anwendungen.

Art. 16. Bestimmung der zur Ausscheidung von 1 Milligramm Wasserstoff aus 9 Milligr. Wasser erforderlichen Elektricitätsmenge 649

„ 17. Bestimmung der relativen Geschwindigkeit zweier elektrischen Massen, bei welcher nach dem Grundgesetz der elektrischen Wirkung die elektrodynamische Kraft der elektrostatischen entgegengesetzt gleich ist 651

„ 18. Die elektrischen Gesetze mit numerischer Bestimmung der Konstanten 655

„ 19. Anwendung auf Elektrolyse — Messung einer chemischen Affinitätskraft 657

„ 20. Elektricitätsgehalt der Leiter 664

„ 21. Anwendung auf Maasse — Ableitung aller Maasse aus dem Raummaasse 667

Anhang.

I. Beschreibung der Torsionswaage 670

II. Beschreibung der Tangenten-Boussole 674

GALVANISMUS

UND

ELEKTRODYNAMIK

ERSTER THEIL.

ABHANDLUNGEN BIS ZUM JAHRE 1857.

I.

Zusammensetzung galvanischer Säulen.

[Göttingische gelehrte Anzeigen, 81. Stück, den 24. Mai 1841, p. 801—805.]

Der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften theilten die Professoren Wöhler und Weber von einer Entdeckung, welche Herr Professor Poggendorff in der Zusammensetzung galvanischer Säulen gemacht und der Königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin am 29. April d. J. vorgelegt hat, eine Anzeige nebst einigen Bemerkungen mit.

Es ist bekannt, dass man zur Hervorbringung der grössten galvanischen Wirkungen sich nicht mehr so unbequemer riesenmässiger Apparate zu bedienen braucht, wie früher, sondern dass man in der neuesten Zeit gelernt hat, mit kleinen und bequemen Apparaten dieselben Wirkungen zu erhalten. Am meisten leistet in dieser Art eine Kette nach Angabe des Herrn Grove, wo kleine Thonzellen, deren Wände sich mit Flüssigkeit durchziehen, mit gewöhnlicher Salpetersäure gefüllt und mit verdünnter Schwefelsäure äusserlich umgeben werden. In erstere Flüssigkeit werden Platinplatten, in letztere amalgamirte Zinkplatten getaucht und mit starken Kupferdrähten die nöthigen Verbindungen hergestellt. (Siehe Poggendorff's Annalen 1839, Bd. 48, S. 300. 1840, Bd. 49, S. 511). Die Kostspieligkeit der Platinplatten beschränkte bisher den Gebrauch dieser sonst so kräftigen und bequemen Säulen; daher wird es denen, welche aus diesem Grunde sich dieselben nicht verschaffen konnten, angenehm sein, zu erfahren, wie Herr Professor Poggendorff *Eisenplatten* statt Platinplatten mit fast gleichem Erfolge in Anwendung gebracht hat.

„Jetzt beschäftigen mich," schreibt Herr Professor Poggendorff vom 1. Mai d. J., „die Ketten mit zwei Flüssigkeiten, die offenbar die grösste Aufmerksamkeit verdienen und noch so wenig studiert sind. Ich habe gegen 50 solche Ketten dargestellt und gefunden, dass sie fast alle den unschätzbaren Vortheil gewähren, einen konstanten Strom zu geben, so dass man also genaue Messungen machen kann. . . . Nur eines von praktischem Nutzen will ich Dir mittheilen, dass man nämlich in

der GROVE'schen Säule das theure Platin sehr wohl durch Eisen, Stahl oder Gusseisen ersetzen kann, so bald man statt der gewöhnlichen Salpetersäure *koncentrirte rauchende Säure (acidum nitricum fumans)* nimmt. Man kann diese rauchende Säure sogar mit Vortheil mit $1^1/_4$ Theil gewöhnlicher Salpetersäure verdünnen, oder so weit, dass das Eisen noch nicht angegriffen wird. Letzteres ist nothwendig; nimmt man die Säure zu dünn, so wird das Eisen mit grosser Heftigkeit angegriffen. In der Säure von angegebener Koncentration bleibt das Eisen so blank wie das Platin. Hier die Elemente der besagten Ketten für rauchende koncentrirte Salpetersäure und Schwefelsäure mit 4 Theilen Wasser. Das Zink war amalgamirt.

	Elektromotorische Kraft.	Widerstand.
Zink / Platin	100,00	13,120
Zink / Eisen	78,62	11,275
Zink / Stahl	86,99	12,927
Zink / Gusseisen	89,63	12,913.

Vom Widerstand kommen hier 4,36 (Zoll Neusilberdraht von $^1/_6$ Linie Durchmesser) auf den Schliessungsdraht.

„Du siehst also, bei *gleicher* Plattengrösse kann man $^9/_{10}$ der Wirkung der GROVE'schen Säule mit Eisen erlangen. Das fehlende Zehntel ist leicht durch Vergrösserung der Platten zu ersetzen. Uebrigens ist der *Strom* eben so *konstant* als bei der GROVE'schen Säule.“

Auf obige Mittheilung wurden von den Herren WÖHLER und WEBER sogleich einige Versuche zur Bestätigung angestellt, bei denen sich zugleich das merkwürdige Resultat ergab, dass ein sehr starker Strom selbst dann entsteht, wenn man blosses Eisen in *beide* Flüssigkeiten taucht, indem man auch die in verdünnte Schwefelsäure getauchte amalgamirte Zinkplatte mit einer Eisenplatte vertauscht. Diese letztere Platte, weil sie nicht amalgamirt werden kann, wurde zwar von der Schwefelsäure unter schwacher Entwickelung von Wasserstoffgas angegriffen, was aber die Wirkung nicht störte; vielmehr ergab sich, dass auch diese Kette in ihrer Wirkung eben so konstant wie die GROVE'sche war. Es ist diese *blos aus Eisen* und zwei Flüssigkeiten zusammen gesetzte Kette, welche so kräftige Wirkungen giebt, für die Theorie der Säule im Allgemeinen und für die Erforschung der galvanischen Eigenschaften des Eisens im Besonderen von Interesse. Zwar sind schon häufiger Ketten zusammen gestellt worden, bei denen zwei gleich-

artige Metalle mit zwei ungleichartigen Flüssigkeiten kombinirt werden, z. B. von Becquerel und Delarive, wovon Fechner im Repertorium der Experimentalphysik, S. 454 f., ein Verzeichniss giebt; es scheint aber blos die Existenz und Richtung des Stromes Interesse erregt zu haben, die weitere Benutzung und Untersuchung aber durch die Schwäche und Unbeständigkeit der Wirkung verhindert worden zu sein. Eine so starke und konstante Wirkung wie die beschriebene, wodurch diese Art von Ketten wirklich brauchbar und nützlich und einer genauen Untersuchung fähig werden, ist neu und verdient besondere Beachtung. Zwei Paare, wo jede Platte etwa nur 3 Quadratzoll Oberfläche hatte, brachten dünne Platindrähte zum Glühen und genügten zur lebhaften Zersetzung des Wassers. Gewiss verdient dieser Gegenstand weiter verfolgt zu werden, wenn nicht Herr Professor Poggendorff vielleicht schon seine viel umfassende Untersuchung auch hierauf erstreckt hat.

Die schwache Entwickelung von Wasserstoffgas an den in die verdünnte Schwefelsäure getauchten Eisenplatten kann übrigens leicht vermieden werden, wenn man *verzinntes Eisenblech* anwendet, welches in dieser Beziehung denselben Dienst wie amalgamirtes Zink leistet; es scheint dem letzteren sogar vorzuziehen zu sein, weil es dünn und haltbar ist, während das Zink durch Quecksilber brüchig wird und einen Theil seines Amalgams leicht verliert, welches als graues Pulver die Oberfläche der Platte bedeckt oder in der Säure sich absetzt, wodurch die Wirkung der Säule geschwächt wird.

II.

Messung starker galvanischer Ströme bei geringem Widerstande nach absolutem Maasse.

[Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins im Jahre 1840 herausgegeben von Karl Friedrich Gauss und Wilhelm Weber, Leipzig 1841, p. 83—90.]

Es ist in dem Aufsatze über die magnetische Friktion[1]) mehrmals der Fall vorgekommen, dass es von Wichtigkeit war, die Intensität eines galvanischen Stromes nach absolutem Maasse kennen zu lernen, um ihn mit der Intensität anderer Ströme unter beliebigen Verhältnissen vergleichen zu können. Es wurde nämlich ein eisernes Rad durch einen galvanischen Strom magnetisirt und seine magnetische Friktion gemessen: es sollte dabei der Strom näher bestimmt werden, welcher diese Wirkung hervorgebracht hatte. Es hätte zu diesem Zwecke leicht das Mittel angewendet werden können, welches Faraday in der siebenten Reihe seiner Experimental-Untersuchungen über Elektricität (Philosophical Transactions f. 1834, und Poggendorff's Annalen 1834, Bd. 33, S. 316 ff.) angegeben hat, wonach die Stärke des Stroms durch die Menge des von ihm in bestimmter Zeit zersetzten Wassers gemessen wird; jedoch wäre der Strom, wenn er zu diesem Zwecke durch einen Wasserzersetzungsapparat geleitet worden wäre, sehr geschwächt worden, was bei jenen Versuchen, die einen ungeschwächten Strom erforderten, nicht geschehen durfte.

Der Fall, dass die Messung der absoluten Stromintensität durch die Menge des zersetzten Wassers wegen der dazu nothwendigen Leitung des Stromes durch einen Wasserzersetzungsapparat nicht zulässig ist, kommt häufig vor, zumal bei einfachen Ketten, wo ein ohne jene Leitung sehr starker Strom durch dieselbe so geschwächt wird, dass gar keine Wasserzersetzung erfolgt und also auch von einer Messung des zersetzten Wassers nicht die Rede sein kann. In solchen Fällen muss eine andere Methode angewendet werden, wobei der Strom blos durch starke und kurze Kupferdrähte geleitet wird, welche den Widerstand nicht merklich vergrössern.

[1]) [Wilhelm Weber's Werke, Bd. II, p. 200.]

Es wurde daher in obigen Versuchen statt der von Faraday angegebenen Methode folgendes sehr einfache Verfahren angewendet, dass ein bestimmtes Stück des dicken Leitungsdrahts in einiger Entfernung von einer Magnetnadel geradlinig so vorbeigeführt wurde, dass letztere beträchtlich vom magnetischen Meridian abwich, während die ganze übrige Leitungskette in solcher Ferne und Lage sich befand, dass auf ihre Wirkung auf die Nadel keine Rücksicht genommen zu werden brauchte. Es leuchtet dann von selbst ein, dass aus der gemessenen Ablenkung der Nadel mit Berücksichtigung der Länge und Lage des wirksamen Leitungsdrahts und der absoluten Intensität des Erdmagnetismus am Beobachtungsorte eine absolute Bestimmung der Intensität des galvanischen Stroms gewonnen werden konnte, wie sie in den Resultaten des magnetischen Vereins im Jahre 1840, S. 49[1]) gegeben worden ist. Diese Methode hat übrigens den Vorzug, dass sie eine Bestimmung der absoluten Stromintensität für jeden Augenblick gestattet, während nach Faraday's Methode nur mittlere Resultate für längere Zeiträume erhalten werden. Man kann auch Versuche machen, wo man die Intensität eines und desselben Stroms gleichzeitig nach dieser und nach Faraday's Methode misst, und dadurch eine Vergleichung der, beiden Messungsweisen zum Grunde gelegten, Maasse erhalten; doch ist diese Vergleichung zur absoluten Bestimmung des Stroms nicht nothwendig. Nothwendig ist eine solche Vergleichung nur beim gewöhnlichen Galvanometer, welches aus einer mit Multiplikator versehenen Magnetnadel besteht, wenn damit absolute Bestimmungen erhalten werden sollen, zu denen es unmittelbar nicht geeignet ist, wie Jacobi in Poggendorff's Annalen Bd. 48, gethan hat.

Bei dem häufig eintretenden Bedürfniss, die absolute Intensität galvanischer Ströme einfacher Ketten zu bestimmen, wobei Faraday's Methode den Dienst versagt, kann ein Instrument, welches, nach den oben erwähnten Principien konstruirt, direkt zum Ziele führt, von grossem Nutzen sein, weshalb hier einige Erläuterungen über seine vortheilhafteste Einrichtung und einige damit gemachte Messungen angeführt werden mögen.

Das Instrument ist desto zweckmässiger konstruirt, je grösser der Abstand des Leitungsdrahts im Vergleich zur Nadellänge ist, weil dann die Vertheilungsweise des Magnetismus in der Nadel desto weniger in Betracht kommt, wenn nur bei diesem grösseren Abstand die zu messende Ablenkung gross genug bleibt, um mit Genauigkeit beobachtet zu werden. Es leuchtet daraus von selbst der Vortheil ein, den es hat wenn der Leitungsdraht, statt geradlinig an der Nadel vorbeigeführt zu werden (was bei den oben erwähnten Versuchen in Ermangelung

[1]) [Wilhelm Weber's Werke, Bd. II, p. 202 u. 203.]

eines eigenen Instruments blos um der leichteren Ausführung willen geschah), in einem weiten vertikalen Kreise ganz um die Nadel herumgeführt wird. Bei gleicher Ablenkung kann dann die Entfernung aller Theile dieses Leitungsdrahts weit grösser sein. Auch ist, wenn der Leitungsdraht genau einen vertikalen Kreis um die Mitte der Nadel bildet, die Berechnung der absoluten Intensität des galvanischen Stroms, aus der beobachteten Ablenkung der Nadel, sehr einfach und leicht. Diese Kreisform des Leiters gewährt endlich noch den besonderen Vortheil, dass die übrige Kette sehr leicht so geführt werden kann, dass

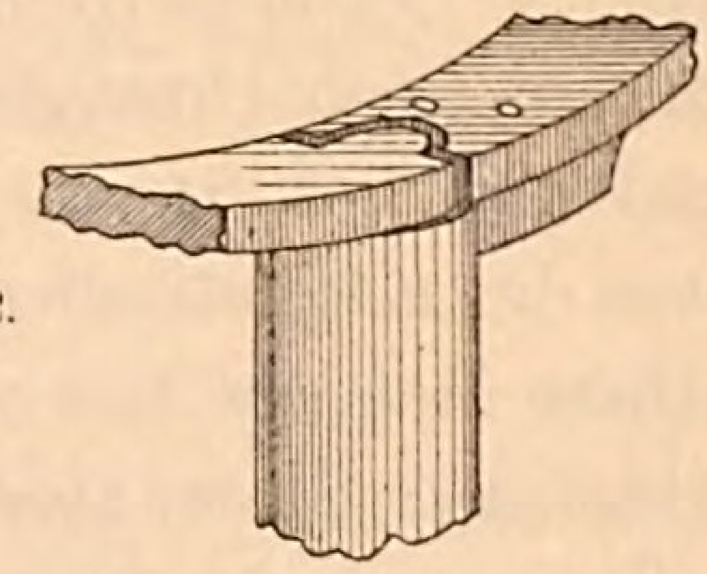


Fig. 2.

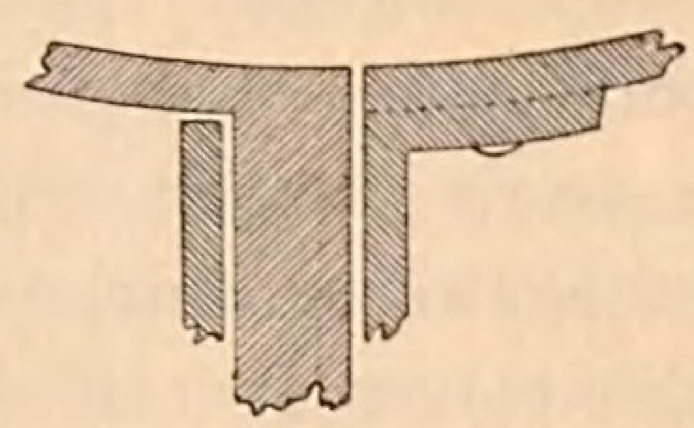


Fig. 3.

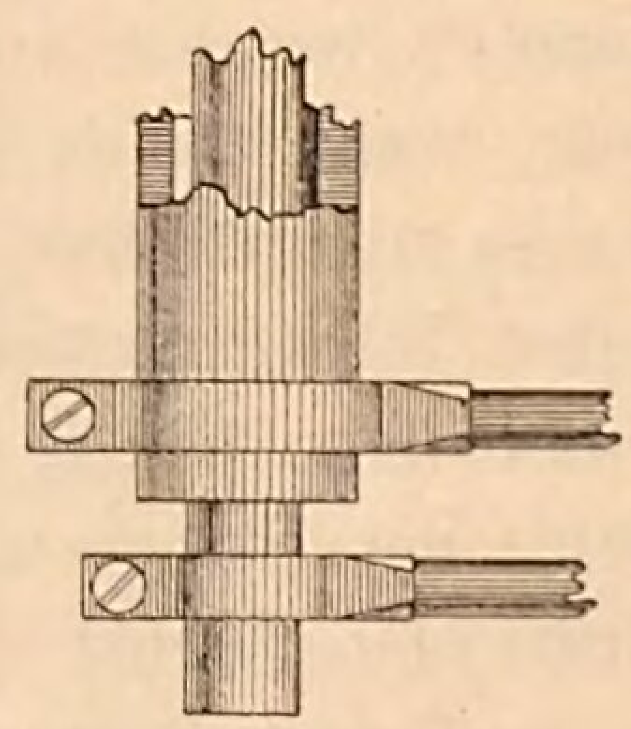


Fig. 4.

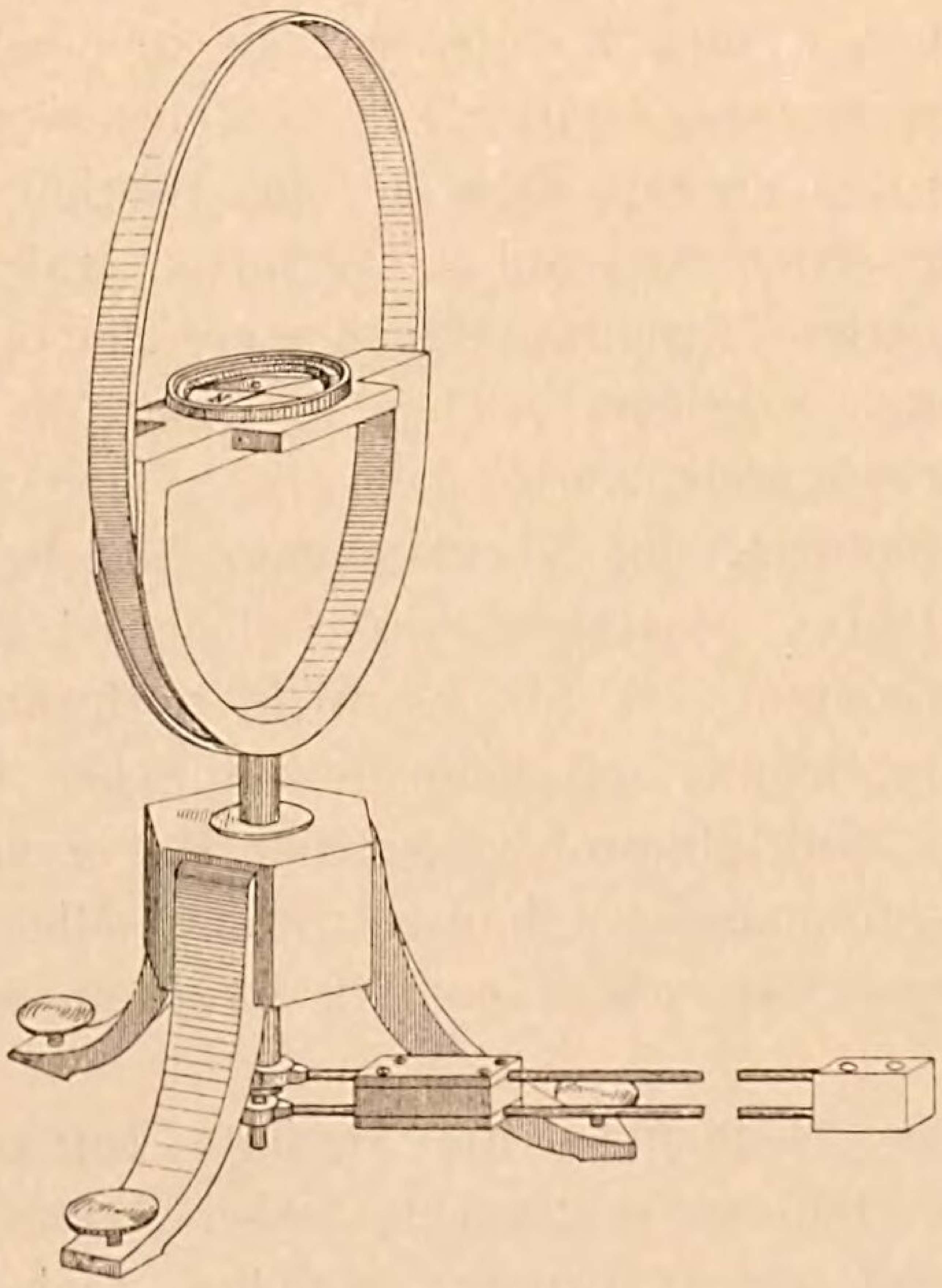


Fig. 1.

sie keinen merklichen Einfluss auf die Nadel ausübt. Es ist dazu nur nöthig, die beiden Theile, welche den Strom zu- und ableiten, recht nahe neben einander fortzuführen, wo ihre Wirkungen auf die Nadel sich aufheben. Das erste Stück vom Ringe an wird der Strom am besten durch zwei kupferne Röhren geleitet, deren eine die andere umschliesst, jedoch isolirt von ihr gehalten wird, wie Fig. 1 bis 4 darstellt. Der Querschnitt des kreisförmigen Leiters muss so gross sein, dass sein Widerstand unmerklich ist.

Ich habe ein Instrument hiernach einrichten lassen, dessen Kupferring $198\frac{1}{2}$ Millimeter Durchmesser hatte, und dessen Querschnitt 30 Quadratmillimeter betrug. Dieser Reif war unten aufgeschnitten, und das eine Ende mit der einen Leitungsröhre, das andere Ende mit der

anderen Leitungsröhre zusammengelöthet. Diese in einander gesteckten, aber isolirten Röhren führten den Strom 100 Millimeter abwärts zu zwei 4 Millimeter dicken 1 Meter langen Leitungsdrähten, welche dicht unter einander zu zwei Quecksilbernäpfchen gingen, die mit den beiden Platten der galvanischen Kette in Verbindung gesetzt werden konnten. Die Magnetnadel stand in der Mitte des Kreises auf einer an dem Kreis befestigten Holzplatte. Der Kreis selbst stand auf einem hölzernen mit Stellschrauben versehenen Dreifuss. Die Länge der Nadel betrug 50 Millimeter und bewegte sich auf einem in Grade getheilten Kreisbogen. Der Gebrauch des Instruments bedarf keiner Erläuterung. Die Berechnung der absoluten Intensität aus der beobachteten Ablenkung der Nadel besteht darin, dass die Tangente des Ablenkungswinkels mit einer konstanten Zahl multiplicirt wird, die aus der Grösse des Kupferrings und aus der absoluten horizontalen Intensität des Erdmagnetismus am Beobachtungsorte abgeleitet wird. Bezeichnet R (= 99,125 mm) den Halbmesser des Ringes, T (= 1,7833) die horizontale Intensität des Erdmagnetismus (in Göttingen), so ist jener konstante Faktor

$$\frac{1}{\pi} \cdot RT = 56{,}2675.$$

Bezeichnet φ die beobachtete Ablenkung, so ist die gesuchte absolute Intensität des gemessenen Stroms

$$\frac{1}{\pi} \cdot RT \,.\, \mathrm{tang}\, \varphi = 56{,}2675 \,.\, \mathrm{tang}\, \varphi.$$

Zum bequemeren Gebrauche lässt sich leicht eine Tafel einrichten, welche den gesuchten Werth der absoluten Stromintensität für jeden beobachteten Werth von φ unmittelbar giebt. So leicht und schnell wie mit diesem Instrumente wird man solche absolute Messungen mit keinem anderen ausführen können.

Es bleibt noch ein Wort zu sagen übrig, über das der angegebenen Berechnung zum Grunde gelegte Maass der Intensität. Derjenige Strom ist nämlich hierbei als Maass angenommen, der, wenn er die Flächeneinheit umgeht, in der Entfernung eben so wirkt, wie das in der *Intensitatis vis magneticae* [1]) festgesetzte Maass des freien Magnetismus.[2])

[1]) [Gauss' Werke, Bd. V, p. 79.]

[2]) Man beachte, dass dieser Strom halb so stark ist, wie derjenige, welcher bei der Einheit der Länge des Leiters und des Abstands von der Magnetnadel auf die Einheit des freien Magnetismus in der Nadel die Einheit des Drehungsmoments ausübt, auf welchen letzteren oben S. 49 [Wilhelm Weber's Werke, Bd. II, p. 202 u. 203] die gemessenen Stromintensitäten bezogen wurden. Es ergiebt sich dieses leicht aus dem Grundgesetze des Galvanismus, wie es Art. 1 der Allgemeinen Lehrsätze im vorigen Bande der Resultate angegeben [Gauss' Werke, Bd. V, p. 198] und hier schon S. 48 [Wilhelm Weber's Werke, Bd. II, p. 202] angeführt worden ist.

Noch möge bemerkt werden, dass die Beobachtungen sehr erleichtert werden, wenn man die Boussole mit einem Dämpfer versieht, welcher bewirkt, dass sie schnell zur Ruhe kommt. Zu feineren Messungen würde es nöthig sein, die Boussole mit einem kleinen Magnetometer zu vertauschen, wobei aber ein weit grösserer Kupferkreis angewendet werden müsste, auch wenn die Nadel sehr kurz, z. B. nur 60 bis 80 Millimeter lang, wäre. Die Ablenkung der Nadel bei starken Strömen würde dann noch genau messbar sein, wenn auch der Kupferring 600 Millimeter Durchmesser hätte.

Es mögen nun einige mit diesem Instrument gemachte Messungen angeführt werden. Zur Beurtheilung der grössten Wirkungen, welche man mit galvanischen Strömen hervorbringen kann, ist es von Wichtigkeit, die Stromintensitäten der einfachen Ketten zu messen, ohne den Widerstand, den sie besitzen, durch den Leitungsdraht merklich zu vergrössern. Diese Messung giebt dann unmittelbar das Maximum der Stromstärke, dem man sich durch Vermehrung der Zahl der Plattenpaare nähern kann, wenn der Strom einen grösseren Widerstand überwinden muss. Folgende Tafel giebt die Resultate dieser Messungen für fünf einfache Ketten von verschiedener Grösse und Zusammensetzung:

Bezeichnung der Kette.	Beobachtete Ablenkung.	Berechnete absolute Intensität.
A.	72° 2′	173,52
B.	78° 15′	270,52
C.	66° 40′	130,44
D.	54° 2′	77,54
E.	73° 2,5′	184,52

Ueber die Grösse und Zusammensetzung dieser Ketten ist folgendes zu bemerken:

A war ein Daniell'scher Becher, wo die von der Kupfervitriollösung berührte Kupferfläche 9 Quadratdecimeter gross war. Die Kupfervitriollösung, so wie auch das Wasser, welches den amalgamirten Zinkstab umgab, war mit 10 Procent Schwefelsäure vermischt.

B war ein Grove'scher Becher. Ein Platinbecher von 1,9 Quadratdecimeter innerer Oberfläche wurde mit gewöhnlicher Salpetersäure gefüllt, während ein kleiner poröser Thonbecher, mit verdünnter Schwefelsäure gefüllt, mitten darin stand, und eine amalgamirte Zinkstange in letztere getaucht wurde. Die Schwefelsäure war mit 80 Procent Wasser vermischt.

C war ein Becher nach der Angabe des Herrn Professor Poggendorff mit einer Eisenplatte in rauchender Salpetersäure, statt der Platinplatte in gewöhnlicher Salpetersäure der Grove'schen Säule. Die

Eisenplatte wurde von beiden Seiten von der Salpetersäure berührt, die ganze Berührungsfläche betrug aber dabei nur $^3/_4$ Decimeter. Die Schwefelsäure, welche die Thonzelle umgab, und worin ein amalgamirter Zinkcylinder eingetaucht war, war mit 90 Procent Wasser verdünnt.

D war ein Becher von gleicher Grösse und Zusammensetzung wie der vorige, blos mit dem Unterschiede, dass der in verdünnte Schwefelsäure eingetauchten Zinkplatte des vorigen Bechers ebenfalls eine Eisenplatte substituirt wurde. Auf die starken Ströme, welche hier entstehen, ungeachtet nur ein einziges Metall gebraucht wird, ist schon früher (Göttinger gel. Anz. 1841, St. 81)[1]) aufmerksam gemacht worden.

E endlich war ein Becher nach Angabe des Herrn Professor Bunsen in Marburg. Ein aus Steinkohle und Cokes fest zusammengebackener Kohlencylinder, der mit Salpetersäure durchzogen war, wurde mit $1^7/_{10}$ Quadratdecimeter Oberfläche in verdünnte Schwefelsäure getaucht und in geringem Abstand von einem Zinkcylinder umgeben. Die Schwefelsäure war mit 90 Procent Wasser verdünnt.

Die oben angeführten Resultate sind die grössten, welche bei der Prüfung mehrerer ganz gleich konstruirter Becher erhalten wurden. Von der ersten, vierten und fünften Sorte waren jedesmal 4 Stück, von der dritten 2 Stück, von der zweiten nur eins geprüft worden. Die grösste Differenz bei diesen Wiederholungen hatte sich bei der fünften Art ergeben und hatte ihren Grund wahrscheinlich in der oft unvollkommenen Leitung des Stroms aus der Kohle in den Kupferdraht. Die drei anderen Becher hatten nämlich ungefähr nur einen halb so starken Strom wie den oben angeführten ergeben.

Der stärkste Strom unter den hier gemessenen ist in obigen Versuchen mit der Grove'schen Kette erhalten worden, dessen Intensität = 270,52 gefunden wurde. Ein solcher Strom, wenn er ungeschwächt durch Wasser ginge, würde in jeder Sekunde 2,536 Milligramm Wasser zersetzen, oder ungefähr $4^3/_4$ Kubikcentimeter Knallluft entwickeln, wie im folgenden Aufsatz gezeigt werden wird. Wenn ein solcher Strom ein Quadratmeter Fläche umschliesst, so übt er in die Ferne eben so grosse magnetische Kräfte, wie ein sehr starker Stahlmagnet von 676,3 Gramm Gewicht (wo man 400 Maass Magnetismus auf 1 Milligramm Stahl rechnen kann).

Man benutzt häufig dünne Platindrähte, um durch ihr Glühen eine Schätzung der Stromstärke zu erhalten. Eine Messung ergab, dass ein deutliches, am Tage sichtbares Glühen eines $^2/_{15}$ Millimeter dicken Platindrahts von einem Strom, dessen absolute Intensität = 20 war, hervorgebracht wurde.

[1]) [Wilhelm Weber's Werke, Bd. III, p. 4.]

Um die in einem solchen Drahte frei werdende Wärmemenge selbst zu erfahren, wurde ein $28^1/_2$ Millimeter langes Stück von jenem $^2/_{15}$ Millimeter dicken Platindraht durch 114 Gramm destillirten Wassers geführt. Die durch einen galvanischen Strom, der durch diesen Draht geleitet wurde, darin frei gewordene Wärme theilte sich dem umgebenden Wasser mit und konnte durch die Temperaturerhöhung des Wassers, in welches ein Thermometer eingetaucht war, gemessen werden. Derselbe Strom, welcher die Erwärmung des Drahts und des Wassers hervorbrachte, wurde durch den Kupferkreis des Galvanometers geleitet und lenkte die im Mittelpunkte aufgestellte Magnetnadel vom magnetischen Meridian ab. Die folgende Tafel giebt die Resultate einer solchen Messungsreihe, wo die anfängliche Temperatur des Wassers 15° Cent. betragen hatte.

Zeit.	Ablenkung.	Temperatur des Wassers.
11′ 0″	52° 30′	21,5
11′ 30″	52° 30′	22,0
13′ 30″	51° 30′	23,0
15′ 0″	51° 30′	24,0
17′ 0″	52° 0′	25,0
19′ 50″	51° 50′	26,0
20′ 30″	51° 20′	27,0
22′ 30″	51° 0′	28,0
24′ 30″	50° 30′	28,5
26′ 0″	50° 10′	29,0
29′ 0″	49° 20′	30,0

Der Unterschied x der anfänglichen Temperatur des Wassers und der Temperatur nach t Minuten lässt sich hiernach durch

$$x = 0{,}95 \,.\, t - 0{,}015 \,.\, t^2$$

darstellen, woraus folgt, dass wenn die Wärmeentwickelung im Drahte der Stromintensität proportional ist, ein Strom, dessen Intensität = 1 ist, in 1 Minute den beschriebenen Platindraht so erwärmte, dass die Temperatur von 1 Gramm Wasser um 1,4° Cent. stieg. Wurde der Draht im Wasser durchschnitten, so war die Ablenkung der Nadel Null, zum Beweis, dass kein messbarer Theil des Stroms durch das Wasser ging.

Es ist zu wünschen, dass bei Versuchen mit starken galvanischen Strömen ihre absolute Intensität immer auf eine der hier beschriebenen ähnliche Weise gemessen und angegeben werde, um die unter verschiedenen Verhältnissen von verschiedenen Beobachtern gewonnenen Resultate unter einander vergleichbar zu machen und ihre Uebereinstimmung prüfen zu können.

W.

III.

Ueber das elektrochemische Aequivalent des Wassers.

[Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins im Jahre 1840 herausgegeben von Karl Friedrich Gauss und Wilhelm Weber, Leipzig 1841, p. 91—98 und Annalen der Physik und Chemie herausgegeben von J. C. Poggendorff, Bd. 55, Leipzig 1842, p. 181—189.]

Nach Faraday's zahlreichen Versuchen scheint es keinem Zweifel unterworfen zu sein, dass bei chemischen Zersetzungen durch den galvanischen Strom für jeden Körper die zersetzte Masse desselben zu der darauf verwandten Stromquantität, d. h. zu der während der Zersetzung durch den Querschnitt der Kette gegangenen Elektricitätsmenge, in einem konstanten Verhältnisse stehe, wie auch der galvanische Strom hervorgebracht werde, und unter welchen Verhältnissen der zersetzte Körper sich befinden möge. Diesem wichtigen Gesetze ist noch das andere von Faraday gefundene eben so wichtige Resultat hinzuzufügen, dass chemisch aequivalente Massen verschiedener Körper zu ihrer Zersetzung gleiche Stromquantitäten, d. i. gleiche Elektricitätsmengen, gebrauchen. Z. B. sind 9 Gramm Wasser und 36,5 Gramm Salzsäure chemisch aequivalente Massen und brauchen nach Faraday gleiche Elektricitätsmengen zu ihrer Zersetzung in Sauerstoff- und Wasserstoffgas und in Chlor- und Wasserstoffgas. Wenn man hiernach von der Elektricität wie von einem Körper spricht, welcher sich mit anderen Körpern (mit den Bestandtheilen des zersetzten Körpers) nach ihren chemisch bestimmten aequivalenten Verhältnissen verbindet, und eine gewisse Quantität (positiver oder negativer) Elektricität als Maass annimmt, und die Massen anderer Körper bestimmt, die sich damit verbinden, so nennt Faraday die letzteren elektrochemischen Aequivalente, zur Unterscheidung von den chemischen Aequivalenten, denen sie proportional seien. Die chemischen und elektrochemische Aequivalente unterscheiden sich hiernach blos durch das verschiedene ihnen zum Grunde gelegte Maass, nämlich bei jenen die Masseneinheit des Sauerstoffes (oder Wasserstoffes), bei diesen die Masseneinheit der Elektricität. Faraday selbst hat zwar die Masse der Elektricität, die er hierbei als Einheit annehme, nicht näher bestimmt; wollte man dazu aber die Masse

nehmen, welche sich mit der Masseneinheit Sauerstoff (oder Wasserstoff) im Wasser zu Sauerstoffgas (oder Wasserstoffgas) verbindet, so würden die beiden Arten von aequivalenten Massen vollkommen identisch werden. Sollen daher elektrochemisch aequivalente Massen etwas anderes als chemisch aequivalente Massen bedeuten, so müssen sie nach einem anderen Grundmaasse der Elektricität gemessen werden, welches aus einer anderen Klasse elektrischer Wirkungen abgeleitet wird. Am nächsten bietet sich dazu die Klasse der magnetischen Wirkungen der Elektricität im galvanischen Strome dar, weil diese Wirkungen in der Lehre vom Magnetismus auf absolute Maasse zurückgeführt und genaue Messungsmethoden dafür ausgebildet worden sind.

Als absolutes Maass der Elektricität (der positiven oder negativen oder beider zusammen) wird hiernach diejenige Menge Elektricität genommen, die in der Zeiteinheit (Sekunde) durch den Querschnitt eines Leiters gehen muss, welcher in einer Ebene die Flächeneinheit begrenzt um in der Ferne identische Wirkungen mit dem absoluten Grundmaass des freien Magnetismus hervorzubringen.

Es wird nun von besonderem Interesse sein, mit Zugrundelegung dieses absoluten Maasses der Elektricität das elektrochemische Aequivalent irgend eines Körpers, z. B. das des Wassers zu bestimmen, woraus es dann leicht ist, nach dem von Faraday entdeckten Gesetze die elektrochemischen Aequivalente anderer Körper mit Hülfe ihrer chemisch bestimmten Aequivalente, denen sie proportional sind, abzuleiten. Die Bestimmung des elektrochemischen Aequivalentes des Wassers mit Zugrundelegung des oben festgesetzten Maasses der Elektricität soll nun den Gegenstand dieses Aufsatzes bilden.

Zu diesem Zwecke ist es also erforderlich, dass irgend eine messbare magnetische Wirkung des galvanischen Stroms beobachtet werde, während eine bestimmte Quantität Wasser zersetzt wird. Dazu ist aber weder die Wirkung des Stroms auf die Sinus-Boussole von Pouillet, noch auf die Tangenten-Boussole von Nervander brauchbar, weil diese Instrumente zwar richtige Vergleichungen der Stromintensitäten, aber keine absoluten Bestimmungen geben können. Das im vorigen Aufsatz[1]) beschriebene Instrument scheint daher allein dazu geeignet zu sein. In der That ist dies das einfachste und bequemste, wenn es sich nicht um feinere Messungen handelt, und selbst diese würden sich damit ausführen lassen, wenn das Instrument selbst auf die feinere oben[2]) angegebene Weise ausgeführt würde, dass nämlich der Kupferkreis sehr gross, die Nadel aber sehr klein und dabei doch, wie in einem Magneto-

[1]) [Wilhelm Weber's Werke, Bd. III, p. 8.]
[2]) [Ebendaselbst, p. 10.]

meter, an einem Faden aufgehangen und mit Spiegel versehen wäre, um mit Fernrohr und Skale beobachtet zu werden.

In Ermangelung der feineren Ausführung eines solchen Instruments habe ich ein auf anderen Principien beruhendes, zu anderen Zwecken bestimmtes Instrument benutzt, wovon hier kurz erwähnt werden möge, was zum vorliegenden Zwecke nöthig ist. Es wird dabei gar keine Magnetnadel zu Hülfe genommen, sondern blos der Leiter des galvanischen Stroms selbst benutzt.

Ein mit Seide übersponnener Kupferdraht von bekannter Länge wird auf einer cylindrischen Rolle von bestimmtem Durchmesser sorgfältig aufgewunden, so dass alle Windungen einem Systeme koncentrischer Kreise sehr nahe kommen und der Flächeninhalt dieser Kreise für die von jenem Drahte umwundene Fläche gesetzt werden kann, der aus der Länge des Drahts, dem Durchmesser der Rolle und der Zahl der Umwindungen leicht berechnet werden kann, und mit S bezeichnet werde.

Die beiden Enden des Drahts führen zu zwei von einander isolirten Metallhäkchen an der Rolle, an denen zwei andere nicht übersponnene feine Drähte angeknüpft sind, an denen die ganze Drahtrolle *bifilar* aufgehangen wird.

Die *bifilare* Aufhängung der Rolle an den beiden letzteren Drähten hat einen doppelten Zweck: *erstens* nämlich denselben wie beim Bifilar-Magnetometer, um eine bestimmte Direktionskraft D zu gewinnen, und darnach alle Kräfte, die auf die Rolle wirken und sie zu drehen suchen, zu bestimmen. Diese Direktionskraft kann zwar aus der Länge der Aufhängungsdrähte, ihrem Abstand und aus dem von ihnen getragenen Gewichte (insoweit nicht ihre eigene Elasticität etwa berücksichtigt werden muss) berechnet werden, doch findet man dieselbe genauer durch die in der *Intensitas* zur Bestimmung des Trägheitsmomentes vorgeschriebenen Versuche, auf die hier verwiesen werden kann.

Jene beiden Aufhängungsdrähte haben aber *zweitens* hier noch den besonderen Zweck, dass sie die Brücke bilden, durch welche der Strom sowohl von aussen zum Drahte, als auch wieder zurückgeführt wird, ohne dass dadurch die Beweglichkeit der Rolle im Geringsten beeinträchtigt wird, wie es der Fall ist, wenn man Metallspitzen gebraucht, die an der Rolle befestigt sind und in Quecksilbernäpfchen tauchen, wo die unvermeidliche Reibung keine Messungen gestattet.

Durch die bifilare Aufhängung wird erreicht, dass auch dann, wenn der Strom durch die Rolle hindurchgeht, der Stand und die Schwingungen derselben mit gleicher Freiheit wie der Stand und die Schwingungen des Bifilar-Magnetometers beobachtet werden können. Es ist daher gestattet, zu ihrer Beobachtung sich auch derselben feinen Hülfsmittel zu bedienen, nämlich einen Spiegel an der Rolle zu befestigen

und darin das Bild einer entfernten Skale mit einem Fernrohr zu beobachten. Auf diese Weise ist der Weg zu den feinsten galvanischen Messungen gebahnt, ohne Magnetnadeln zu Hülfe zu nehmen.

Es ist leicht, das Stativ, an welchem die Rolle aufgehängt ist, zuerst so zu stellen, dass die Rolle den nämlichen Stand behält, wenn ein Strom von beliebiger Stärke bald vorwärts, bald rückwärts durch die Rolle geleitet wird, und hernach das ganze System um eine vertikale Axe 90^0 zu drehen. Alsdann ist das Instrument zur Ausführung unserer Messung vorbereitet.

Die Messung besteht dann darin, dass der nämliche Strom, der im Wasserzersetzungsapparate das Wasser zersetzt, durch unser Instrument geleitet wird, wo dann die Kraft des horizontalen Theiles des Erdmagnetismus den Stand ändert und eine Ablenkung hervorbringt. Diese Ablenkung muss während der Dauer der Wasserzersetzung in kurzen Zwischenräumen genau beobachtet werden. Es leuchtet dann leicht ein, dass die absolute Intensität G des galvanischen Stroms für irgend einen Augenblick, wo die Ablenkung φ beobachtet wird, durch folgende Gleichung bestimmt sei:

$$STG = D \operatorname{tang} \varphi,$$

wo T die absolute horizontale Intensität des Erdmagnetismus am Beobachtungsorte bezeichnet. Ist also T bekannt und S und D, wie oben angegeben worden ist, genau bestimmt, so lässt sich die Intensität G aus der beobachteten Ablenkung φ berechnen, und aus allen ihren Werthen für den Zeitraum t, wo die Wasserzersetzung geschah, die Quantität E der durch die Rolle gegangenen und zur Wasserzersetzung verbrauchten Elektricität

$$E = \int G \mathrm{d}t$$

mit grosser Genauigkeit nach dem oben festgesetzten absoluten Maasse bestimmen. Dividirt man hiermit die in Milligrammen ausgedrückte Menge des zerlegten Wassers W, so giebt der Quotient W/E diejenige Menge Wasser, welche durch das festgesetzte absolute Maass der Elektricität zerlegt wird, d. i. das gesuchte elektrochemische Aequivalent des Wassers.

Nach dieser Auseinandersetzung der angewandten Messungsmethode lassen sich die Resultate der Messungen selbst kurz zusammen fassen.

Der auf der Rolle aufgewundene Draht bildete 1130 Umwindungen; die Peripherie der Rolle war 164 Millimeter; die Länge des Drahtes 253 600 Millimeter. Hieraus ergiebt sich S:

$$S = 4\,638\,330 \text{ Quadratmillimeter.}$$

Das Trägheitsmoment der Rolle K war nach bekannten Vorschriften gefunden worden:

$$K = 779\,400\,000.$$

Die Schwingungsdauer t, die sich etwas mit der Temperatur änderte, war

bei der ersten und zweiten Messung	$t = 8{,}0702''$	118 111 000,
bei der dritten „	$t = 8{,}0803''$	117 817 000,
bei der vierten und fünften „	$t = 8{,}0904''$	117 523 000,

woraus sich die in der letzten Kolumne angegebenen Werthe der Direktionskraft $\pi^2 K/t^2$ ergeben.

Die absolute horizontale Intensität T des Erdmagnetismus konnte zur Zeit dieser Versuche in Göttingen nach einer fast gleichzeitigen Messung im magnetischen Observatorium

$$T = 1{,}7833$$

angenommen werden; jedoch wurden diese Beobachtungen in keinem eisenfreien Lokale, sondern in einem Raume der Sternwarte gemacht, wo in mässigen Abständen sehr viel Eisen sich befand. Es wurde daher durch komparative Messungen die horizontale Intensität an diesem Beobachtungsorte mit der im magnetischen Observatorium verglichen, und es ergab sich daraus die absolute Intensität des Erdmagnetismus für die Stelle, wo die Versuche gemacht wurden:

$$T = 1{,}7026.$$

Endlich ergab die gleichzeitige Beobachtung des Wasserzersetzungsapparats und des Galvanometers in den fünf Messungen folgende Resultate:

	Zersetztes Wasser in Milligrammen	Zeitraum der Zersetzung	Elektricitätsmenge nach absolutem Maasse
1.	14,2346	1168″	1522,44
2.	14,2026	1280″	1504,92
3.	14,0872	1137,5″	1506,46
4.	14,0182	1154″	1501,43
5.	13,9625	1263″	1484,90

Es ergeben sich hieraus für das elektrochemische Aequivalent des Wassers folgende fünf Resultate:

	0,009 350	— 0,000 026
	0,009 437	+ 0,000 061
	0,009 351	— 0,000 025
	0,009 337	— 0,000 039
	0,009 403	+ 0,000 027
folglich im Mittel	0,009 376.	

Die Unterschiede der einzelnen Messungen von diesem Mittelwerthe sind in der letzten Kolumne bemerkt.

Es möge noch beigefügt werden, dass die Menge des zersetzten Wassers, wie gewöhnlich, aus dem Volumen der entwickelten Gase bestimmt wurde, und zwar wurden beide Gase aufgefangen und gemessen.

Um die Absorption der Gase durch das Wasser zu vermeiden, geschah die Aufsammlung der ersteren über einer Quecksilberwanne, welche Herr Professor Wöhler dazu zu leihen die Güte hatte. Das zu zersetzende Wasser bestand in wenigen Tropfen, welche mit Schwefelsäure vermischt das zugeschmolzene Ende einer *S*-förmig gekrümmten Röhre einnahm und den Dienst einer Retorte hierbei vertrat. Die atmosphärische Luft war gänzlich ausgeschlossen. Zur Durchleitung des galvanischen Stroms durch das Wasser dienten zwei Platindrähte, die in die Röhre eingeschmolzen waren und, ohne sich zu berühren, durch das Wasser gingen. Die Wasserzersetzung hatte schon längere Zeit vor dem Anfang der Messung begonnen. Das Gas wurde feucht gemessen. Die Wände der Röhre, in welcher es aufgefangen wurde, waren, vor der Füllung mit Quecksilber, mit destillirtem Wasser befeuchtet worden. Der Einfluss der Temperatur und des Barometerstands wurden ebenfalls gehörig berücksichtigt. Die Beobachtungen wurden sämmtlich gemeinschaftlich von Herrn Professor Ulrich und dem Unterzeichneten ausgeführt.

Was endlich das gewonnene Resultat selbst betrifft, so darf die Harmonie der fünf Messungen unter einander als eine neue Bestätigung des Faraday'schen Satzes betrachtet werden, dass zur Zersetzung derselben Menge Wasser immer gleiche Menge Elektricität gebraucht wird. Wenn es die Verhältnisse künftig gestatten, werden, um jene Bestätigung noch schlagender zu machen, diese Messungen unter noch mehr abgeänderten Verhältnissen wiederholt werden. Auch werden ähnliche Messungen bei anderen Körpern statt des Wassers, z. B. bei der Salzsäure ausgeführt werden.

Vergleicht man endlich das Resultat dieser Messungen mit denen des vorigen Aufsatzes[1]) über das Maximum der Stromintensität verschiedener Säulen, so erhält man, wie dort schon angeführt wurde, eine Kenntniss von der Geschwindigkeit der Wasserzersetzung, welche mit dem galvanischen Strome unter besonders günstigen Verhältnissen erreicht werden kann, wonach zu beurtheilen ist, ob der galvanische Strom zur Darstellung von Sauerstoff- und Wasserstoffgas mit Vortheil in praktische Anwendung gebracht werden könne. Dass das gewonnene Resultat endlich bei den mit Faraday's Volta-Elektrometer gemachten Versuchen eine nützliche Anwendung findet, um die absoluten Elektricitätsmengen dabei genauer zu bestimmen, und auf die magnetischen Wirkungen, welche dadurch hervorgebracht werden könnten, zu schliessen, bedarf keiner weiteren Auseinandersetzung.

W.

[1]) [Wilhelm Weber's Werke, Bd. III, p. 10.]

IV.

Messung starker galvanischer Ströme nach absolutem Maasse.

Von

Wilhelm Weber.

[Annalen der Physik und Chemie herausgegeben von J. C. Poggendorff, Bd. 55, Leipzig 1842, p. 27—32.]

Das Instrument, welches zu dieser Messung gebraucht werden soll, ist so eingerichtet, dass der Strom merklich derselbe bleibt, er mag zum Zweck der Messung durch das Instrument hindurch geleitet werden oder nicht. Dieser wichtige Punkt, die Stromstärke ungeschwächt zu messen, so wie sie in Anwendung kommen soll, wird dadurch erreicht, dass man den Widerstand, welchen der Strom im Instrumente erleidet, gegen den übrigen Widerstand der Ketten verschwinden lässt.

Das Instrument besteht daher, wie Fig. 1 (siehe S. 8) darstellt, aus einem einzigen starken Kupferringe, welcher in der Ebene des magnetischen Meridians aufgestellt wird, und in dessen Axe eine kleine Magnetnadel (deren Länge etwa nur den vierten Theil des Ringdurchmessers beträgt) sich befindet. Die Zuleitung und Ableitung des Stroms ist so eingerichtet, dass nur der Strom, welcher durch den Ring geht, auf die Nadel wirken kann, wie man leicht aus der Abbildung Fig. 1, 2, 3 und 4 (siehe S. 8) begreift.

Diese Einrichtung des Instruments bedarf keiner weiteren Erläuterung, da sie im Wesentlichen mit der Einrichtung einer *Tangenten-Boussole*, wie sie schon häufiger in Anwendung gekommen ist, übereinstimmt. Es soll daher nur näher gezeigt werden, wie man damit für die Stärke eines galvanischen Stroms eine Bestimmung nach *absolutem Maasse* erhalten könne, was leicht geschehen kann, wenn man die Gauss'sche Methode, den Magnetismus nach absolutem Maasse zu messen (siehe Ann., Bd. 28, S. 241, 591), als bekannt voraussetzt.

Wie das *Moment eines Magnets*, so kann auch das *Moment einer geschlossenen galvanischen Kette* aus der Ablenkung einer Magnetnadel vom magnetischen Meridian, die sie hervorbringt, nach *absolutem Maasse*

(wenn der Erdmagnetismus bekannt ist) gemessen werden. Es sind hier im Wesentlichen dieselben Regeln zu beobachten, wie dort, um ein sicheres und genaues Resultat zu erhalten.

Soll das *Moment eines Magnets* gemessen werden, so wird die Ablenkung einer Nadel bei zwei verschiedenen Entfernungen vom Magnet beobachtet. Es werde angenommen, dass der Magnet dabei immer in der Horizontalebene der Nadel und senkrecht gegen den magnetischen Meridian liege, dass seine Axe verlängert den Mittelpunkt der Nadel treffe, und dass in jeder Entfernung die Ablenkung 4 Mal beobachtet werde, indem der Magnet bald östlich, bald westlich von der Nadel aufgestellt wird und seinen Nordpol bald nach Osten, bald nach Westen kehrt. Die daraus für die Entfernungen R und R' gefundenen Mittelwerthe der Ablenkung seien v und v'. Man setze nun:

$$\operatorname{tang} v = \frac{L}{R^3} + \frac{L'}{R^5},$$

$$\operatorname{tang} v' = \frac{L}{R'^3} + \frac{L'}{R'^5},$$

was geschehen darf, wenn R und R' gegen die Länge des Magnets und der Nadel so gross sind, dass die Glieder der Reihe, welche die 7. oder höhere Potenz von R und R' enthalten, vernachlässigt werden dürfen. Durch Elimination von L' erhält man hieraus

$$L = \frac{R^5 \operatorname{tang} v - R'^5 \operatorname{tang} v'}{R^2 - R'^2},$$

wo v, v', R und R' durch Messung bekannt sind. Die Theorie hat bewiesen, dass zwischen dem so berechneten Werthe von L und dem gesuchten Moment M des Magnets folgende Relation Statt finde:

$$L = \frac{2M}{T} \text{ oder } M = \tfrac{1}{2} LT,$$

wo T die horizontale Intensität des Erdmagnetismus nach absolutem Maasse bezeichnet.

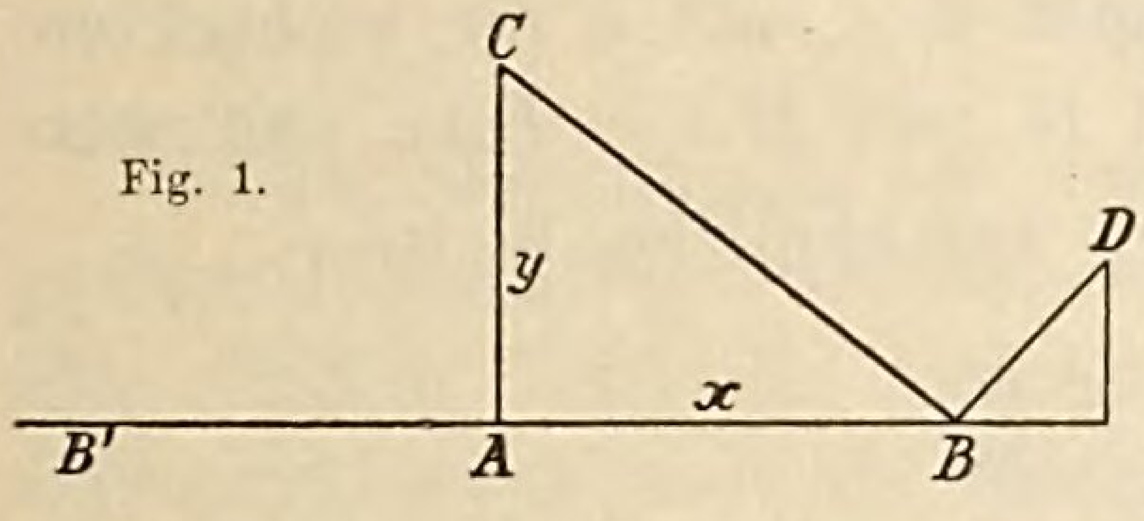
Diese als bekannt vorausgesetzte Methode, das *Moment eines Stabmagnets* nach absolutem Maasse zu messen, würde sich unmittelbar auf die Messung des *Moments einer geschlossenen galvanischen Kette* anwenden lassen, wenn diese ganze Kette keinen grösseren Raum als jener Magnet einnähme, und dabei aus gleicher Entfernung eine ebenso grosse Ablenkung der Nadel hervorbrächte. Da aber diese beiden Bedingungen nicht zugleich erfüllt werden können, so lässt man folgende Modifikation der Methode bei ihrer Anwendung auf galvanische Ketten eintreten.

Man leitet den galvanischen Strom durch einen grossen und starken kupfernen Ring in der Ebene des magnetischen Meridians. Die Zu-

leitung des Stroms zum Ring geschieht durch einen langen dicken kupfernen Stiel, die Ableitung durch eine kupferne Röhre, welche den Stiel umgiebt, ohne ihn zu berühren. Die Magnetnadel wird so aufgestellt, dass sie von allen Theilen des Rings gleich weit absteht; die Mitte der Nadel liegt in der Axe des Rings entweder im Mittelpunkt selbst oder nahe dabei, so dass der Strom fast ganz um die Nadel herumgeht.

Es sei Fig. 1 A der Mittelpunkt des Rings, AB die Axe desselben, $AC = y$ sein Halbmesser; die Intensität des Stroms heisse g. In der Axe in der Entfernung $AB = x$ vom Mittelpunkte sei ein nordmagnetisches Element μ. Geht der Strom g durch das Ringelement $y\,\mathrm{d}\varphi$ im Punkte C (von hinten nach vorn in der Figur), so wird μ von B nach D senkrecht gegen die durch B und durch das Element bei C gelegte Ebene bewegt. Die Grösse dieser bewegenden Kraft ist dem Produkte $g\mu y\,\mathrm{d}\varphi$ direkt und dem Quadrate $(x^2 + y^2)$ des Abstands CB umgekehrt proportional,[1]) oder kann durch

Fig. 1.



$$\frac{fg\mu y\,\mathrm{d}\varphi}{x^2 + y^2}$$

dargestellt werden, wo f einen konstanten Faktor bezeichnet. Zerlegt man diese Kraft BD nach der Richtung der Ringaxe durch Multiplikation jenes Werths mit $y/\sqrt{x^2 + y^2}$, wodurch man $fg\mu y^2\mathrm{d}\varphi/(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}$ erhält, so ergiebt sich als Resultante der Kraft, mit welcher alle Elemente $y\,\mathrm{d}\varphi$ des Kreisstroms das Theilchen μ nach der Richtung der Axe zu bewegen suchen,

$$= \frac{2\pi fg\mu y^2}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Die Kräfte senkrecht gegen die Richtung der Axe heben einander auf.

Vergleicht man diese Kraft mit derjenigen, welche ein unendlich kleiner *Magnet*, dessen Axe mit der Richtung AB zusammenfällt und dessen Moment M ist, aus der Entfernung $CB = \sqrt{x^2 + y^2}$ auf das in B befindliche Theilchen μ ausüben würde,

$$= \frac{2M\mu}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

(man sehe Gauss in den Resultaten des magnetischen Vereins für das Jahr 1840, S. 26ff., und den Aufsatz: Bemerkungen über die Wirkungen

[1]) Hierzu wäre noch der Sinus des Winkels, welchen CB mit der Richtung des Ringelements in C macht, als Faktor hinzuzufügen, der in unserm Falle = 1 ist, weil jener Winkel ein rechter ist.

eines Magnetes in die Ferne[1]), so erkennt man, dass beide Ausdrücke identisch werden, wenn

$$M = \pi f g y^2$$

gesetzt wird. Nennt man, der Analogie mit dem magnetischen Moment gemäss, $\pi f g y^2$ das *Moment des galvanischen Kreisstroms*, und bezeichnet dasselbe mit G, so lässt sich G durch Ablenkungsversuche nach absolutem Maasse ebenso wie M bestimmen. Man bezeichne mit u die beobachtete Ablenkung[2]) einer Magnetnadel in A, mit u' die beobachtete mittlere Ablenkung derselben in B und B' (wo $B'A = BA$), und setze $y = R$, $\sqrt{x^2 + y^2} = R'$, so ergiebt sich auf ähnliche Weise:

$$\operatorname{tang} u = \frac{L}{R^3} + \frac{L'}{R^5},$$

$$\operatorname{tang} u' = \frac{L}{R'^3} + \frac{L'}{R'^5},$$

folglich durch Elimination von L':

$$L = \frac{R^5 \operatorname{tang} u - R'^5 \operatorname{tang} u'}{R^2 - R'^2} = \frac{2G}{T},$$

oder

$$G = \frac{1}{2}\,\frac{R^5 \operatorname{tang} u - R'^5 \operatorname{tang} u'}{R^2 - R'^2} \cdot T = \pi f g R^2.$$

Hieraus findet man endlich die gesuchte *Intensität* g des Stroms, wenn man die Einheit festsetzt, welche ihrer Bestimmung zum Grunde gelegt werden soll. Nimmt man diejenige Stromintensität zur Einheit, *wobei der Strom, wenn er in der Ebene die Flächeneinheit umläuft, in der Ferne dieselbe Wirkung, wie die Einheit des freien Magnetismus ausübt*, so wird dadurch der unbestimmte Faktor f bestimmt, denn es ist dann gleichzeitig die Intensität $g = 1$, das Moment $G = 1$ und die Fläche $\pi R^2 = 1$, woraus sich der Werth von f ergiebt:

$$f = 1;$$

folglich

$$g = \frac{LT}{2\pi R^2},$$

worin L aus den gemessenen Grössen u, u', R, R' berechnet werden kann.

Diese Bestimmung der absoluten Intensität des galvanischen Stroms wird noch einfacher, wenn die Länge der Nadel als verschwindend gegen den Durchmesser des Kreises betrachtet werden darf, weil man

1) [Gauss' Werke, Bd. V, p. 427 und Wilhelm Weber's Werke, Bd. II, p. 242.]

2) Es wird hierbei vorausgesetzt, dass jede Ablenkungsbeobachtung wiederholt werde, nachdem der Strom im Ringe umgekehrt worden ist.

sich dann in der Reihenentwickelung für tang u auf das erste Glied beschränken kann,

$$\text{tang}\, u = \frac{L}{R^3} \quad \text{oder} \quad L = R^3 \,\text{tang}\, u.$$

Man braucht dann nur die Ablenkung u, wenn die Nadel im Mittelpunkt des Kreises sich befindet, zu messen und erhält dann

$$g = \frac{1}{2\pi} RT \,\text{tang}\, u.$$

Diese Näherungsformel kann auch bei feinen Messungen noch als genügend betrachtet werden, wenn die Länge der Nadel den vierten oder fünften Theil des Durchmessers nicht übersteigt, wie man sich überzeugt, wenn man die Beobachtungen, wie zuvor angegeben worden ist, vollständig ausführt und dann das Resultat dieser Näherungsformel mit dem Resultate der genaueren Rechnung vergleicht.

Die Genauigkeit des Resultats hängt endlich von der Genauigkeit ab, mit welcher die Ablenkung u gemessen wird. Wird bei dieser Messung der Fehler du begangen, so wird dadurch ein Fehler in der daraus berechneten Stromintensität verursacht, welcher in Theilen der ganzen Intensität $= 2\,du/\sin 2u$ ist. Dieser Fehler ist für $u = 45^0$ ein Minimum. Hieraus ergiebt sich für die Konstruktion des Instruments die Regel, dass der kupferne Ring die vortheilhafteste Grösse besitze, wenn der zu messende Strom eine Ablenkung von 45^0 hervorbringt, was nur bei starken Strömen der Fall ist.

V.

Elektrodynamische

Maassbestimmungen.

Von

Wilhelm Weber.

Ueber ein allgemeines Grundgesetz der elektrischen Wirkung.

[Abhandlungen bei Begründung der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften am Tage der zweihundertjährigen Geburtstagfeier LEIBNIZEN's herausgegeben von der Fürstl. Jablonowskischen Gesellschaft, Leipzig 1846, p. 211—378.]

Elektrodynamische

Maassbestimmungen.

Wilhelm Weber

[illegible]

[illegible]

Die elektrischen Flüssigkeiten, wenn sie in den ponderabeln Körpern *bewegt* werden, verursachen Wechselwirkungen der *Moleküle dieser ponderabeln Körper*, von welchen alle galvanischen und elektrodynamischen Erscheinungen herrühren. Diese von den *Bewegungen* der elektrischen Flüssigkeiten abhängenden Wechselwirkungen *ponderabler* Körper sind in *zwei* Klassen zu theilen, deren Unterscheidung für die genauere Erforschung der Gesetze wesentlich ist, nämlich: 1. in solche Wechselwirkungen, welche jene Moleküle auf einander ausüben, wenn ihr gegenseitiger Abstand unmessbar klein ist, und die man mit dem Namen der galvanischen oder elektrodynamischen *Molekularkräfte* bezeichnen kann, weil sie im Innern der Körper Statt finden, durch welche der galvanische Strom hindurch geht, und 2. in solche Wechselwirkungen, welche jene Moleküle auf einander ausüben, wenn ihr gegenseitiger Abstand messbar ist, und die man mit dem Namen der *aus der Ferne* (im umgekehrten Verhältnisse der Quadrate der Abstände) wirkenden galvanischen oder elektrodynamischen Kräfte bezeichnen kann. Diese letzteren Kräfte wirken auch zwischen den Molekülen, die zwei verschiedenen Körpern angehören, z. B. zwei Leitungsdrähten. Man sieht leicht ein, dass zur vollständigen Erforschung der Gesetze der *ersten* Klasse von Wechselwirkungen eine genauere Kenntniss der *Molekularverhältnisse* im Innern ponderabler Körper nöthig ist, als man gegenwärtig besitzt, und dass man ohnedem nicht hoffen könne, die Untersuchung dieser Klasse von Wechselwirkungen durch Aufstellung vollständiger und allgemeiner Gesetze zum völligen Abschluss zu bringen. Anders verhält es sich dagegen mit der *zweiten* Klasse von galvanischen oder elektrodynamischen Wechselwirkungen, deren Gesetze an den Kräften erforscht werden können, welche zwei ponderable Körper, durch welche die elektrischen Flüssigkeiten sich bewegen, bei *abgemessener gegenseitiger Lage und Entfernung* auf einander ausüben, ohne dass es dabei nothwendig wäre, die inneren *Molekularverhältnisse* dieser ponderabeln Körper als bekannt voraus zu setzen.

Von diesen beiden Klassen von Wechselwirkungen, welche von Galvani und Ampère entdeckt worden sind, muss vor der Hand noch eine *dritte* Klasse ganz geschieden werden, nämlich die von Oersted entdeckte, der *elektromagnetischen* Wechselwirkungen, welche zwischen den Molekülen zweier *ponderabler* Körper in messbaren Abständen von einander Statt finden, wenn in dem einen die elektrischen Flüssigkeiten bewegt, in dem anderen dagegen die magnetischen Flüssigkeiten ge-

schieden sind. Diese Unterscheidung der *elektromagnetischen* und *elektrodynamischen* Erscheinungen ist für die Aufstellung der Gesetze so lange nothwendig, als die von Ampère gegebene Vorstellung vom Wesen des Magnetismus die ältere und gewöhnlichere Vorstellung von der wirklichen Existenz magnetischer Flüssigkeiten nicht vollständig verdrängt hat. Ampère selbst drückt sich über den wesentlichen Unterschied, welcher zwischen diesen beiden Klassen von Wechselwirkungen zu machen sei, auf folgende Weise aus:

„Als Herr Oersted,“ sagt er S. 285 seiner Abhandlung[1]), „die Wirkung entdeckt hatte, welche der Leitungsdraht auf einen Magnet ausübt, konnte man in der That zu der Vermuthung sich bewogen finden, dass auch eine Wechselwirkung zweier Leitungsdrähte unter einander existiren möge; aber es war dies keine nothwendige Folge der Entdeckung jenes berühmten Physikers: denn ein weicher Eisenstab wirkt auch auf eine Magnetnadel, ohne dass jedoch irgend eine Wechselwirkung zwischen zwei weichen Eisenstäben Statt fände. Konnte man nicht, so lange man blos die Thatsache der Ablenkung der Magnetnadel durch den Leitungsdraht kannte, annehmen, dass der elektrische Strom diesem Leitungsdrahte blos die Eigenschaft ertheilte, von der Magnetnadel auf ähnliche Art influencirt zu werden, wie das weiche Eisen von selbiger Nadel, was dazu hinreichte, dass er auf sie wirkte, ohne dass dadurch irgend eine Wirkung zwischen zwei Leitungsdrähten, wenn sie dem Einflusse magnetischer Körper entzogen wären, resultirte? Blos die Erfahrung konnte die Frage entscheiden: ich machte sie im Monat September 1820, und die Wechselwirkung Voltaischer Leiter war bewiesen.“

Ampère führt diese Unterscheidung in seiner Abhandlung konsequent durch, indem er für nothwendig erklärt, dass die Gesetze der von ihm und von Oersted entdeckten Wechselwirkungen jede für sich besonders und vollständig aus der Erfahrung abgeleitet werden. Nachdem er von den Schwierigkeiten gesprochen, die Wechselwirkung der Leitungsdrähte genau zu beobachten, sagt er a. a. O. S. 183: „Es ist wahr, dass man auf keine solchen Hindernisse trifft, wenn man die Wirkung eines Leitungsdrahts auf einen Magnet misst; aber dieses Mittel lässt sich nicht anwenden, wenn es sich um Bestimmung der Kräfte handelt, welche zwei Voltaische Leiter auf einander ausüben. In der That leuchtet ein, dass, wenn die Wirkung eines Leitungsdrahtes auf einen Magnet von einer anderen Ursache herrührte, als der, welche bei zwei Leitungsdrähten Statt findet, die über die erstere gemachten Erfahrungen in Beziehung auf die letztere gar nichts beweisen würden.“

[1]) Mémoire sur la théorie mathématique des phénomènes électrodynamiques uniquement déduite de l'expérience. Mémoires de l'académie royale des sciences de l'institut de France. Année 1823.

Es leuchtet hieraus ein, dass, wenn auch in neuerer Zeit sehr viele schöne Untersuchungen in weiterer Verfolgung von Oersted's Entdeckung gemacht worden sind, doch hiermit noch nichts unmittelbar zur weiteren Verfolgung von Ampère's Entdeckung geschehen sei, und dass es hierzu eigener und besonderer Untersuchungen bedarf, an denen es bis jetzt noch sehr gemangelt hat.

Ampère's klassische Arbeit bezieht sich selbst nur zum kleineren Theile auf die Erscheinungen und Gesetze der Wechselwirkung der Leitungsdrähte unter einander, während der grössere Theil derselben der Entwickelung und Anwendung seiner darauf begründeten Vorstellung vom Magnetismus gewidmet ist. Auch hat er selbst durch seine Arbeit die Untersuchung der Erscheinungen und Gesetze der Wechselwirkung der Leitungsdrähte unter einander keineswegs als vollendet und abgeschlossen betrachtet, weder in experimenteller, noch in theoretischer Hinsicht, sondern hat auf dasjenige, was in beiden Beziehungen noch zu thun übrig bleibe, mehrfach aufmerksam gemacht.

Er giebt S. 181 der angeführten Abhandlung an, dass man auf zwei verschiedenen Wegen zu Werke gehen könne, um die Gesetze der Wechselwirkung der Leitungsdrähte unter einander *aus der Erfahrung* abzuleiten, von denen er nur den einen verfolgen könne, und giebt die Gründe an, die ihn abgehalten haben, auch den anderen Weg einzuschlagen, wovon der wesentlichste im Mangel genauer *Messinstrumente* besteht, die frei seien von unbestimmbaren fremdartigen Einflüssen.

„Es giebt", sagt er a. a. O. S. 182 f., „ausserdem noch einen weit entscheidenderen Grund, nämlich die grenzenlosen Schwierigkeiten der Versuche, wenn man sich z. B. vorsetzen wollte, diese Kräfte durch die Zahl der Schwingungen eines ihrem Einflusse unterworfenen Körpers zu *messen*. Diese Schwierigkeiten rühren daher, dass, wenn man einen festen Leiter auf einen beweglichen Theil der Voltaischen Kette wirken lässt, diejenigen Theile des Apparats, welche nothwendig sind, um ihn mit der Säule in Verbindung zu setzen, auf diesen beweglichen Theil zugleich mit dem festen Leiter wirken und so die Resultate der Versuche stören."

Eben so hat Ampère auch mehrfach darauf aufmerksam gemacht, was in *theoretischer* Hinsicht noch zu thun übrig bleibe. Z. B. sagt er, nachdem er gezeigt hat, dass es unmöglich sei, die Wechselwirkung der Leitungsdrähte unter einander aus einer bestimmten Vertheilung ruhender Elektricität in den Leitungsdrähten zu erklären, S. 299:

„Wenn man dagegen annimmt, dass die elektrischen Theilchen in den Leitungsdrähten, durch Einfluss der Säule in Bewegung gesetzt, fortwährend ihre Stelle wechseln, indem sie sich in jedem Augenblicke zu neutraler Flüssigkeit vereinigen, sich wieder trennen und sogleich wieder mit anderen Theilchen der Flüssigkeit der entgegengesetzten

Art vereinigen, so liegt *kein Widerspruch* darin, anzunehmen, dass aus den Wirkungen im umgekehrten Verhältnisse der Quadrate der Entfernungen, welche jedes Theilchen ausübt, eine Kraft zwischen zwei Elementen der Leitungsdrähte sich ergeben könne, welche nicht allein von ihrem Abstande abhänge, sondern auch von den Richtungen der beiden Elemente, nach welchen die elektrischen Theilchen sich bewegen, sich mit Molekülen der entgegengesetzten Art vereinigen und sich im folgenden Augenblicke trennen, um sich wieder mit anderen zu vereinigen. Gerade von diesem Abstande und von diesen Richtungen, und zwar ausschliesslich von denselben, hängt aber die Kraft ab, welche sich dann entwickelt und von der die in dieser Abhandlung auseinander gesetzten Versuche und Rechnungen mir den Werth gegeben haben."

„Wenn es *möglich* wäre," fährt Ampère S. 301 fort, „indem man von dieser Betrachtung ausginge, nachzuweisen, dass die Wechselwirkung zweier Elemente in der That der Formel proportional wäre, durch die ich sie dargestellt habe, so würde diese Erklärung des Fundamentalfaktums der ganzen Theorie der elektrodynamischen Erscheinungen offenbar jeder anderen vorgezogen werden müssen; sie würde aber Untersuchungen fordern, mit denen ich mich zu beschäftigen keine Zeit gehabt habe, eben so wenig, wie mit den noch schwierigeren Untersuchungen, denen man sich unterziehen müsste, um zu erkennen, ob die entgegengesetzte Erklärung, wonach man die elektrodynamischen Erscheinungen den von den elektrischen Strömen dem Aether mitgetheilten Bewegungen zuschreibt, zu der nämlichen Formel führen könne."

Weder Ampère hat nun aber diese Untersuchungen weiter fortgesetzt, noch sind bisher von Anderen darüber weitere Untersuchungen, weder von experimenteller, noch theoretischer Seite veröffentlicht worden, und die Wissenschaft hat auf diesem Gebiete seit Ampère stille gestanden, mit Ausnahme der durch Faraday's Entdeckung hinzugekommenen Induktionserscheinungen galvanischer Ströme in einem Leitungsdrahte, in dessen Nähe ein galvanischer Strom verstärkt, geschwächt, oder versetzt wird. Diese Vernachlässigung der Elektrodynamik seit Ampère ist nicht als Folge davon zu betrachten, dass man der von Ampère entdeckten Fundamentalerscheinung weniger Wichtigkeit, als den von Galvani und Oersted entdeckten, beigelegt hätte, sondern sie ist die Folge von der Scheu vor den grossen Schwierigkeiten der Versuche, welche mit den bisherigen Mitteln und Wegen sehr schwer auszuführen und keiner so mannigfaltigen und scharfen Bestimmungen fähig waren, wie die elektromagnetischen. Diese Schwierigkeiten für die Zukunft zu beseitigen, ist der Zweck der hier vorzulegenden Arbeit, in der ich mich hauptsächlich auf die Betrachtung der rein galvanischen und elektrodynamischen Wechselwirkungen *in die Ferne* beschränken werde.

Ampère hat seine mathematische Theorie der elektrodynamischen Erscheinungen in der Ueberschrift seiner Abhandlung als *einzig aus der Erfahrung abgeleitet* bezeichnet, und man findet in der Abhandlung selbst die sinnreiche einfache Methode ausführlich entwickelt, welche er zu diesem Zwecke angewandt hat. Man findet darin die von ihm gewählten Versuche und ihre Bedeutung für die Theorie ausführlich erörtert und die Instrumente zu ihrer Ausführung genau und vollständig beschrieben; doch fehlt es an einer genauen Beschreibung der Versuche selbst. Bei solchen Fundamentalversuchen genügt es aber nicht, den Zweck derselben anzugeben und die Instrumente zu beschreiben, womit sie gemacht werden, und im Allgemeinen blos die Versicherung beizufügen, dass sie von dem erwarteten Erfolge begleitet gewesen seien, sondern es ist auch nöthig, in das Detail der Versuche selbst genauer einzugehen und anzugeben, wie oft jeder Versuch wiederholt, welche Abänderungen gemacht worden, und welchen Einfluss letztere gehabt haben, kurz, protokollmässig alle Data mitzutheilen, welche zur Begründung eines Urtheils über den Grad der Sicherheit oder Gewissheit des Resultats beitragen. Solche nähere Angaben über die Versuche hat Ampère nicht mitgetheilt, und es mangeln dieselben auch jetzt noch zur Vervollständigung eines direkten thatsächlichen Beweises der elektrodynamischen Fundamentalgesetze. Die Thatsache der Wechselwirkung der Leitungsdrähte im Allgemeinen ist zwar durch häufig wiederholte Versuche ausser Zweifel gesetzt; aber nur mit solchen Mitteln und unter solchen Umständen, wo an keine *quantitativen* Bestimmungen gedacht werden konnte, geschweige, dass diese Bestimmungen eine Schärfe erreicht hätten, welche nothwendig ist, um das Gesetz jener Erscheinungen als erfahrungsmässig bewiesen zu betrachten.

Nun hat zwar Ampère häufiger von dem *Ausbleiben* elektrodynamischer Wirkungen, welches er beobachtet hatte, eine ähnliche Anwendung gemacht, wie von Messungen, die das Resultat = 0 ergeben hätten, und hat durch diesen Kunstgriff mit grossem Scharfsinne und vieler Geschicklichkeit die nothwendigsten Grunddata und Prüfungsmittel für seine theoretischen Kombinationen zu gewinnen gesucht, was in Ermangelung besserer Data nicht anders möglich war; solchen *negativen* Erfahrungen, wenn sie auch einstweilen die Stelle mangelnder *positiver* Messungsresultate vertreten müssen, kann aber keineswegs der ganze Werth und die volle Beweiskraft zugeschrieben werden, welche die letzteren besitzen, wenn sie nicht selbst mit solchen Hülfsmitteln und unter solchen Verhältnissen gewonnen worden sind, mit denen und unter welchen auch wahre Messungen sich ausführen lassen, was mit den von Ampère gebrauchten Instrumenten nicht möglich war.

Man betrachte z. B. den Versuch genauer, welchen Ampère als den

dritten Fall des Gleichgewichts S. 194 ff. seiner Abhandlung beschreibt, wo ein metallischer Kreisbogen auf zwei metallischen mit Quecksilber gefüllten Rinnen liegt, wovon die eine den galvanischen Strom zuführt, die andere ihn ableitet, und wo ausserdem noch dieser Kreisbogen durch ein Charnier an einen Hebel befestigt ist, der ihn mit einer vertikalen, zwischen Spitzen drehbaren Welle verbindet.[1] Ampère hat nun beobachtet, dass jener Kreisbogen, während ein galvanischer Strom durch ihn hindurchgeht, auf seinen Unterlagen nicht verschoben werde, wenn man einen geschlossenen Strom darauf wirken lasse, vorausgesetzt, dass der Mittelpunkt des Kreisbogens in die Axe der vertikalen Welle falle, an welche der Kreisbogen befestigt ist. Man sieht aber leicht ein, dass, um den Kreisbogen zu bewegen, eine 4fache Reibung überwunden werden müsse, nämlich die Reibung an den beiden Unterlagen, auf welchen der Kreisbogen Fig. 1 AA' bei B und B' aufliegt, und die Reibung in den beiden Spitzen G und H, in welchen die vertikale Welle sich dreht. Man weiss ferner, dass die mit den stärksten galvanischen Strömen, die man darstellen kann, hervorgebrachten elektrodynamischen Kräfte auf einen einfachen Draht, wie der durchströmte Theil des Bogens BB' ist,

[1]) Ampère giebt a. a. O. folgende Beschreibung seines Instruments: Auf einem Gestell TT' (Fig. 1) von der Form eines Tisches erheben sich zwei Säulen EF, EF', mit einander durch zwei Querstäbchen LL', FF' verbunden; eine Axe GH wird von diesen beiden Stäbchen in vertikaler Lage gehalten. Ihre beiden Enden G und H sind zugespitzt und greifen in konische Vertiefungen ein, deren eine in dem unteren Querstäbchen LL', die andere am Ende einer Schraube KZ sich befindet, welche durch das obere Querstäbchen FF' hindurchgeht und zur Feststellung der Axe GH dient, ohne dieselbe zu klemmen. Mit dieser Axe ist bei C ein Arm QO fest verbunden, dessen Ende mit einem Charnier versehen ist, in welches die Mitte eines Kreisbogens AA' eingreift, welcher, aus einem Metalldraht gebildet, stets in horizontaler Lage bleibt und dessen Halbmesser dem Abstande des Punktes O von der Axe GH gleich ist. Dieser Kreisbogen wird durch ein Gegengewicht Q balancirt, um die Reibung der Axe GH in den konischen Vertiefungen, in welche sie eingreift, zu vermindern.

Unter dem Kreisbogen AA' befinden sich zwei mit Quecksilber gefüllte Rinnen M, M', so dass die über den Rändern hervorragende Quecksilberfläche den Bogen AA' in B und B' eben berührt. Diese beiden Rinnen kommuniciren durch metallische Leiter MN, $M'N'$ mit den mit Quecksilber gefüllten Schälchen P, P'. Das Schälchen P und der Leiter MN, der es mit der Rinne M verbindet, sind an einer vertikalen Axe befestigt, welche so in dem Tische eingelassen ist, dass sie sich frei drehen kann. Durch das Schälchen P', womit der Leiter $M'N'$ verbunden ist, geht die nämliche Axe hindurch, um welche es sich unabhängig von dem anderen Schälchen drehen kann. Sie ist davon durch eine Glasröhre V isolirt, welche jene Axe umgiebt, und wird durch eine kleine Glasscheibe U von dem Leiter der Rinne M geschieden erhalten, so dass man mit den Leitern MN, $M'N'$ beliebige Winkel bilden kann.

Zwei andere Leiter JR, $J'R'$, am Tische befestigt, tauchen respektive in die Schälchen P, P' und verbinden dieselben mit den im Tische angebrachten und mit

so schwach sind, dass der Draht höchst beweglich sein müsse, um überhaupt eine wahrnehmbare Wirkung zu zeigen. Man würde hiernach zu erwarten geneigt sein, dass jener Kreisbogen sich zwar in dem Falle nicht verschiebe, wo sein Mittelpunkt in der Drehungsaxe liege, dass aber auch im entgegengesetzten Falle, wo sein Mittelpunkt mit der Drehungsaxe nicht zusammenfällt, keine Verschiebung eintreten werde, weil nämlich die eben erwähnte 4fache Reibung einen viel zu grossen Widerstand entgegensetze. AMPÈRE sagt nun jedoch a. a. O. S. 196: Lorsqu'au moyen de la charnière *O* on met l'arc dans une position telle

Quecksilber gefüllten Vertiefungen *R*, *R'*. Dazwischen endlich befindet sich noch eine dritte ebenfalls mit Quecksilber gefüllte Vertiefung *S*.

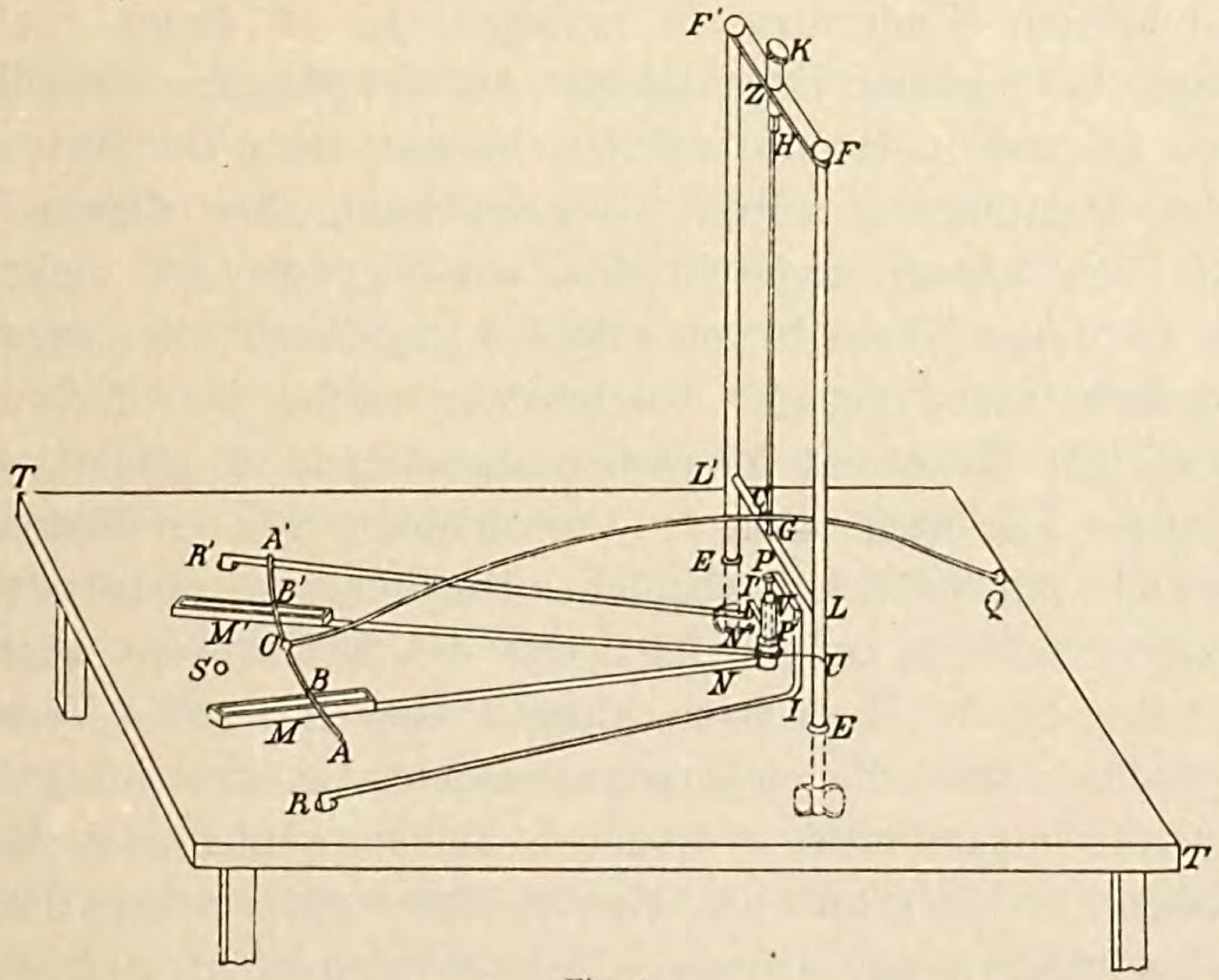


Fig. 1.

Die Art der Anwendung dieses Apparats ist folgende: Man taucht den einen Rheophor, z. B. den positiven, in die Vertiefung *R*, und den negativen in die Vertiefung *S* und verbindet letztere mit der Vertiefung *R'* durch einen beliebig gekrümmten Leiter. Der Strom geht durch den Leiter *RJ* zum Schälchen *P*, von da durch den Leiter *NM* zur Rinne *M*, durch den Leiter *M'N'* zum Schälchen *P'*, durch den Leiter *J'R'* und endlich von der Vertiefung *R'* durch den krummlinigen Leiter zur Vertiefung *S*, in welche der negative Rheophor taucht.

Hiernach wird der Voltaische Kreislauf gebildet: 1. vom Kreisbogen *BB'* nebst den Leitern *MN*, *M'N'*; 2. von einem Kreislaufe, welcher aus den Theilen *RJP*, *P'J'R'* des Apparats, aus dem krummlinigen Konduktor, welcher von *R'* nach *S* geht, und aus der Säule selbst besteht. Der letztere Kreislauf wirkt wie ein geschlossener, weil er blos durch die Dicke der Glasplatte unterbrochen ist, welche die beiden Schälchen *P* und *P'* isolirt: es reicht daher hin, seine Wirkung auf den Kreisbogen *BB'* zu beobachten, um die Wirkung eines geschlossenen Stroms auf einen Kreisbogen bei den verschiedenen Stellungen, die man ihnen gegen einander geben kann, erfahrungsmässig zu konstatiren.

que son centre soit hors de l'axe GH, cet arc prend un mouvement et glisse sur le mercure des augets M, M' en vertu de l'action du courant curviligne fermé qui va de R' en S. Si au contraire son centre est dans l'axe, il reste immobile. Man vermisst hierbei, dass Ampère das offenbare Hinderniss jener vierfachen Reibung nicht erwähnt und nicht einmal ausdrücklich sagt, dass er die Bewegung des excentrischen Kreisbogens selbst gesehen und beobachtet habe. Abgesehen aber von dem Zweifel, der hieraus gegen die wirkliche Beobachtung des Faktums etwa erhoben werden könnte, und vorausgesetzt, Ampère habe unter den beschriebenen Verhältnissen die Verschiebung des Kreisbogens selbst gesehen und sich auch versichert, dass dieselbe wirklich die Wirkung *elektrodynamischer* Kräfte gewesen, welche stark genug waren, um alle entgegenstehenden Hindernisse zu besiegen, so ist damit noch keineswegs gesagt, bei welcher Excentricität des Kreisbogens diese Bewegung eingetreten sei und innerhalb welcher *Grenzen* sie *nicht* Statt gefunden habe. Ohne Bestimmung solcher Grenzen kann aber diesem Versuche keine volle Beweiskraft zugeschrieben werden. Mir ist nicht bekannt geworden, ob dieser Versuch von anderen Physikern seit jener Zeit mit Erfolg wiederholt und genauer beschrieben worden sei, doch lässt sich so viel wohl mit Sicherheit übersehen, dass auch im günstigsten Falle nur bei grossen Excentricitäten die Verschiebung Statt gefunden, woraus sich aber nicht mit Sicherheit abnehmen lässt, dass die elektrodynamische Kraft genau senkrecht auf die Elemente des Kreisbogens wirke.

Ich habe durch diese Bemerkungen über Ampère's Versuche nur darthun wollen, dass die elektrodynamischen Gesetze in diesen ohne nähere Details mitgetheilten Versuchen keinen genügenden Beweis gefunden haben, und warum ich glaube, dass ein solcher Beweis auch durch Beobachtungen mit Ampère's Instrumenten nicht gegeben werden könne, sondern dass es dazu Beobachtungen mit genauen Messinstrumenten bedarf, an denen es bisher noch gebricht. Wenn man sich, trotz des Mangels eines direkten thatsächlichen Beweises, von der Richtigkeit der von Ampère aufgestellten Gesetze überzeugt hält, so beruht diese Ueberzeugung auf Gründen, die jenen direkten Beweis keineswegs überflüssig machen. Elektrodynamische Messungen bleiben daher schon darum wünschenswerth, um diesen mangelnden direkten Beweis zu liefern.

In der That erscheint es bei dem allgemeinen Bestreben, alle Naturerscheinungen nach Zahl und Maass zu bestimmen, und dadurch eine von der sinnlichen Anschauung oder blossen Schätzung unabhängige Grundlage für die Theorie zu gewinnen, wunderbar, dass in der Elektrodynamik gar kein Versuch dieser Art gemacht worden sei; mir ist aber weder von feinen, noch von groben Messungen der Wechselwirkung zweier Leitungsdrähte unter einander irgend etwas bekannt geworden.

Ich glaube um so mehr den ersten Versuch, den ich zu solchen Messungen gemacht habe, hier vorlegen zu dürfen. Dabei hoffe ich zu beweisen, dass diese elektrodynamischen Messungen noch in ganz anderen Beziehungen Wichtigkeit und Bedeutung besitzen, als zum Beweise der elektrodynamischen Fundamentalgesetze, dadurch nämlich, dass sie die Quelle zu ganz neuen Untersuchungen werden, zu denen sie allein nur geeignet sind und die ohnedem gar nicht ausgeführt werden könnten.

1.

Beschreibung eines Instruments zur Messung der Wechselwirkung zweier Leitungsdrähte.

Die Instrumente, deren sich Ampère zu seinen elektrodynamischen Versuchen bedient hat, sind nicht von der Art, dass den damit gemachten Versuchen die Beweiskraft scharfer Messungen zugeschrieben werden kann. Der Grund davon liegt in der *Reibung*, die oft die ganze oder einen grossen Theil der zu beobachtenden elektrodynamischen Kraft annullirt und der Beobachtung entzieht. Es lässt sich mit jenen Instrumenten selbst unter günstigen Verhältnissen nicht mehr erreichen, als jene feindliche Reibung durch die schwachen elektrodynamischen Kräfte eben zu besiegen, während bei jeder schärferen Messung muss vorausgesetzt werden können, dass die Reibung im Vergleiche mit der zu messenden Kraft ein unmerklicher Bruchtheil sei.

Schon vor zwölf Jahren habe ich zum Zweck der Ausschliessung der Reibung und der Ausführung wirklicher Messungen einen auf einem dünnen Holzrahmen aufgewundenen Draht, durch welchen ein galvanischer Strom geführt und welcher dann durch die elektrodynamische Anziehung und Abstossung eines Multiplikators in Bewegung gesetzt werden sollte, mit *bifilarer* Aufhängung an zwei feinen Metalldrähten versehen (ich werde diese bifilar aufgehangene Drahtspirale künftig die *Bifilarrolle* nennen) und habe den einen dieser Aufhängungsdrähte zur Zuleitung und den anderen zur Ableitung des galvanischen Stroms benutzt. Die ganze Bedeutung dieser Einrichtung zum Zweck der Messung habe ich aber erst später aus dem Bifilarmagnetometer von Gauss kennen gelernt, von dem ich sodann auch die Anwendung eines an der Bifilarrolle befestigten Spiegels entlehnt habe. Im Sommer 1837 habe ich darauf ein solches Instrument hergestellt und eine Reihe Versuche damit ausgeführt, die alle bewiesen, dass man die grösste Feinheit in der Beobachtung der elektrodynamischen Erscheinungen mit so schwachen Strömen erreichen könne, mit denen es vorher nie gelungen war, diese Erscheinungen hervorzubringen.

Das hier zunächst zu beschreibende Instrument ist von Herrn Inspektor Meyerstein in Göttingen im Jahre 1841 verfertigt, doch habe ich erst in Leipzig Gelegenheit gefunden, ihm eine für eine grössere Messungsreihe angemessene Aufstellung zu geben.

Es besteht dieses Instrument wesentlich aus zwei Theilen: aus der *Bifilarrolle* mit Spiegel und aus dem *Multiplikator.*

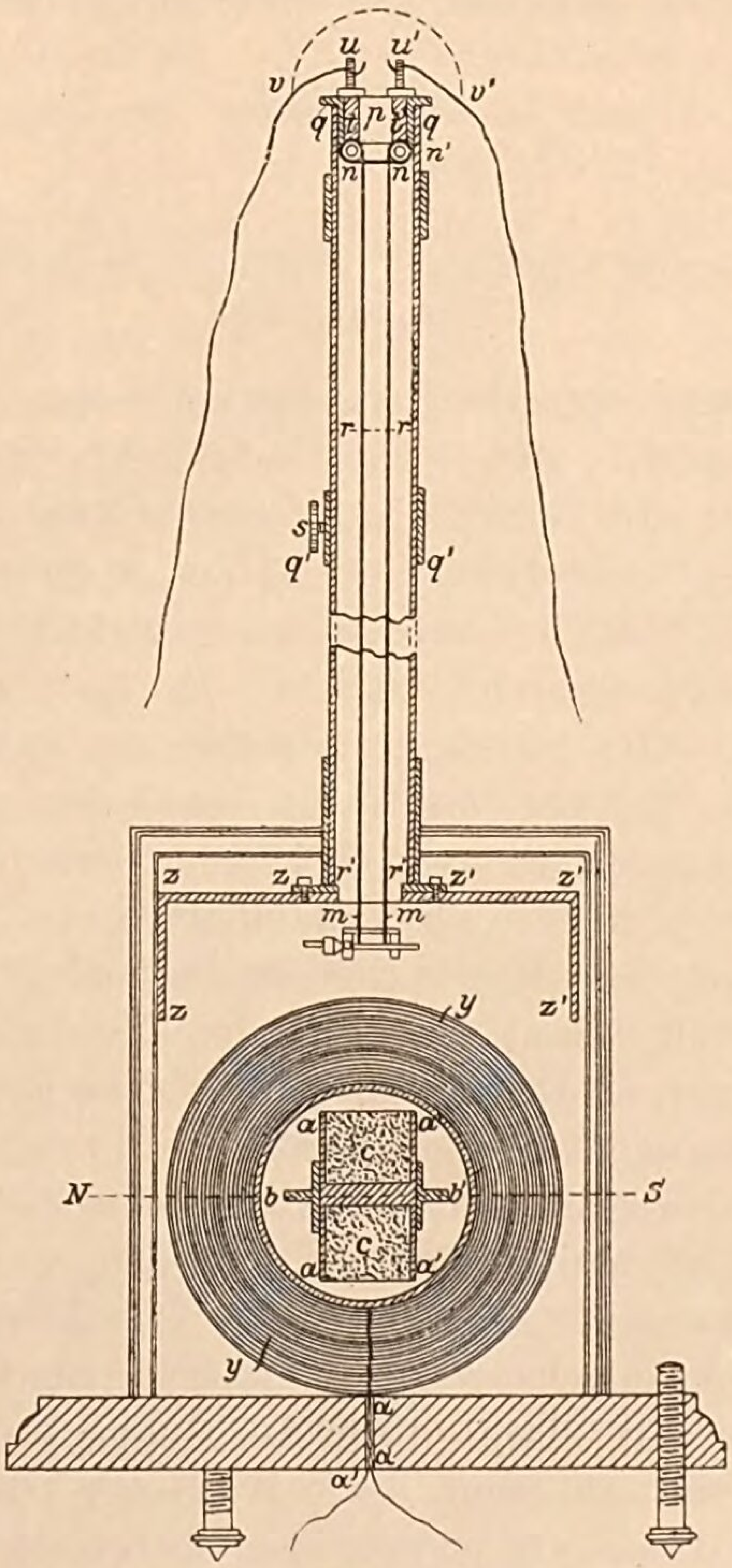


Fig. 2.

Die *Bifilarrolle*, welche Fig. 2 in vertikalem Durchschnitte dargestellt ist, besteht aus zwei dünnen Messingscheiben *aa* und *a'a'* von 66,8 Millimeter Durchmesser, welche von einer 3 Millimeter dicken messingenen Axe *bb'* in einem gegenseitigen Abstande von 30 Millimeter festgehalten werden. Auf jene Axe zwischen diesen Scheiben ist ein Kupferdraht *cc* von $\frac{1}{10}$ Millimeter Durchmesser, der mit Seide übersponnen ist, ungefähr 5000 Mal herumgewunden, und füllt den Zwischen-

raum zwischen beiden Scheiben ganz aus. Fig. 3 stellt die nämliche Rolle in vertikalem Durchschnitte senkrecht auf den vorigen dar. Das eine Drahtende ist dicht neben der messingenen Axe durch eine kleine mit Elfenbein gefütterte Oeffnung in der einen Scheibe bei *e* Fig. 3 nach aussen von *e* nach *e'* geführt; das andere Ende ist an der Peripherie des von den Drahtwindungen gebildeten Cylinders mit seidenen Fäden

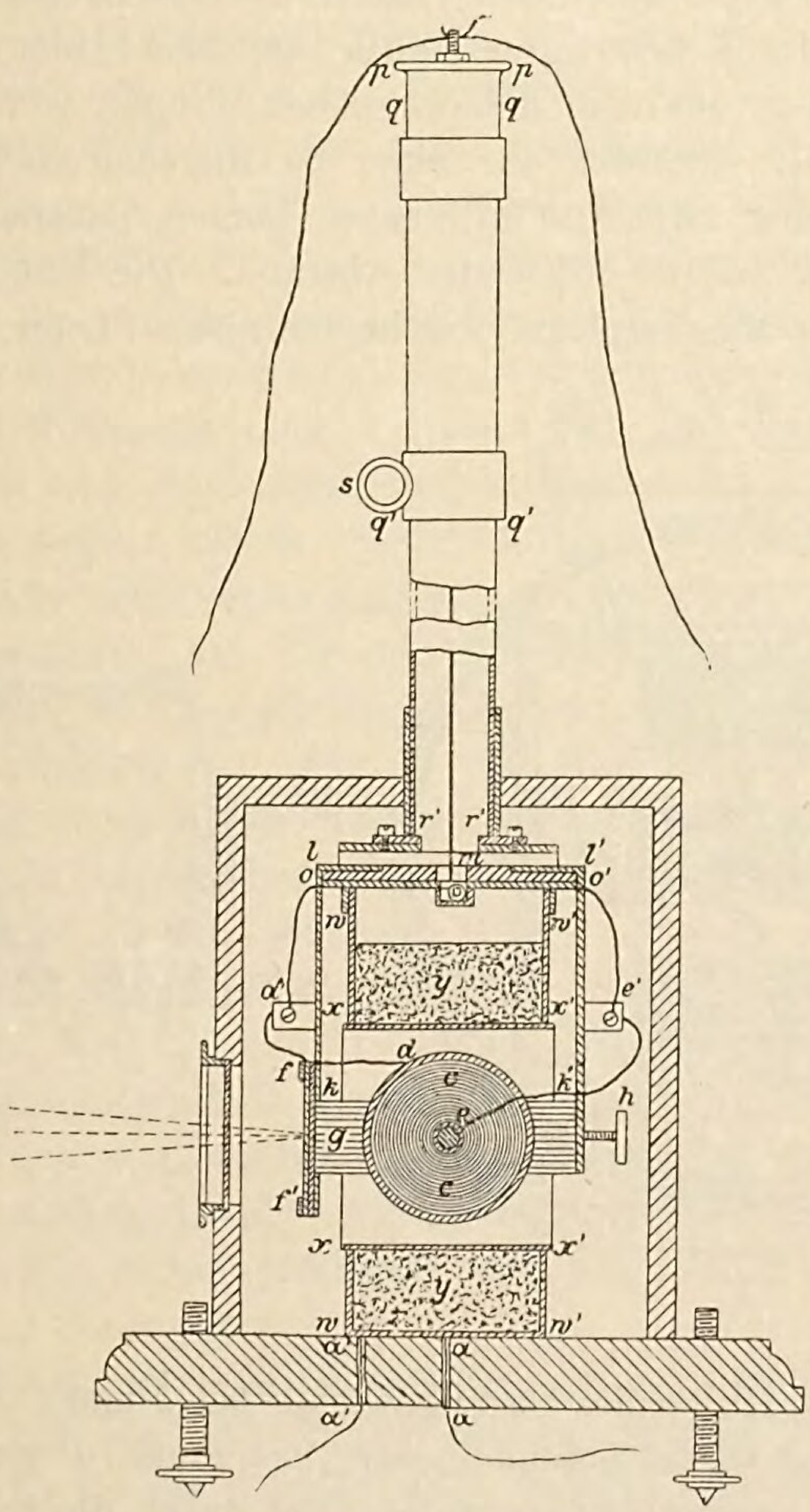


Fig. 3.

bei *d* festgebunden. An dieser Drahtrolle ist nun ein Planspiegel Fig. 3 *ff'* befestigt, welcher durch drei Schrauben auf einer kleinen Messingplatte festgehalten wird; die Messingplatte ist mit zwei rechtwinklichten Fortsätzen *g*, *g'* versehen, von denen in Fig. 3 nur die hintere *g* sichtbar ist. Fig. 4, welche den horizontalen Durchschnitt giebt, zeigt beide Fortsätze in Verbindung mit der den Spiegel *ff'* tragenden Messingplatte. Diese beiden Fortsätze sind an ihren Enden auf den Aussen-

seiten der beiden Messingscheiben *aa* und *a'a'* angeschraubt. Der Spiegel *ff'* befindet sich in einer der Axe *bb'* der Drahtrolle parallelen Ebene nahe an der Peripherie der Rolle; ihm diametral gegenüber ist ein Gegengewicht *h* angebracht. Ich gebrauche jetzt einen von Oertling in Berlin geschliffenen quadratischen Planspiegel von 40 Millimeter Seitenlänge.

Die *bifilare Suspension* dieser Drahtrolle besteht aus drei Theilen: aus dem an der Rolle befestigten Halter, aus den beiden Aufhängungsdrähten und endlich aus dem unbeweglichen Träger, woran die Drähte hängen. Der *Halter* besteht aus einer messingenen Gabel oder einem Bügel Fig. 3 *ll'* mit zwei 100 Millimeter langen parallelen vertikalen Armen *lk* und *l'k'* in 100 Millimeter Abstand. Die Enden der beiden Arme sind an der Messingplatte, welche den Spiegel trägt, und diametral

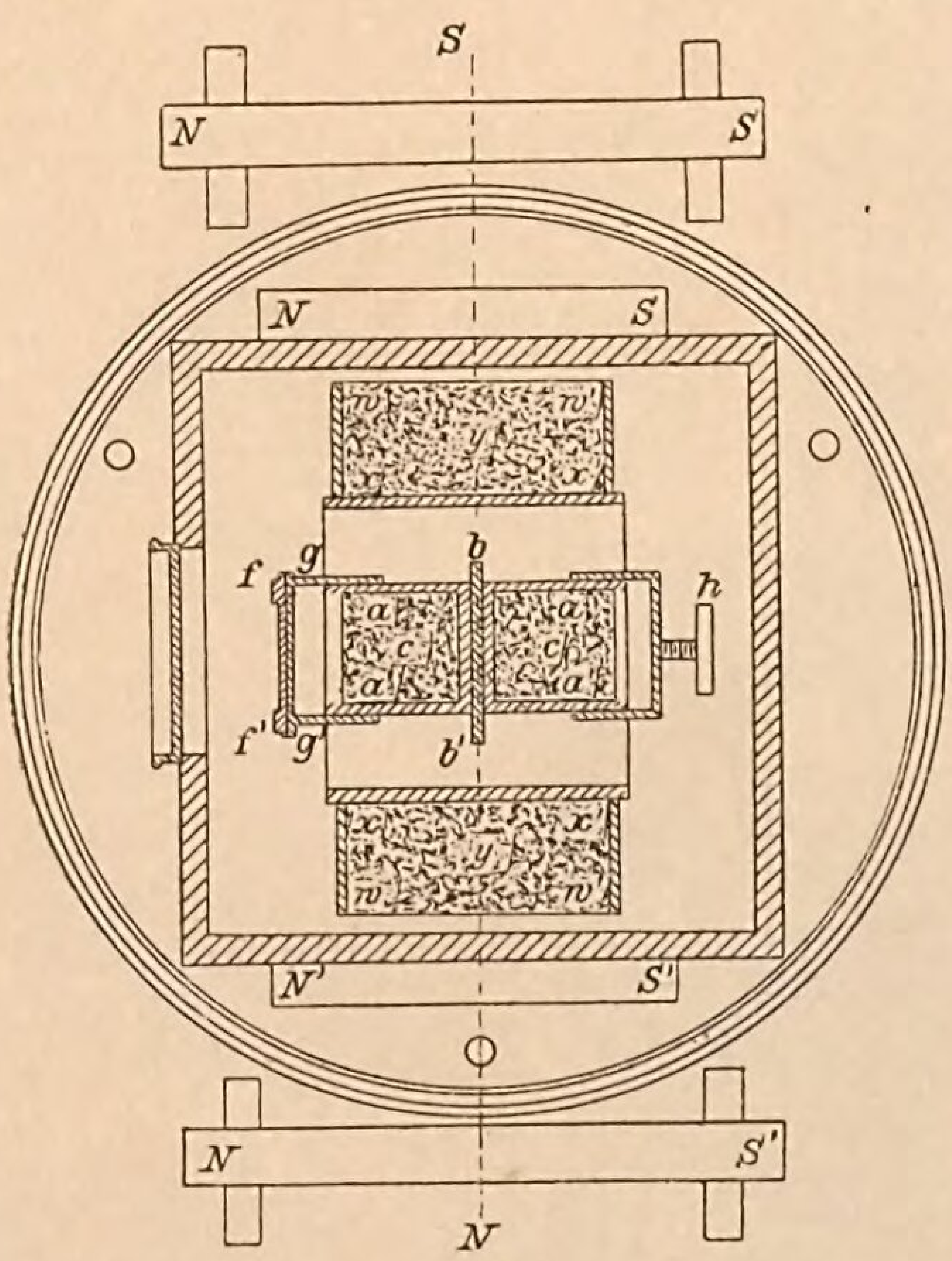


Fig. 4.

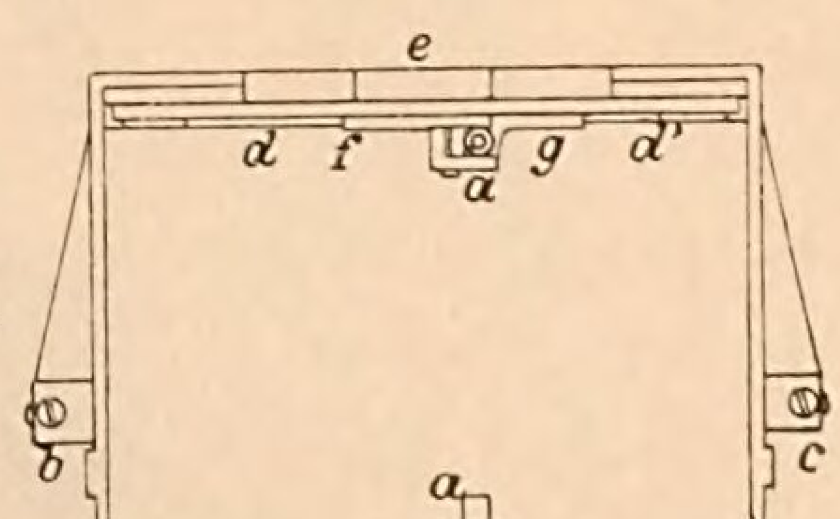


Fig. 5.

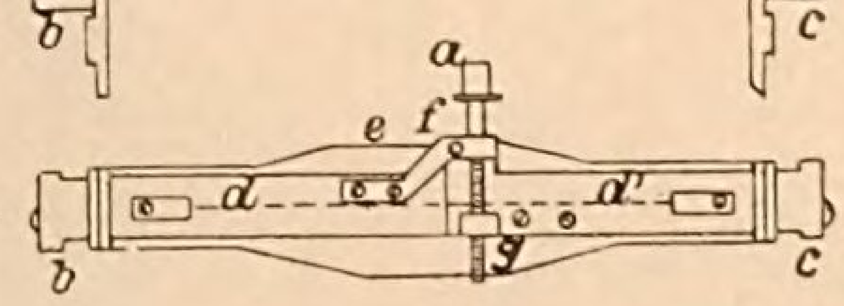


Fig. 6.

gegenüber an dem Halter des Gegengewichts bei *k* und *k'* festgeschraubt. Fig. 5 stellt diesen Halter besonders dar; bei *d* und *d'* gehen die beiden von *b* und *c* kommenden Drähte unter zwei durch die Schraube *a* stellbaren Elfenbeinplatten weg, und gehen durch zwei Kerben an den in der Mitte sich berührenden Elfenbeinplatten, durch die Oeffnung *e* senkrecht in die Höhe. Fig. 6 giebt die Ansicht des Halters von unten; bei *f* und *g* ist die Verbindung der Schraube *a* mit den beiden Elfenbeinplatten *d* und *d'* dargestellt. Die durch den Schwerpunkt der Rolle gehende Vertikale geht mitten zwischen beiden Kerben durch. An jedem Arme des Bügels befindet sich endlich bei *d'* und *e'* Fig. 3 eine durch Elfenbein isolirte Klemme zur Befestigung und Verbindung eines

von den beiden Enden des mit Seide umsponnenen Drahts der Rolle mit dem unteren Ende eines der beiden nicht umsponnenen Aufhängungsdrähte. Der Aufhängungsdraht wird von dieser Klemme d' oder e' durch eine kleine mit Elfenbein gefütterte Oeffnung o oder o' auf der unteren Seite des Bügels hin zu einer der beiden schon erwähnten Kerben an den in der Mitte zusammen stossenden Elfenbeinplatten geleitet, von wo derselbe aufwärts zu den Messingröllchen bei n und n' Fig. 2 geht. Die beiden Aufhängungsdrähte sind von Kupfer, 1 Meter lang und $\frac{1}{6}$ Millimeter dick; ihr durch die Schraube a Fig. 6 zu regulirender Abstand beträgt gewöhnlich etwa 3 bis 4 Millimeter.

Der *Träger*, an welchem die beiden oberen Enden der beiden Aufhängungsdrähte befestigt sind, besteht in einem starken Stück Elfenbein p (Fig. 2), welches wie ein Deckel auf das obere Ende einer 30 Millimeter weiten Messingröhre qq' fest aufgepasst ist. Diese Messingröhre ist 150 Millimeter lang und lässt sich auf einer zweiten Messingröhre rr' auf- und abschieben, drehen und durch eine Klemmschraube s (Fig. 3) feststellen. Diese beiden Röhren umgeben die beiden Aufhängungsdrähte ihrer ganzen Länge nach und schützen sie vor dem Einflusse der Luft. Auf der unteren Seite des Elfenbeinstücks sind zwei schiebbare und mit Klemmschrauben u, u' am Elfenbein befestigte messingene Röllchen t, t' (Fig. 2) von 10 Millimeter Durchmesser angebracht, über jedes dieser Röllchen ist ein Aufhängungsdraht geführt und endigt mit einem Oes. Die beiden Oese der beiden Drahtenden sind mit einem starken seidenen Faden zwischen t und t' zusammengebunden, ohne einander zu berühren. Durch diese beiden Röllchen und durch die Verbindung der beiden Drähte wird bewirkt, dass die beiden Aufhängungsdrähte stets gleiche Spannung haben. An jede der beiden Klemmen u, u', welche die beiden Röllchen an das Elfenbein befestigen, ist endlich ein übersponnener Kupferdraht befestigt, von denen der eine uv Fig. 2 zur Zuleitung, der andere $u'v'$ zur Ableitung des galvanischen Stroms dient.

Der *Multiplikator* endlich besteht aus zwei quadratischen Messingplatten ww und $w'w'$ (Fig. 3, 4) von 140 Millimeter Seite mit einem kreisrunden Loche von 76 Millimeter Durchmesser. Diese beiden Messingplatten stehen parallel und vertikal und werden durch eine messingene horizontale Röhre xx' von 76 Millimeter Durchmesser verbunden, durch welche sie in 70 Millimeter Abstand von einander erhalten werden. In dem Raume yy über dieser Röhre zwischen jenen beiden parallelen Platten ist der $\frac{7}{10}$ Millimeter dicke Multiplikatordraht ungefähr 3500 Mal aufgewunden. Die obere Seite des Multiplikators ist mit einem Messingdeckel $zzz'z'$ (Fig. 2) verschlossen, welcher darauf festgeschraubt ist und in der Mitte der oberen Seite eine kreisförmige Oeffnung hat, über

welcher die Messingröhre steht, von welcher die Aufhängungsdrähte umschlossen sind. An beiden Seiten dieses Deckels sind Ausschnitte angebracht, durch welche der Bügel der Bifilarrolle frei hindurch gehen und schwingen kann. Auch ist der Raum zwischen den obersten Windungen des Multiplikatordrahts und dem Deckel weit genug, dass jener Bügel hinreichenden Raum für seine Bewegungen findet. Der Bügel wird zuerst ohne die Bifilarrolle durchgesteckt und an den Aufhängungsdrähten befestigt und dann erst wird er an die Bifilarrolle angeschraubt. Die vorstehenden unteren Ränder der beiden Messingplatten am Multiplikator stehen auf einer hölzernen Platte auf, welche durch drei Schrauben nivellirt werden kann. In dieser hölzernen Platte sind zwei Löcher aa und $a'a'$ (Fig. 3), durch welche die beiden Enden des Multiplikatordrahts nach aussen geleitet werden. Das ganze Instrument, mit Ausnahme der Messingröhre, in welcher die Aufhängungsdrähte sich befinden, ist in einem Mahagonikästchen eingeschlossen, zum Schutz gegen den Einfluss der Luft. Dieses Mahagonikästchen kat keinen Boden, sondern wird mit den ebenen Rändern der Seitenwände auf die ebene Holzplatte gestellt, durch die es von unten verschlossen wird. Auf der oberen Seite ist eine runde Oeffnung angebracht, durch welche die schon erwähnte Messingröhre hindurchgeht. Eine zweite Oeffnung ist an der vorderen Seite des Kästchens angebracht und kann mit einem Planglase verschlossen werden. Durch sie fällt das Licht der Skale auf den Spiegel der *Bifilarrolle* und wird von dort nach dem Fernrohr zurück geworfen. Das ganze Kästcben ist vertikal in zwei Hälften getheilt, welche einzeln weggenommen werden können. Von der Aufstellung des Fernrohrs und der Skale gilt ganz dasselbe wie beim Magnetometer. Ich werde das hier beschriebene Instrument künftig mit dem Namen *Elektrodynamometer* oder kurz *Dynamometer* bezeichnen, weil seine nächste Bestimmung ist, die von Ampère entdeckten elektrodynamischen Kräfte zu messen.

2.

Die elektrodynamische Kraft zweier Theile einer Kette ist dem Quadrat der Stromintensität proportional.

Die *Intensität* eines konstanten Stroms ist durch die *Menge* Elektricität bestimmt, welche während des *Zeitmaasses* (während einer Sekunde) durch einen *Querschnitt* der Kette geht. Diese Bestimmung der Intensität des Stroms ist aber nicht geeignet, um darauf eine praktische Methode zur *Messung der Stromintensitäten* zu begründen; denn dazu wären zwei Messungen erforderlich, deren eine gar nicht, die andere nicht genau ausgeführt werden kann: eine bestimmte Elektricitätsmenge lässt sich nämlich unter den obwaltenden Verhältnissen nicht

genau, und die Zeit, in welcher sie durch den Querschnitt des Leitungsdrahts fliesst, gar nicht abmessen. Für die wirkliche Anwendung ist es daher nothwendig, eine andere Methode zur Messung der Stromintensitäten zu Hülfe zu nehmen. Eine solche dem Bedürfnisse ganz entsprechende Methode bietet sich in den *magnetischen Wirkungen* der Ströme dar und soll hier immer zum Grunde gelegt werden. Zwei Ströme, welche successive durch denselben Multiplikator geleitet auf den nämlichen unveränderlichen Magnet in gleicher Entfernung und Lage dieselbe Kraft ausüben, besitzen hiernach gleiche Intensität; üben sie verschiedene Kräfte aus, so verhalten sich ihre Intensitäten wie diese Kräfte, welche mit Hülfe der gewöhnlichen *Galvanometer* gemessen werden können.

Lässt man nun durch die nämliche Kette successive verschiedene Ströme gehen, deren Intensitäten dieser Messung gemäss sich verhalten wie 1 : 2 : 3 u. s. w., so sollen die elektrodynamischen Wechselwirkungen zweier Theile der Kette, durch welche diese verschiedenen Ströme gehen, sich der Reihe nach wie die Quadrate jener Intensitäten, d. h. wie 1 : 4 : 9 u. s. w., verhalten. Die Richtigkeit dieses Satzes soll nun durch die folgenden elektrodynamischen Messungen bewiesen werden, die auch dann noch, wenn obiger Satz keines Beweises bedürfte, einiges Interesse insofern haben würden, als sie ein erstes Beispiel von der Schärfe gäben, welche man bei elektrodynamischen Messungen überhaupt zu erreichen vermag.

Das im vorigen Artikel beschriebene *Dynamometer* wurde auf einer steinernen Fensterbank, in deren nächster Umgebung kein Eisen und kein Magnet sich befand, so aufgestellt, dass die Ebene der festen Rolle oder des Multiplikators dem magnetischen Meridian parallel, und die Ebene der Bifilarrolle ebenfalls vertikal war, aber einen rechten Winkel mit der Ebene des Multiplikators bildete. Die Stellung des Multiplikators liess sich leicht berichtigen, indem man mit hinreichender Schärfe die vertikale Stellung durch eine Dosenlibelle prüfen konnte, die auf den Deckel des Multiplikators gesetzt wurde, und darauf die Orientirung durch eine ebenfalls auf den Deckel des Multiplikators gestellte Boussole bewerkstelligte. Die Bifilarrolle stellte sich von selbst durch ihre Aufhängung vertikal ein, dass aber die Ebene der Bifilarrolle einen rechten Winkel mit dem magnetischen Meridian bildete, musste durch besondere Versuche geprüft werden.

Es ist nämlich ein Beweis von dem richtigen Stande der letzteren, wenn derselbe unverändert bleibt, auch wenn man einen beliebig starken positiven oder negativen Strom durch die Bifilarrolle allein gehen lässt, weil bei irgend einer merklichen Abweichung von jenem Stande der Erdmagnetismus diese Abweichung entweder vergrössern oder verkleinern

müsste. Es lässt sich auf diesem Wege auch die Grösse der Abweichung bestimmen. Eine solche Prüfung ergab nun, dass der westliche Radius der Bifilarrolle um 14 Minuten nach Norden zu drehen gewesen wäre, um die Ebene der Bifilarrolle genau senkrecht gegen den magnetischen Meridian zu stellen. Das Instrument bot keine geeigneten Mittel dar, diese kleine Korrektion mit Genauigkeit auszuführen, und abgesehen davon, dass eine so kleine Abweichung auf die Resultate nicht merklich einwirkt, würde die Beseitigung derselben von keinem bleibenden Nutzen gewesen sein, weil fortgesetzte Beobachtungen ergeben haben, dass die Aufhängung der Bifilarrolle am oberen Ende einer 1 Meter hohen frei stehenden Messingröhre keine Sicherheit gegen allmählig eintretende, auf einige Minuten steigende Drehungen der Bifilarrolle darbot. Nur die Aufhängung an einem isolirten festen steinernen Pfeiler würde vor solchen kleinen Abweichungen völlige Sicherheit gewähren können.

Der am westlichen Radius der Bifilarrolle befestigte Spiegel stand vertikal und in der Vertikalebene seiner horizontalen Normale war in ungefähr 6 Meter Entfernung ein mit Fadenkreuz versehenes Fernrohr aufgestellt. Eine Skale, wie sie zu den Magnetometern gebraucht wird, war an dem festen Stativ des Fernrohres eben so, wie bei Magnetometern angebracht. Die Messung ergab den Horizontalabstand des Spiegels von der Skale:

$$= 6018{,}6 \text{ Skalentheile},$$

woraus sich der Bogenwerth eines Skalentheils ergiebt:

$$= 17{,}136''.$$

Nach dieser Aufstellung des Dynamometers zur Messung der elektrodynamischen Wechselwirkung des Multiplikators und der Bifilarrolle, wenn durch dieselben ein galvanischer Strom geleitet wurde, bedurfte es nun noch zur vorliegenden Untersuchung einer *elektromagnetischen* Vorrichtung für die Intensitätsmessung des Stromes.

3.

Beschreibung einer elektromagnetischen Vorrichtung zur Intensitätsmessung galvanischer Ströme, welche durch das Dynamometer geleitet werden.

Die Intensitätsmessung der galvanischen Ströme, welche durch das Dynamometer geleitet wurden, hätte leicht durch eine zu feinen Messungen eingerichtete sogenannte Sinus- oder Tangenten-Boussole bewerkstelligt werden können, wenn dieselbe in grösserer Entfernung von dem Dynamometer aufgestellt, und derselbe Strom, der durch letzteres ging, auch durch den Multiplikator jener Boussole geleitet worden wäre. Diese Ableitung des galvanischen Stroms kann entbehrt werden, wenn man ein kleines (transportables) Magnetometer im magnetischen Meri-

dian des Dynamometers in solcher Entfernung von dem letzteren aufstellt, dass die feste Rolle des Dynamometers selbst eine noch auf feine Bruchtheile messbare Ablenkung des Magnetometers hervorbringt. Es wurde hierzu eine Entfernung von 583,5 Millimeter als angemessen ermittelt. Es leuchtet von selbst ein, dass bei einer so mässigen Entfernung die Anwendung eines grossen Magnetometers (mit 600 Millimeter langer Nadel) unangemessen gewesen wäre, da es im vorliegenden Falle von wesentlichem Nutzen war, die Vertheilung des Magnetismus im Magnetometer auf einen möglichst kleinen Raum zu beschränken. Dies findet bei dem kleinen oder transportabeln Magnetometer Statt, welches ich in den „Resultaten aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins im Jahre 1838“ beschrieben habe.

Ich habe jedoch dazu ein anderes Instrument eingerichtet, welches diesem Zwecke noch vollkommener entsprochen hat, und werde dasselbe hier beschreiben, weil es nicht allein oft mit Vortheil die Stelle des transportabeln Magnetometers ersetzen kann, sondern auch zu anderen Zwecken, insbesondere zu thermomagnetischen Messungen, ein oft genaueres Hülfsmittel, als die bisher angewendeten, darbietet. Es ist bekannt, welche Vortheile es gewährt, zu solchen Messungen statt der Boussole mit Zeiger und Gradbogen, eine mit Spiegel versehene Nadel mit Fernrohr und Skale zu gebrauchen. Nur findet die Anwendung des Spiegels bei kleinen Nadeln Bedenken, weil er eine träge Masse ist, welche von der Nadel mit fortgezogen werden muss, woraus folgt, dass, wenn eine kleine Nadel einen grösseren Spiegel mit fortziehen muss, die beschleunigende Kraft sehr geschwächt wird, was der Schärfe der damit zu machenden Messungen eben so nachtheilig ist, wie wenn man eine schwach magnetisirte Nadel gebrauchte. Dieser Nachtheil lässt sich aber von Grund aus heben, wenn man einen *magnetischen Spiegel* anwendet, und diesen Spiegel selbst als Magnetnadel an einem Kokonfaden aufhängt. Einen solchen Spiegel habe ich von Herrn Mechanikus Oertling in Berlin erhalten. Er besteht aus einer gehärteten runden Stahlplatte *ab* Fig. 7, 35 Millimeter im Durchmesser und 6 Millimeter dick. Diese Stahlplatte ist so vollkommen plan geschliffen, dass das Spiegelbild einer Skale durch ein Fernrohr von 10maliger Vergrösserung ganz hell und deutlich erscheint und nur wenig dem Bilde eines Glasspiegels nachgiebt. Am Rande dieser Kreisscheibe sind an zwei diametral gegenüber liegenden Punkten *a* und *b* kleine Schraubenmuttern eingeschnitten, in deren jede ein messingenes Häkchen eingeschraubt werden kann, an welchem der Spiegel mit einem Kokonfaden aufgehangen wird. Nur eines von diesen Häkchen wird wirklich gebraucht, aber bald das eine, bald das andere, je nachdem die Stahlplatte die spiegelnde Oberfläche nach Osten oder Westen kehren soll. Diese

gehärtete Stahlplatte habe ich nun magnetisirt, indem ich zwei 25pfündige Magnetstäbe in gerader Linie hinter einander legte, aber so, dass zwischen den einander zugekehrten Süd- und Nordpolen der beiden Stäbe ein dem Durchmesser des Spiegels gleicher Zwischenraum blieb. In diesen Zwischenraum wurde der Spiegel gelegt, so, dass derjenige Durchmesser des Spiegels, welcher gegen die die beiden Häkchen *a, b* verbindende Linie senkrecht war, die beiden Magnete verband. Bei der Stärke der Magnete und der Kleinheit des Spiegels reichte dies hin, um dem Spiegel das Maximum von Magnetismus mitzutheilen, was er zu tragen vermochte.

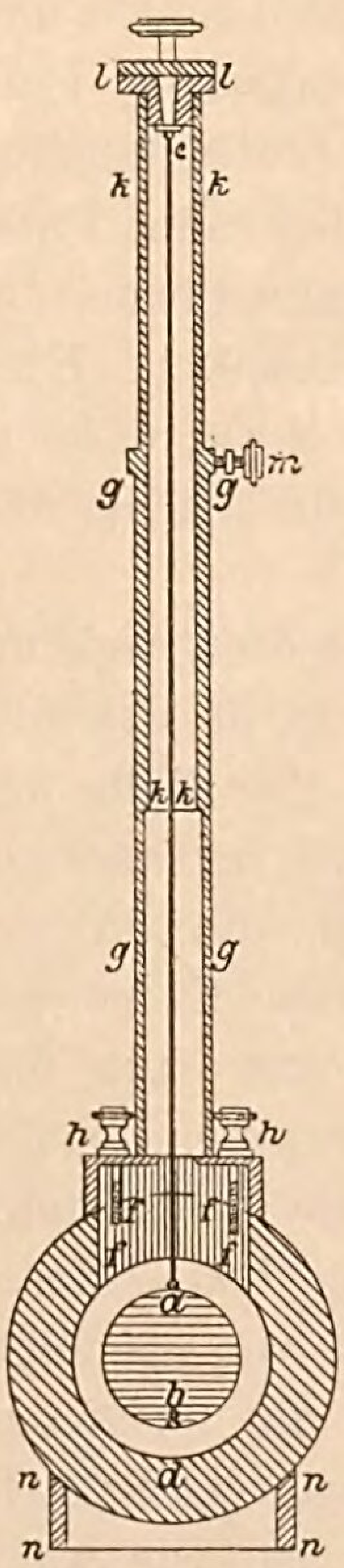


Fig. 7.

Dieser magnetische Spiegel wurde an einem Kokonfaden *ac* Fig. 7, aufgehangen und in Schwingung gesetzt. Der Schwingungsbogen nahm dabei nur sehr langsam ab, so, dass die Schwingungen noch nach $\frac{1}{4}$ Stunde beobachtet werden konnten, ohne dass er einen neuen Anstoss in der Zwischenzeit erhalten hätte. Seine Schwingungsdauer war aber zu klein, als dass man die Standbeobachtungen hierbei nach den für grössere Magnetometer gegebenen Regeln ausführen konnte, indem man Maximum und Minimum des Schwingungsbogens mehrmals hinter einander beobachtete. Zur genauen Beobachtung des mittleren Standes des Spiegels war es daher ein wesentliches Bedürfniss, die Schwingungen des Spiegels kräftig zu dämpfen und den Spiegel in möglichst kurzer Zeit in vollkommene Ruhe zu bringen, ohne dadurch auf den Stand selbst irgend einen Einfluss zu üben. Diesem wesentlichen Bedürfnisse beim Gebrauche eines solchen magnetischen Spiegels habe ich auf das vollkommenste dadurch Genüge geleistet, dass ich eine solide Kupferkugel *ddd* Fig. 8 von 90 Millimeter Durchmesser anfertigen liess. Von der einen Seite wurde in diese Kugel ein Loch *eeee* von 40 Millimeter Durchmesser, 70 Millimeter tief eingedreht, und dieses Loch konnte mit einem Planglase verschlossen werden. Dieses Loch war an seinem hinteren Ende für den magnetischen Spiegel etwas erweitert, und erweiterte sich auch nach aussen trichterförmig, um dem Lichte zum Spiegel mehr Zugang zu geben. In dem hinteren erweiterten Raume *eeee* schwebt der magnetische Spiegel, den man Fig. 8 *ns* im horizontalen rektangulären Durchschnitte sieht. Zu diesem erweiterten Raume führte

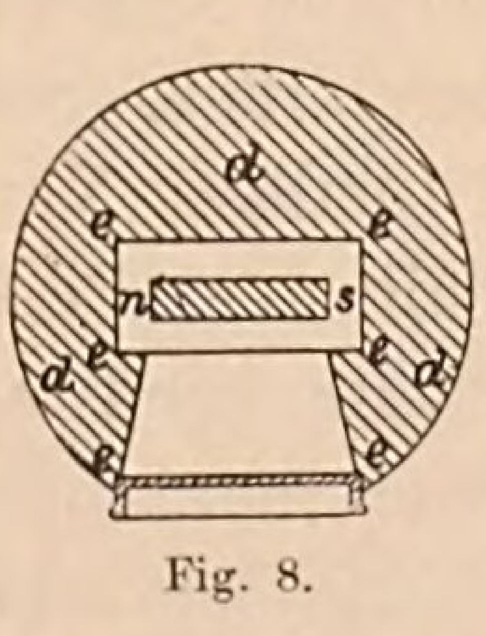


Fig. 8.

von oben herab eine 8 Millimeter breite, 40 Millimeter lange Spalte *ffff* Fig. 7, durch welche der an einem Kokonfaden aufgehangene Spiegel zur Mitte der Kugel herunter gelassen werden konnte. Der Kokonfaden war durch eine Messingröhre *gggg* geführt, deren unteres Ende mit Hülfe einer Messingplatte *hh*, welche die Mündung der Spalte *ff* an der Kugel bedeckte, auf der Kugel aufgeschraubt wurde. In dieser Messingröhre befand sich noch eine zweite Auszugsröhre *kkkk*, und letztere trug am oberen Ende einen drehbaren Torsionskreis *ll* mit einem Häkchen bei *c*, an welchem der Kokonfaden angeknüpft wurde. Durch die Auszugsröhre konnte der Faden gehoben werden, bis der Spiegel im Centro der Kupferkugel frei schwebte. Alsdann wurde die Auszugsröhre durch eine Druckschraube *m* festgestellt. Zur Aufstellung dieser Kupferkugel diente ein einfacher Messingring *nnnn* von 20 Millimeter Höhe, 70 Millimeter Durchmesser und 2 Millimeter Dicke, welcher auf das Postament gesetzt und in welchen die Kupferkugel hineingestellt wurde. Zur Nivellirung des Instruments wurde eine kleine Dosenlibelle auf den Torsionskreis gesetzt und darauf die Kupferkugel im Ringe so lange gedreht, bis die Libelle richtig einstand, was mit grosser Leichtigkeit und Genauigkeit sich ausführen liess. Durch ihr grosses Gewicht lag die Kupferkugel in dem Ringe so fest, dass nie eine Verrückung bemerkt worden ist.

Die Wirkung dieser starken Kupferkugel auf den schwingenden Spiegel besteht nun in einer *magnetoelektrischen* Dämpfung, vermöge welcher der vorhergehende Schwingungsbogen zum nachfolgenden wie 11 : 7 sich verhält (das *decrementum logarithmicum* war = 0,19 697), so, dass nach 16 Schwingungen oder etwa 1 Minute (die Schwingungsdauer betrug nämlich bei dieser Dämpfung 3,78 Sekunden) der Schwingungsbogen etwa nur $\frac{1}{1400}$ seiner ursprünglichen Grösse beträgt, also unmerklich geworden ist. Bei konstanten Strömen reicht es daher in der Regel hin, 1 Minute nach Eintritt des Stroms verlaufen zu lassen, ehe man den abgelenkten Stand des Spiegels beobachtet.

Sollen solche Ablenkungsversuche nicht blos einen relativen, sondern absoluten Werth erhalten, so darf nach der von Gauss in der *Intensitas vis magneticae terrestris ad mensuram absolutam revocata* gegebenen Vorschrift der ablenkende Magnet oder Strom höchstens auf einen Abstand genähert werden, welcher das 3- oder 4fache der Nadellänge beträgt, wofür in unserem Falle das 3- oder 4fache des Spiegeldurchmessers zu setzen ist, d. i. 105 bis 140 Millimeter, in welcher geringen Entfernung selbst sehr schwache Ströme eines Multiplikators hinreichen, um scharf messbare Ablenkungen des Spiegels hervorzubringen. Wenn nun schon 105 oder 140 Millimeter eine genügende Entfernung des Multiplikators sein würde, um den Messungen der Ablenkung einen ab-

soluten Werth zu geben, so findet dies noch weit mehr bei einer Entfernung von 583,5 Millimeter Statt, in welcher der Multiplikator vom Spiegel bei unseren Versuchen sich befand. Die gegenseitige Stellung der beiden Instrumente, des Dynamometers und des Spiegelmagnetometers, ist Fig. 9 dargestellt, wo die punktirte Linie *NS* der magnetische Meridian ist, welcher durch beide Instrumente geht; *A* ist der

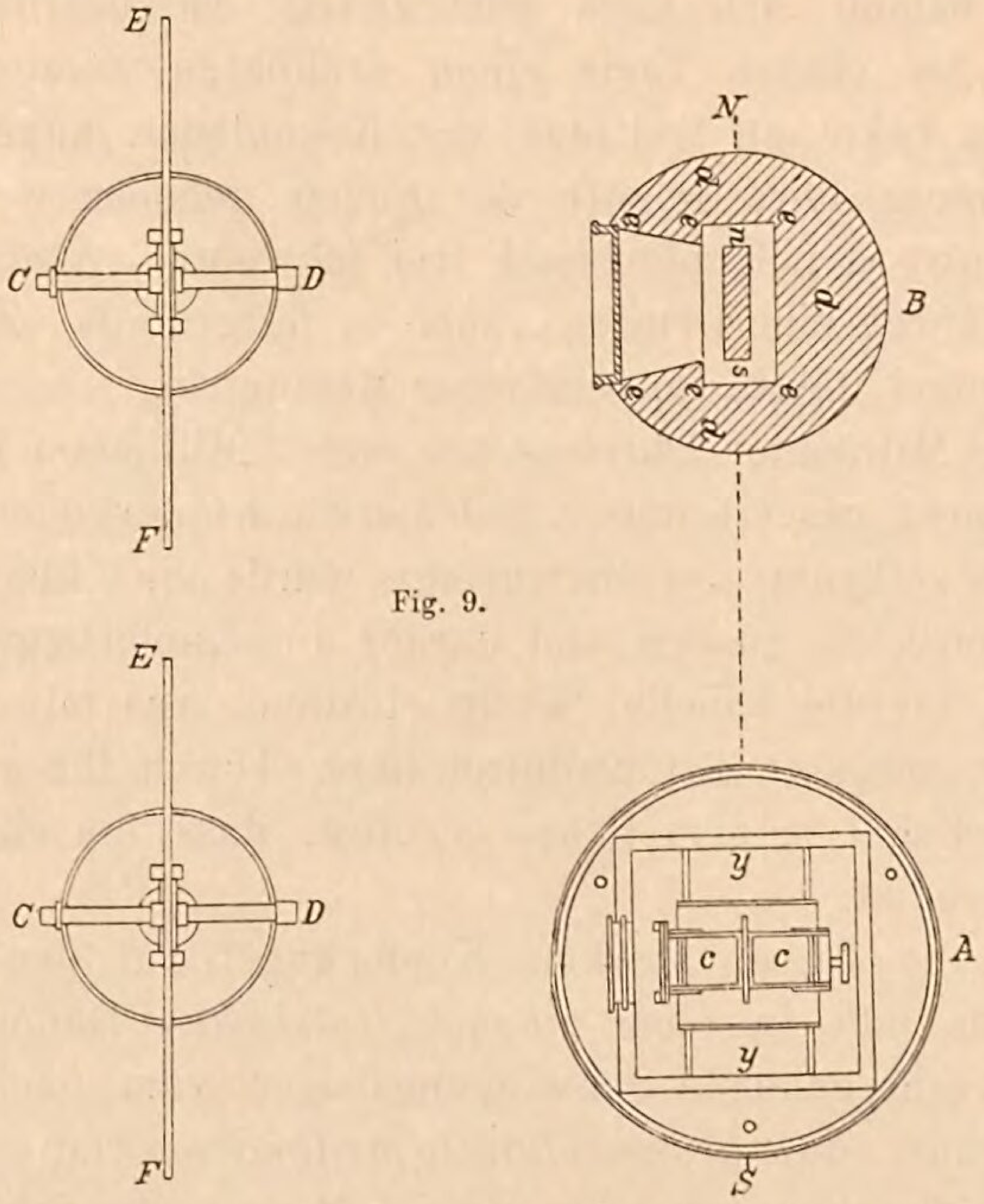


Fig. 9.

horizontale Durchschnitt des Dynamometers, gleichwie Fig. 4; *B* ist der horizontale Durchschnitt des Spiegelmagnetometers, ebenso wie Fig. 8, *CD* sind die auf die Spiegel beider Instrumente gerichteten Ablesungsfernröhre; *EF* sind die zugehörigen Skalen, deren Spiegelbild beobachtet wird. Ueber die Anwendung des Spiegelmagnetometers zu thermomagnetischen Beobachtungen, wozu noch einige besondere Vorrichtungen zu treffen sind, soll bei einer anderen Gelegenheit gehandelt werden.

4.

Nach dieser Beschreibung der wesentlichen Einrichtungen, welche zur *elektromagnetischen* Messung der Intensität der Ströme und zur *elektrodynamischen* Messung der Wechselwirkung zweier Theile der Kette getroffen waren, wollen wir, ehe wir zur Beschreibung der Versuche selbst übergehen, noch eine Bemerkung über die Hervorbringung und Regulirung der Ströme vorausschicken, welche dabei benutzt wurden.

Es wurden dazu benutzt drei kleine Grove'sche Becher von Herrn Mechanikus Kleinert in Berlin, die entweder alle drei, oder nur zwei

säulenartig verbunden, oder endlich einzeln in die Kette gebracht wurden. Trotzdem, dass diese Ströme durch eine sehr lange und dünne Drahtkette geleitet wurden, welche die Bifilarrolle und den Multiplikator des Dynamometers bildeten, die sogar noch durch einen langen Hülfsdraht vergrössert wurde, so blieben doch diese Ströme selbst bei der grossen Schwächung, welche sie durch den grossen Widerstand einer solchen Kette erlitten, viel zu stark und lenkten das Dynamometer von seiner Gleichgewichtslage viel zu weit ab, als dass diese Ablenkung mit der 1 Meter langen Skale hätte gemessen werden können. Dagegen war die Intensität dieser Ströme im Multiplikator ganz geeignet, um eine scharf messbare Ablenkung des Spiegelmagnetometers hervorzubringen. Es musste daher die Ablenkung der Bifilarrolle in einem konstanten Verhältnisse verkleinert werden, ohne die Intensität des Stroms im Multiplikator des Dynamometers zu vermindern. Es konnte dies auf doppelte Weise geschehen, entweder dadurch, dass die Aufhängungsdrähte der Bifilarrolle von einander mehr entfernt wurden, wodurch die Empfindlichkeit des Dynamometers in einem konstanten Verhältnisse vermindert worden wäre, oder es konnte durch eine Theilung des Stroms bewirkt werden, dass von dem ganzen Strome, welcher durch den Multiplikator des Dynamometers ging, nur ein kleiner Bruchtheil durch die Bifilarrolle geführt wurde. Ich habe der letzteren Methode den Vorzug gegeben, um dem Dynamometer seine Empfindlichkeit zu erhalten, welche für andere Versuche nothwendig war. Durch einen kurzen und dicken Kupferdraht, welcher vv' Fig. 2 punktirt angedeutet ist, wurde dem Strome, ehe er in die Bifilarrolle eintrat, ein Steg oder eine Brücke gebaut, auf welcher er ausserhalb der Bifilarrolle direkt zu dem aus der Bifilarrolle wieder zurückkehrenden Drahte geführt wurde. Eine genaue Vergleichung des Widerstands dieses Verbindungsdrahts mit dem der Bifilarrolle, hatte das Verhältniss

$$1:245{,}26$$

ergeben, woraus nach den Ohm'schen Gesetzen folgt, dass die Stromintensität in der Bifilarrolle nach dieser Theilung zu der Stromintensität im Multiplikator des Dynamometers in dem konstanten Verhältnisse von

$$1:246{,}26$$ [1])

stand, wodurch also, ohne die Ablenkung des Spiegelmagnetometers durch den Multiplikator des Dynamometers zu vermindern, die Ablenkung des Dynamometers selbst 246,26 Mal verkleinert wurde. Diese 246,26 Mal

[1]) Denn bezeichnet a die Intensität des ganzen ungetheilten Stroms, wie er durch den Multiplikator geht, b und c die Intensität der beiden Ströme, in welche jener sich theilt, von denen b durch die Bifilarrolle, c durch den Hülfsdraht vv' Fig. 2 geht, welcher Anfang und Ende der Bifilarrolle verknüpft; so ist $a = b + c$, und

verkleinerte Ablenkung des Dynamometers konnte dann an der Skale scharf gemessen werden, der Strom mochte von 3, 2 oder nur von 1 Grove'schen Becher ausgehen.

Es sind auf solche Weise nun die in folgender Tafel enthaltenen Messungen gemacht worden.

Tafel korrespondirender Stände des Spiegelmagnetometers und Dynamometers unter Einwirkung von Strömen von verschiedener Intensität.

No.	Zahl der Groveschen Becher	Beobachteter Stand des Magnetometers	Beobachteter Stand des Dynamometers
1.	3	388,17	650,88
2.	0	279,74	209,79
3.	3	388,30	650,66
4.	0	279,68	209,47
5.	3	388,37	650,07
6.	0	280,05	209,70
7.	3	388,73	649,84
8.	0	279,95	209,55
9.	3	388,35	649,78
10.	0	279,78	209,53
11.	3	388,30	649,71
Mittlere Ablenkung	3 — 0	108,566	440,508
12.	0	279,54	209,25
13.	2	352,15	407,52
14.	0	280,00	208,99
15.	2	352,35	407,35
16.	0	280,00	208,82
17.	2	352,50	407,18
18.	0	280,15	208,87
19.	2	352,60	407,15
20.	0	280,17	208,92
21.	2	352,95	406,89
22.	0	280,40	208,80
Mittlere Ablenkung	2 — 0	72,438	198,305
23.	0	280,40	208,80
24.	1	316,77	259,68
25.	0	280,50	208,72
26.	1	216,93	259,53
27.	0	280,60	208,68
28.	1	316,90	259,50
29.	0	280,50	208,45
30.	1	316,85	259,38
31.	0	280,60	208,43
32.	1	316,90	259,35
33.	0	280,55	208,33
Mittlere Ablenkung	1 — 0	36,332	50,915

dem Ohm'schen Gesetze gemäss verhalten sich die Intensitäten $b : c$ umgekehrt wie die gemessenen Widerstände, d. i.

$$b : c = 1 : 245{,}26;$$

folglich

$$b : a = b : b + c = 1 : 246{,}26.$$

Dieser Tafel sind folgende Erläuterungen beizufügen: 1. Während aller dieser Versuche sind die Leitungsverhältnisse immer die nämlichen geblieben, so dass die Verhältnisse der Stromintensitäten in allen Theilen der Kette immer die nämlichen waren. 2. Die korrespondirenden Beobachtungen am Magnetometer und Dynamometer sind immer von zwei verschiedenen Beobachtern an beiden Instrumenten gleichzeitig angestellt worden. Die Beobachter waren ausser mir Herr Dr. Stähelin aus Basel, und mein Assistent Herr Dietzel. 3. Jede einzelne in der Tafel verzeichnete Beobachtung des Dynamometers ist nicht eine einfache Ablesung, sondern es liegen jeder solchen Beobachtung 7 Ablesungen zum Grunde: es wurde nämlich bei der Statt findenden Schwingung abwechselnd der höchste und niedrigste Stand abgelesen und die 6 Mittel aus je zwei zunächst auf einander folgenden Ablesungen genommen; die aus zwei solchen zunächst auf einander folgenden Mitteln wiederum gezogenen 5 zweiten Mittel wurden als partielle Resultate betrachtet und der Mittelwerth von diesen 5 partiellen Resultaten in die Tafel eingetragen. 4. Zwischen je zwei Beobachtungen des abgelenkten Standes wurde die Kette gelöst, um den natürlichen Stand zu beobachten, wie derselbe ohne galvanische Einwirkung war, weil dieser Stand, wenn auch sehr langsam, sich doch merklich mit der Zeit änderte. Diese Lösung der Kette ist in der Kolumne, welche die Becherzahl angiebt, durch 0 angedeutet. 5. Die von 11 zu 11 Beobachtungen in der Tafel angegebenen Mittelwerthe der Ablenkung sind aus den 11 vorausgehenden Beobachtungen abgeleitet worden, indem die 10 Unterschiede aus je zwei auf einander folgenden Beobachtungen bei geschlossener und gelöster Kette, und aus je zwei solchen zunächst auf einander folgenden Unterschieden die 9 Mittel genommen wurden, von welchen, als partiellen Resultaten, das Generalmittel in der Tafel angegeben ist. 6. Was endlich das Magnetometer betrifft, so ist der horizontale Abstand des Spiegels von der Skale während der in dieser Tafel enthaltenen Versuche zu bemerken, weil er später häufig geändert werden musste: er betrug 1251 Skalentheile. 7. Die 11 Beobachtungen, aus denen die mittleren Ablenkungen des Magnetometers und Dynamometers berechnet worden sind, geben einen Beweis von der Genauigkeit der Messung; denn man sieht, dass die 5 oder 6 Wiederholungen der bei geschlossener und bei gelöster Kette gemachten Versuche, welche sie enthalten, immer bis auf einen Bruch eines Skalentheils übereinstimmen, wobei zu bemerken ist, dass auch diese kleinen Differenzen ihrem Hauptheile nach in wirklichen Veränderungen der Stromintensität, ferner beim Magnetometer in den während der Versuche eingetretenen Deklinationsvariationen, und in einer beim Dynamometer merklichen, nicht vollkommen festen und unveränderlichen Aufstellung ihren Grund hatten.

Die Resultate aller dieser Versuche lassen sich kurz in den zusammengehörigen Mittelwerthen der Ablenkung des Magnetometers und Dynamometers durch den Strom von 3, 2 und 1 GROVE'schen Becher übersehen, nämlich:

	Mittlere Ablenkung des Magnetometers	Mittlere Ablenkung des Dynamometers
für 3 Becher	108,566	440,508,
„ 2 „	72,438	198,305,
„ 1 „	36,332	50,915.

Diese Zahlen sind den katoptrischen Gesetzen gemäss den Tangenten der doppelten Ablenkungswinkel proportional und sollen auf die Tangenten der einfachen Ablenkungswinkel reducirt werden, welche das Maass der ablenkenden Kräfte geben, wobei noch ein kleiner Einfluss der Excentricität der Spiegel zu berücksichtigen ist. Die hieraus hervorgehenden Korrektionen sind:

0,14	0,47
0,04	0,05
0,00	0,00,

woraus, wenn man diese Korrektionen in Abrechnung bringt, nun folgende korrigirte Werthe sich ergeben, nämlich für die ablenkende Kraft

des Magnetometers	des Dynamometers
108,426	440,038
72,398	198,255
36,332	50,915.

Nach dem oben zum Grunde gelegten *elektromagnetischen* Intensitätsmaasse der Ströme sind nun die Zahlen der *ersten* Kolumne den *Stromintensitäten* proportional, während die Zahlen der *zweiten* Kolumne die korrespondirenden *elektrodynamischen Kräfte* geben, wonach also die Abhängigkeit der elektrodynamischen Kräfte von den Stromintensitäten sich bestimmen lässt, was der Hauptzweck dieser Versuche war. Ehe dieses geschieht, möge aber noch bemerkt werden, dass es scheinen könne, als müsse aus den Zahlen der ersten Kolumne noch ein geringer fremdartiger Einfluss entfernt werden, welcher nämlich von der Einwirkung der *Bifilarrolle* auf das Magnetometer herrühre. Jene Zahlen konnten nämlich nur dann als ein Maass der Stromintensität gelten, wenn das Magnetometer immer von dem nämlichen, unverrückt gebliebenen Theile der Kette abgelenkt wurde. Dieser Theil der Kette war der unverrückt stehen bleibende Multiplikator des Dynamometers. In der That befand sich dieser Multiplikator in einer solchen Lage gegen das Magnetometer, in welcher er die grösste ablenkende Kraft ausübte, während die im Multiplikator schwebende Bifilarrolle ursprüng-

lich in eine solche Lage gebracht war, wo sie, auch wenn ein starker Strom durch sie geleitet wurde, gar keine ablenkende Kraft ausüben konnte. Nun wurde aber bei obigen Versuchen die Bifilarrolle merklich abgelenkt oder gedreht und nach dieser Drehung musste sie eine ablenkende Kraft auf das Magnetometer ausüben, weshalb obige Zahlenwerthe einer Korrektion bedürften, um sie der alleinigen Einwirkung des Multiplikators entsprechend zu machen. Diese Korrektion ist aber nur sehr gering, weil die Intensität des durch die Bifilarrolle gehenden Stroms in Folge der oben erwähnten Theilung nur den 246,26. Theil von der Stromintensität im Multiplikator betrug. Ich habe mich versichert, dass diese Korrektion auch in dem Falle, wo sie am grössten war, noch unter $\frac{1}{500}$ Skalentheil blieb und daher vernachlässigt werden durfte.

Multiplicirt man nun die Quadratwurzeln aus den für die elektrodynamische Wechselwirkung beobachteten Werthen, nämlich: $\sqrt{440,038}$, $\sqrt{198,255}$, $\sqrt{50,915}$, mit dem konstanten Faktor

5,155 34,

so erhält man nahe die für die elektromagnetische Wirkung beobachteten Werthe, man erhält nämlich der Reihe nach:

108,144
72,589
36,786,

deren Vergleichung mit den beobachteten Werthen folgende Unterschiede giebt:

— 0,282
\+ 0,191
\+ 0,454.

Der grösste Unterschied, welcher zwischen diesen berechneten und den direkt beobachteten Werthen der elektromagnetischen Kraft vorkommt, beträgt also noch keinen halben Skalentheil, wodurch der der Rechnung zum Grunde gelegte Satz als bewiesen betrachtet werden darf, *dass die elektrodynamische Kraft zweier Theile einer Kette dem Quadrate der elektromagnetischen Kraft, mithin dem Quadrate der Stromintensität proportional sei.*

Zugleich leuchtet auch aus diesen Versuchen ein, dass die angewandte Methode elektrodynamischer Messung eine fast gleiche Schärfe und Genauigkeit gestattet, wie die Methode magnetischer Messungen mit dem Magnetometer.

5.

Beweis des elektrodynamischen Fundamentalgesetzes aus Messungen.

Nach diesen ersten Proben der mit dem beschriebenen elektrodynamischen Messinstrumente zu erreichenden Genauigkeit gehe ich sogleich zu einem System damit ausgeführter Messungen über, welches zu einer vollständigen Prüfung des elektrodynamischen Fundamentalgesetzes geeignet ist.

Ampère giebt in seiner früher genannten Abhandlung S. 181 f. zwei Methoden an, wie die Gesetze der Wechselwirkung zweier Leitungsdrähte aus der Erfahrung abgeleitet werden könnten. „Die eine Weise," sagt er, „besteht darin, zunächst mit der grössten Genauigkeit die Werthe der Wechselwirkung zweier Stücken von endlicher Grösse zu messen, indem man sie successive gegen einander in verschiedene Entfernungen und in verschiedene Lagen bringt; alsdann muss man eine Hypothese über den Werth der Wechselwirkung zweier unendlich kleiner Theile machen, daraus den Werth der Wirkung schliessen, der für die Konduktoren von endlicher Grösse, mit welchen man operirt hat, daraus hervorgehe, und die Hypothese so lange modificiren, bis die Resultate der Rechnung mit denen der Beobachtung übereinstimmen." „Die andere besteht darin, erfahrungsmässig festzustellen, dass ein beweglicher Leiter vollkommen im Gleichgewicht bleibe zwischen gleichen Kräften oder gleichen Drehungsmomenten, wenn diese Kräfte oder diese Momente von Theilen fester Leiter herrühren, deren Gestalt und Grösse auf irgend eine Weise verändert werden können, unter Bedingungen, welche die Erfahrung bestimmt, ohne dass das Gleichgewicht gestört werde, und daraus direkt durch Rechnung zu schliessen, welches der Werth der Wechselwirkung zweier unendlich kleiner Theile sein müsse, damit das Gleichgewicht wirklich unabhängig von allen Aenderungen der Form oder der Grösse sei, welche mit jenen Bedingungen verträglich sind."

Ampère hat der letzteren Methode den Vorzug gegeben aus Gründen, unter denen der einzige schon genügt, dass er nämlich die nach der ersteren Methode unentbehrlichen Messinstrumente nicht besass. Allerdings musste unter solchen Verhältnissen die zweite Methode vorgezogen werden, welche die Ausführung wirklicher Messungen nicht nothwendig erforderte. Doch scheint die letztere Methode von Ampère überschätzt zu werden, indem er meint, dass ihr ein absoluter Vorzug vor der ersteren zukomme. Ein Instrument zu genauen Messungen setzt zweierlei voraus: 1. eine grosse Feinheit und Empfindlichkeit, welche die zu messenden Wirkungen deutlich und unabhängig von fremden, nicht zu kontrolirenden Einflüssen erkennen lässt; 2. eine für diese Wirkungen

geeignete Messungsvorrichtung. Es leuchtet aber ein, dass die letzte Forderung sich stets leicht erfüllen lässt, wenn nur der ersteren Genüge geschehen ist, wonach also die erstere als die Hauptforderung betrachtet werden muss. Die Erfüllung dieser Hauptforderung ist aber für die zweite Methode eben so wesentlich wie für die erste, weil sie ohnedem ganz illusorisch sein würde. Der wesentliche Unterschied dieser Methoden in experimenteller Beziehung besteht also blos darin, dass man nach jener Methode den elektrodynamischen Kräften durch andere bekannte und messbare Naturkräfte das Gleichgewicht hält, während man nach der zweiten Methode solche Verhältnisse sucht, wo die elektrodynamischen Kräfte sich wechselseitig unter einander das Gleichgewicht halten. Es kann kein Zweifel sein, dass die letztere Methode, wenn sie zu sicheren und genauen Resultaten führen soll, in *experimenteller* Beziehung weniger direkt und weniger einfach ist, als die erstere. Es kann daher zum Vortheil der zweiten Methode höchstens der Umstand geltend gemacht werden, dass in *theoretischer* Beziehung aus den nach dieser Methode gewonnenen Resultaten die Fundamentalgesetze leichter und direkter abgeleitet werden können, was aber nicht mehr in Betracht kommt, wenn die zu prüfenden Fundamentalgesetze schon vollständig vorliegen, wie dies durch Ampère's Verdienst im vorliegenden Falle Statt findet. Wir werden hierdurch in den Stand gesetzt, ein sehr einfaches System von Messungen auszuführen, welches den Forderungen Genüge leistet.

Die beiden Leitungsdrähte, welche wechselseitig auf einander wirken, sollen Kreise bilden oder Systeme paralleler Kreise, welche eine gemeinschaftliche Axe haben und *Leitungsrollen* heissen. Diese beiden Axen sollen eine horizontale und gegen einander rechtwinkelige Lage haben, und zwar so, dass die Verlängerung der einen Axe durch den Mittelpunkt der anderen Rolle geht. Die eine dieser Rollen wird fixirt, die andere ist um ihren vertikalen Durchmesser drehbar. Nun kann entweder die Axe der fixirten Rolle verlängert durch den Mittelpunkt der beweglichen Rolle gehen, oder umgekehrt kann die Axe der beweglichen Rolle verlängert durch den Mittelpunkt der festen Rolle gehen. In beiden Fällen kann man Messungen bei verschiedenen Entfernungen der Mittelpunkte von einander machen. Man ersieht leicht, dass diese beiden Arten der Anordnung der elektrodynamischen Messungen ganz denen der magnetischen Messungen entsprechen, welche Gauss in der *Intensitas vis magneticae terrestris ad mensuram absolutam revocata* (Commentationes Soc. regiae Scient. Gottingensis recentiores. Vol. VIII, pag. 33 [1]) gegeben hat. Wir können für die elektrodynamischen Wechsel-

[1]) [Gauss' Werke, Bd. V, p. 107.]

wirkungen noch eine dritte Anordnung der Messungen hinzufügen, wo die Mittelpunkte der beiden Rollen zusammenfallen, wie dies bei dem oben beschriebenen Dynamometer Statt findet. Auf alle diese Fälle lässt sich das AMPÈRE'sche Fundamentalgesetz anwenden und die Resultate daraus berechnen, um die Resultate der Beobachtung damit zu vergleichen.

Wenn die feste Rolle auf die bewegliche aus der Entfernung wirkt, so können die beiden Rollen nach Belieben gleiche oder ungleiche Durchmesser haben; wenn aber die Mittelpunkte beider Rollen zusammenfallen sollen, wie es bei dem oben beschriebenen Messinstrumente der Fall war, so muss der innere Durchmesser der einen, ringförmigen, Rolle grösser sein, als der äussere der anderen, damit die erstere die letztere umschliessen kann. Bei dem oben beschriebenen Dynamometer war die bewegliche Rolle die kleinere und wurde von der festen umschlossen. Sollen endlich die drei eben angedeuteten Versuchsreihen ausgeführt werden, indem man blos die feste Rolle successive an verschiedene Stellen versetzt, ohne dass die Aufhängung der beweglichen Rolle geändert werde, was zum Zweck der genaueren Vergleichung aller Messungsresultate unter einander vortheilhaft ist, so muss die bewegliche Rolle grösser sein, damit sie die feste Rolle umschliessen könne, weil nur dann die letztere, der Aufhängungsdrähte unbeschadet, durch die bewegliche Rolle hindurch geführt werden kann. Dies ist der Grund, warum für dieses System von Messungen ein besonderer Messapparat von Herrn Mechanikus LEYSER in Leipzig vorgerichtet wurde, welcher hier beschrieben werden soll.

Die *Bifilarrolle aaa* Fig. 10 besteht aus einem dünnen Messingringe von $100\frac{1}{2}$ Millimeter Durchmesser und 30 Millimeter Höhe, welcher zwei parallele Messingscheiben von $122\frac{7}{10}$ Millimeter äusserem und $100\frac{1}{2}$ Millimeter innerem Durchmesser verbindet und in 30 Millimeter Abstand von einander hält. Auf jenen Messingring zwischen diesen beiden Scheiben ist ein Kupferdraht von $\frac{1}{3}$ Millimeter Durchmesser, der mit Seide übersponnen ist, ungefähr 3000 Mal herumgewunden, so dass er den Zwischenraum zwischen beiden Scheiben ganz ausfüllt. Nach Aufwindung des Drahts wurden die beiden Messingscheiben durch eine feste messingene Klammer *bb* verbunden, welche die aufgewundenen Drähte umschliesst und in ihrer Mitte den Torsionskreis *cc* trägt. Der Torsionskreis besteht aus zwei (bei vertikaler Stellung der Bifilarrolle) horizontalen Scheiben, von denen die untere durch die messingene Klammer mit der Bifilarrolle fest verbunden ist, die obere sich auf der unteren um eine vertikale Axe drehen lässt. Erstere ist mit einer Kreistheilung, letztere mit einem Index versehen. Die letztere trägt einen hölzernen Zapfen *d*, welcher am oberen Ende die Gabel *ee* einer sehr beweglichen

Rolle von 20 Millimeter Durchmesser hält. Unter dieser Rolle ist ein seidener Faden *ff* weggeführt, welcher zu beiden Seiten der Rolle senkrecht nach oben geht, und auf beiden Seiten, einige Millimeter über der Rolle, an den beiden Suspensionsdrähten *fg*, *fg* angeknüpft ist. Zu diesen Anknüpfungspunkten *f*, *f* sind auch die beiden Enden des um die Bifilarrolle gewundenen Drahtes *hf*, *hf* geleitet, so, dass der galvanische Strom durch den einen Suspensionsdraht zum einen Ende der Bifilarrolle, und durch das andere Ende aus der Bifilarrolle in den zweiten Suspen-

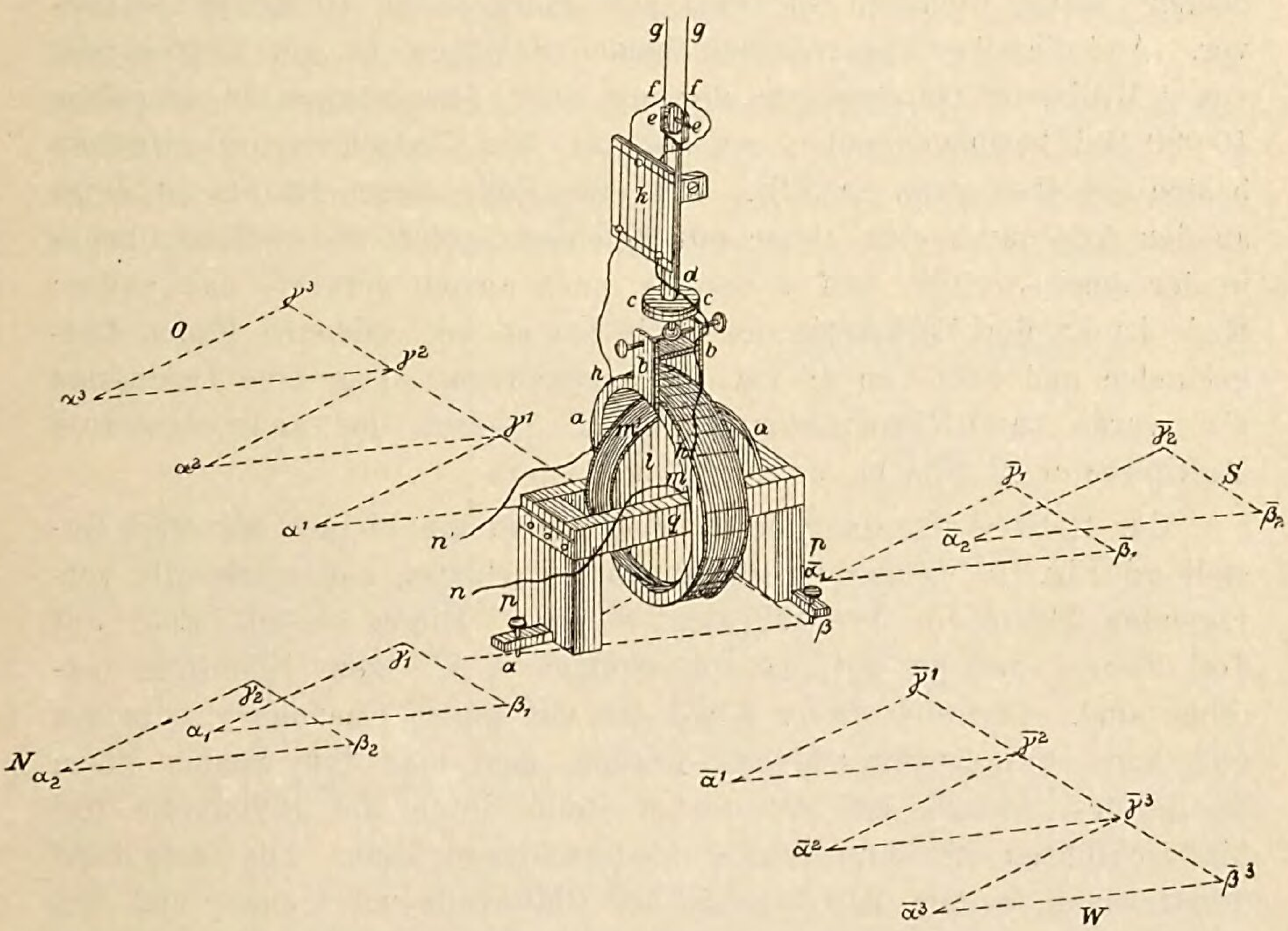


Fig. 10.

sionsdraht geleitet werden kann. Die beiden Suspensionsdrähte gehen von diesen Anknüpfungspunkten senkrecht aufwärts zur Decke, wo sie an zwei von einander isolirten messingenen Haken befestigt sind. Von diesen beiden Haken sind zwei andere Drähte wieder herabgeführt, der eine zu einem Kommutator, der andere zur galvanischen Säule.

Mit Hülfe des Torsionskreises kann man der horizontalen Axe der Bifilarrolle jede beliebige Lage geben, während die Suspensionsdrähte ihre natürliche parallele Lage beibehalten. Der Torsionskreis wurde so eingestellt, dass die Axe der Bifilarrolle mit dem magnetischen Meridiane *NS* zusammenfiel, so, dass der Erdmagnetismus den Stand der Bifilarrolle nicht änderte, wenn ein galvanischer Strom durch letztere hindurchging.

An dem hölzernen Zapfen am Torsionskreise wurde ein vertikaler Planspiegel *k* befestigt, auf welchen aus etwa $3\frac{3}{10}$ Meter Entfernung ein Fernrohr mit Fadenkreuz gerichtet wurde, um damit das Bild einer nahe beim Fernrohr aufgestellten horizontalen Skale zu beobachten.

Die *feste Rolle lll* Fig. 10 besteht aus zwei dünnen parallelen Messingplatten von $88\frac{8}{10}$ Millimeter Durchmesser, welche von einer $5\frac{1}{2}$ Millimeter dicken messingenen Axe *m* in 30 Millimeter Abstand von einander festgehalten werden. Diese messingene Axe geht durch die beiden Platten hindurch und ragt auf beiden Seiten 10 Millimeter hervor. Auf dieselbe Axe zwischen beiden Scheiben ist ein Kupferdraht von $\frac{1}{3}$ Millimeter Durchmesser, der mit Seide übersponnen ist, ungefähr 10 000 Mal herumgewunden, so, dass er den Zwischenraum zwischen beiden Scheiben ganz ausfüllt. Das eine Ende dieses Drahts ist dicht an der Axe durch eine kleine mit Elfenbein gefütterte Oeffnung bei *m* in der einen Scheibe, von *m* nach *n*, nach aussen geführt, das andere Ende ist an der Peripherie der Rolle bei *m'* mit seidenen Fäden festgebunden und geht von *m'* nach *n'* nach aussen. Das eine Drahtende *n'n'* wurde zum Kommutator *A* Fig. 11 geleitet, das andere *nn* zum Multiplikator *B* Fig. 11, eines Galvanometers.

Zur festen Aufstellung dieser Rolle dient ein kleines hölzernes Gestell *pp* Fig. 10, welches zwei Pfannen *q* darbietet, auf welche die vorragenden Theile der Axe aufgelegt werden. Dieses Gestell steht auf drei Füssen, welche mit Schraubenspitzen α, β, γ zum Nivelliren versehen sind. Der eine dieser Füsse ist mit einem Charnier *r* versehen und kann so zurückgeschlagen werden, dass man ihn sammt einem Theile des Gestells und der festen Rolle durch die Bifilarrolle frei hindurchführen und dann wieder niederschlagen kann. Die feste Rolle kommt dann in dem Mittelpunkte der Bifilarrolle zu stehen, und das Gestell ruhet alsdann, mit zwei Füssen diesseits, mit dem dritten Fusse jenseits der Bifilarrolle, auf dem festen Tische, welcher dicht unter der Bifilarrolle sich befindet.

Auf der ebenen horizontalen Tischplatte sind die Stellen genau im voraus bezeichnet, wo die feste Rolle successive aufgestellt werden soll. Es werden nämlich die drei Schraubenspitzen, welche bei koncentrischer Aufstellung der beiden Rollen auf den Punkten α, β, γ der Tischplatte stehen, so versetzt, dass sie entweder im *Norden* in den Punkten $\alpha_1\,\beta_1\,\gamma_1$ oder $\alpha_2\,\beta_2\,\gamma_2$ u. s. w., oder im *Süden* in den Punkten $\overline{\alpha}_1\,\overline{\beta}_1\,\overline{\gamma}_1$ oder $\overline{\alpha}_2\,\overline{\beta}_2\,\overline{\gamma}_2$ u. s. w., oder im *Osten* in den Punkten $\alpha^1\,\beta^1\,\gamma^1$ oder $\alpha^2\,\beta^2\,\gamma^2$ oder $\alpha^3\,\beta^3\,\gamma^3$ u. s. w., oder im *Westen* in den Punkten $\overline{\alpha}^1\,\overline{\beta}^1\,\overline{\gamma}^1$ oder $\overline{\alpha}^2\,\overline{\beta}^2\,\overline{\gamma}^2$ oder $\overline{\alpha}^3\,\overline{\beta}^3\,\overline{\gamma}^3$ u. s. w. zu stehen kommen. Die Bifilarrolle ist zum Schutz gegen den Einfluss der Luft mit einem hölzernen Gehäuse

umgeben, in welchem ein Planglas eingesetzt ist, durch welches das Licht von der Skale auf den Spiegel und von da zurück ins Fernrohr fallen kann. Das Gehäuse besteht aus zwei Theilen, die einzeln entfernt werden können, wenn die feste Rolle im Mittelpunkte der beweglichen aufgestellt werden soll.

Um nun ein mit diesem Instrument ausgeführtes System elektrodynamischer Messungen unter einander vergleichbar zu machen, war es nothwendig, unabhängig hiervon die Intensität des Stroms zu messen, welcher bei jeder Messung durch die beiden Rollen geführt wurde. Hierzu liess sich aber nicht die oben Art. 3 beschriebene Einrichtung anwenden, wegen der von einer Messung zur anderen vorzunehmenden Verstellung der festen Rolle. Es wurde daher das eine Ende *nn* des um die feste Rolle gewundenen Drahts mit einer dritten Drahtrolle *B* Fig. 11 verbunden, welche aus 618 parallelen Umwindungen, welche

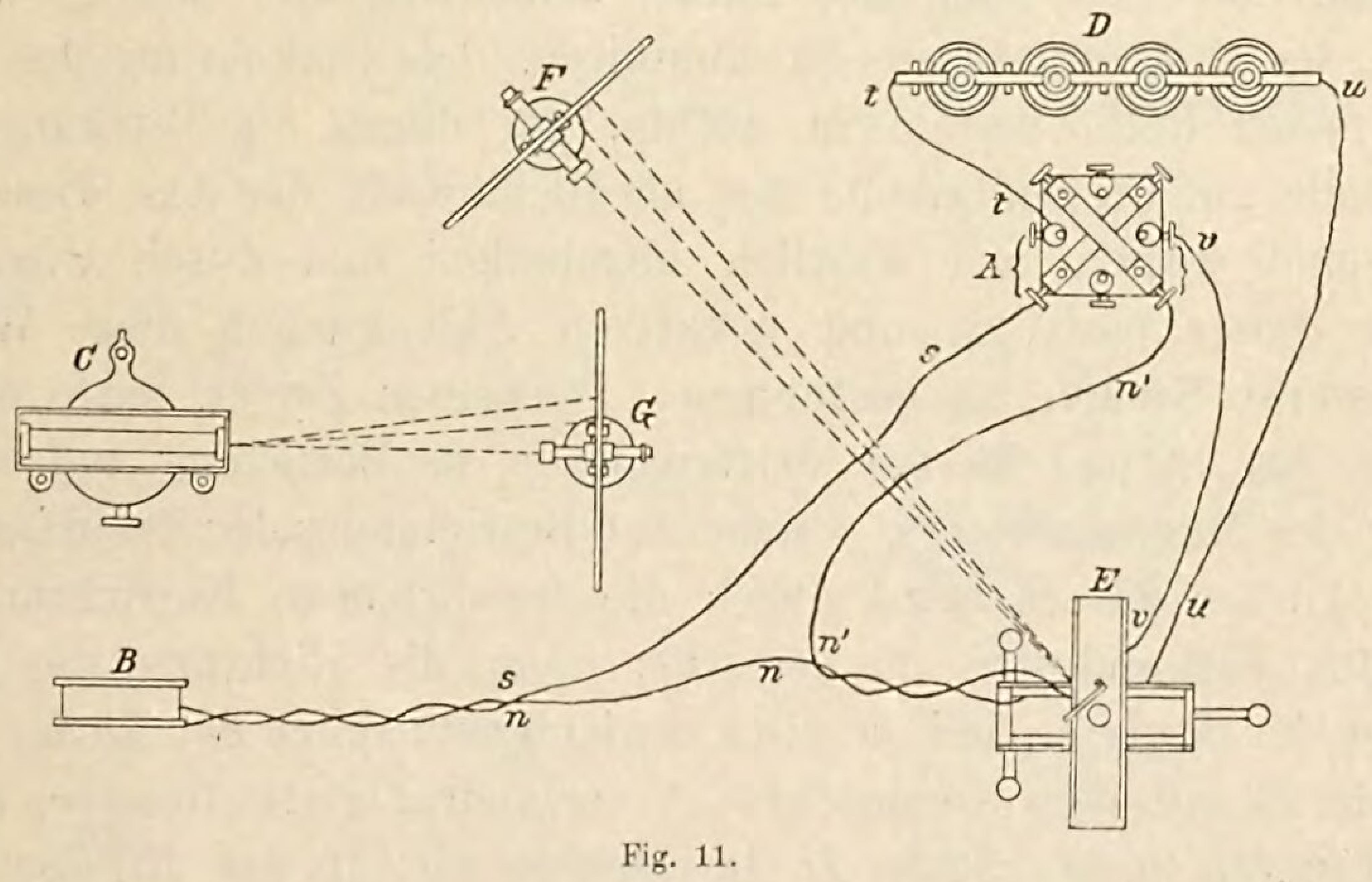


Fig. 11.

zusammen eine Fläche von 8 313 440 Quadratmillimetern umschlossen, bestand, und 217 Millimeter westlich von einem transportabeln, von dem Dynamometer 8 Meter weit entfernten Magnetometer *C* Fig. 11 aufgestellt war und mit demselben zusammen ein *Galvanometer* bildete. Diese dritte Drahtrolle wurde endlich mit ihrem anderen Ende *ss* mit dem Kommutator *A* Fig. 11 in Verbindung gebracht, zu welchem auch der eine Leitungsdraht *tt* der galvanischen Säule *D* führte.

Fig. 11 giebt eine deutliche Darstellung von der Anordnung und Verbindung der verschiedenen Theile des Apparats unter einander. Es möge dabei bemerkt werden, dass die beiden Drahtenden der festen Rolle, so weit sie in der Nähe der Bifilarrolle sich befanden, um einander gewunden waren, so, dass die entgegengesetzten Ströme, von denen sie durchlaufen wurden, keinen Einfluss auf die Bifilarrolle hatten. *E* stellt hier das Dynamometer im Grundrisse dar, *F* das zugehörige Ablesungs-

fernrohr nebst Skale; C stellt das Magnetometer im Grundrisse dar und G das zugehörige Ablesungsfernrohr nebst Skale; B ist die Multiplikatorrolle, durch welche derselbe galvanische Strom wie durch das Dynamometer geleitet wird, und die aus der Ferne auf die Nadel des Magnetometers C wirkt, deren Ablenkung vom magnetischen Meridian gemessen wird, um dadurch die Intensität des angewendeten Stroms und deren Variationen während der Versuche zu bestimmen.

Die galvanische Säule, welche zu diesen Versuchen gebraucht wurde, bestand aus 8 Bunsen'schen Kohlenbechern. Die Richtung dieses Stroms blieb im Drahte der Bifilarrolle des Dynamometers E immer die nämliche, und wurde, wie aus der Stellung des Kommutators A einleuchtet, durch den Wechsel des Kommutators blos in der festen Rolle des Dynamometers E und in der dritten Rolle B, welche die Stelle des Multiplikators beim *Galvanometer* vertrat, umgekehrt. Dass der Strom in der Bifilarrolle seine Richtung immer beibehielt, war nöthig, um den Einfluss des Erdmagnetismus zu eliminiren. Die Umkehrung des Stroms in der festen Rolle war dazu nöthig, um durch die Wirkung dieser festen Rolle auf die Bifilarrolle das nördliche Ende der Axe dieser Rolle abwechselnd östlich und westlich abzulenken und durch wiederholte Messung dieser positiven und negativen Ablenkungen diese Wirkung mit grösserer Schärfe zu bestimmen. Denselben Zweck hatte die Umkehrung des Stroms in der dritten Rolle in Beziehung auf die Ablenkung des Magnetometers, welche zur Bestimmung der Stromintensität diente. Dieser Zweck wird durch die beschriebene Einrichtung, mit Hülfe des Kommutators A, erreicht; denn die Richtung des Stroms bleibt in der Säule D und in allen denjenigen Theilen der Kette, welche die Säule D mit dem Kommutator A verbinden, stets dieselbe, nämlich im Drahte tt, in der Säule D, im Drahte uu, in der *Bifilarrolle* des Dynamometers E und im Drahte vv; dagegen kann die Richtung des Stroms durch den Kommutator A in allen denjenigen Theilen der Kette gewechselt werden, welche durch den Kommutator A von der Säule D geschieden sind, nämlich in dem Drahte $n'n'$, in der *festen Rolle* des Dynamometers E, in dem Drahte nn, in der Multiplikatorrolle B und in dem Drahte ss.

Die Schwingungsdauer der Bifilarrolle ohne Strom war = 13,3259″. Der horizontale Abstand des Spiegels der Bifilarrolle von der Skale betrug 3306,3 Skalentheile; der horizontale Abstand des Spiegels des Magnetometers von der Skale betrug 1103 Skalentheile. Die Resultate dieser Messungen sind in folgender Tafel enthalten, in derselben Ordnung, in welcher sie gemacht wurden.

A	Dynamometer			Galvanometer		
600 westlich	516,27	26,41		250,47	321,49	
	542,68	26,74		571,96	321,48	
	515,94	26,37	26,35	250,48	321,12	320,14
	542,31	26,24		571,60	319,41	
	516,07	26,00		252,19	317,22	
	542,07			569,41		
500 westlich	506,37	44,47		254,05	314,65	
	550,84	44,87		568,70	314,22	
	505,97	43,89	44,31	254,48	314,77	314,32
	549,86	44,50		569,25	314,33	
	505,36	43,84		254,92	313,63	
	549,20			568,55		
500 nördlich	517,27	20,34		566,80	312,08	
	537,61	20,43		254,72	312,98	
	517,18	20,19	20,30	567,70	312,82	312,48
	537,37	20,36		254,88	312,63	
	517,01	20,19		567,51	311,89	
	537,20			255,62		
500 östlich	505,06	43,04		257,92	308,39	
	548,10	43,09		566,31	308,98	
	505,01	42,53	42,89	257,33	308,05	308,80
	547,54	42,32		565,38	309,09	
	505,22	43,46		256,29	309,50	
	548,68			565,79		
500 südlich	517,96	19,51		564,05	306,09	
	537,47	19,80		257,96	306,07	
	517,67	19,19	19,49	564,03	305,14	305,56
	536,86	19,79		258,89	305,47	
	517,07	19,17		564,36	305,03	
	536,24			259,33		
600 östlich	514,31	24,19		260,23	304,46	
	538,50	23,65		564,69	305,02	
	514,85	24,06	23,72	259,67	304,58	304,92
	538,91	23,72		564,25	305,36	
	515,19	23,85		258,89	305,17	
	539,04			564,06		
400 östlich	568,21	81,67		562,50	303,54	
	486,54	81,85		258,96	304,67	
	568,39	81,77	81,64	563,63	303,35	303,79
	486,62	81,57		260,28	303,32	
	568,19	81,35		563,60	304,08	
	486,84			259,52		

A	Dynamometer			Galvanometer		
	546,32			261,44		
		36,27			300,95	
	510,05			562,39		
		36,25			302,42	
	546,30			259,97		
400 nördlich		36,14	36,15		302,73	302,07
	510,16			562,70		
		35,96			301,58	
	546,12			261,12		
		36,12			302,69	
	510,00			563,81		
	488,36			261,99		
		79,71			300,99	
	568,07			562,98		
		79,78			301,45	
	488,29			261,53		
400 westlich		79,60	79,60		300,97	300,80
	567,89			562,50		
		79,49			300,80	
	488,40			261,70		
		79,40			299,83	
	567,80			561,53		
	510,23			561,18		
		35,34			298,95	
	545,57			262,23		
		35,53			299,67	
	510,04			561,90		
400 südlich		35,45	35,43		299,40	299,30
	545,49			262,50		
		35,56			299,37	
	509,93			561,87		
		35,28			299,11	
	545,21			262,76		
	566,29			263,73		
		79,45			298,81	
	486,84			562,54		
		79,39			300,31	
	566,23			262,23		
300 südlich		78,13	78,85		300,30	299,89
	488,10			562,53		
		78,64			300,30	
	566,74			262,23		
		78,62			299,71	
	488,12			561,94		
	431,18			263,96		
		192,57			298,05	
	623,75			562,01		
		192,40			298,25	
	431,35			263,76		
300 westlich		192,02	192,17		297,99	297,81
	623,37			561,75		
		191,96			297,30	
	431,41			264,45		
		191,91			297,45	
	623,32			561,90		
	566,96			265,93		
		78,30			297,12	
	488,66			563,05		
		78,37			299,13	
	567,03			263,92		
300 nördlich		77,93	78,08		299,12	298,33
	489,10			563,04		
		77,98			298,15	
	567,08			264,89		
		77,80			298,14	
	489,28			563,03		
	433,52			266,49		
		190,26			296,69	
	623,78			563,18		
		190,43			298,16	
	433,35			265,02		
300 östlich		190,23	190,08		296,98	297,30
	623,58			562,00		
		189,89			297,09	
	433,69			264,91		
		189,59			297,60	
	623,28			562,51		

Dieser Tafel sind folgende Erläuterungen beizufügen. In der Kolumne *A* ist der Abstand der Mittelpunkte beider Rollen des Dynamometers in Millimetern angegeben, und dabei bemerkt, nach welcher Richtung, von der Bifilarrolle aus gerechnet, die feste Rolle aufgestellt war; unter nördlich und südlich ist die Richtung nach dem magnetischen Meridiane, unter östlich und westlich die Richtung senkrecht gegen den magnetischen Meridian zu verstehen. — In der „Dynamometer" überschriebenen zweiten Kolumne ist der Stand der Bifilarrolle nach Skalentheilen angegeben, abwechselnd bei direkter und umgekehrter Richtung des Stroms in der festen Rolle. Jede dieser Zahlen beruht auf 7 Ablesungen, indem von Schwingung zu Schwingung abwechselnd das Maximum und das Minimum des Schwingungsbogens 7 Mal hinter einander abgelesen und hieraus nach bekannten Regeln der mittlere Ruhestand der schwingenden Rolle berechnet wurde. Bei der Umkehrung des Stroms in der festen Rolle wurde ein solches Verfahren angewendet, durch welches der Schwingungsbogen der Bifilarrolle nicht vergrössert wurde. In der Tafel sind neben den Standbeobachtungen, welche sich abwechselnd auf den direkten und umgekehrten Strom in der festen Rolle beziehen, die Unterschiede je zweier unmittelbar auf einander folgender Beobachtungen bemerkt, welche die doppelte Ablenkung der Bifilarrolle durch Einwirkung der festen Rolle in Skalentheilen angeben. Endlich ist neben diesen einzelnen Werthen der doppelten Ablenkung ihr Mittelwerth für jede Stellung der festen Rolle bemerkt. — In der „Galvanometer" überschriebenen dritten Kolumne ist der Stand des Galvanometers angegeben, abwechselnd bei direkter und umgekehrter Stromrichtung in der als Multiplikator dienenden Rolle *B*. Dieser Stand ist auf dieselbe Weise beobachtet und berechnet worden, wie beim Dynamometer, und daneben sind die Unterschiede und der Mittelwerth der doppelten Ablenkung des Galvanometers bemerkt. Die korrespondirenden Beobachtungen am Dynamometer und am Galvanometer sind immer von zwei Beobachtern an beiden Instrumenten gleichzeitig gemacht worden.

Alle in der obigen Tafel zusammengestellten Beobachtungen sind in der angegebenen Ordnung an einem Tage unmittelbar nach einander gemacht worden, und, da alle äusseren Verhältnisse genau die nämlichen blieben, so sind alle Resultate unmittelbar unter einander vergleichbar. Es war an diesem Tage nicht möglich gewesen, auch noch diejenigen Beobachtungen auszuführen, wobei die feste Rolle ihre Stellung im Mittelpunkte der Bifilarrolle erhielt, weil diese Umstellung der festen Rolle mehrere zeitraubende Vorkehrungen erforderte. Diese letzte Versuchsreihe wurde daher auf einen anderen Tag verschoben. Weil aber dann nicht mehr mit Sicherheit darauf zu bauen war, dass alle äusseren

Verhältnisse genau dieselben geblieben, wie bei den früheren Versuchen, so wurden, zur Vergleichung, an diesem zweiten Tage zwei Versuchsreihen wiederholt, welche schon am ersten Tage gemacht worden waren, nämlich bei 300 Millimeter östlichem und westlichem Abstande der festen Rolle von der Bifilarrolle, welche benutzt werden konnten, die letzte Versuchsreihe so zu reduciren, dass die Resultate mit den Resultaten der früheren Beobachtungen vergleichbar wurden, unabhängig von den kleinen Aenderungen, welche in der Zwischenzeit in den äusseren Verhältnissen eingetreten sein mochten. Auch hatte es auf diese Vergleichung keinen Einfluss, dass am anderen Tage eine andere galvanische Säule gebraucht wurde, nämlich von 2 Grove'schen (Platin-Zink-) Bechern statt von 8 Bunsen'schen Kohlenbechern. Es war dies nothwendig, weil sonst die Ablenkung des Dynamometers bei der Stellung der festen Rolle im Mittelpunkte der Bifilarrolle zu gross gewesen wäre, um an der Skale gemessen zu werden. Endlich werde bemerkt, dass die konstante Richtung des Stroms in der Bifilarrolle am anderen Tage die entgegengesetzte war, wie am ersten, was ebenfalls auf die reducirten Resultate keinen Einfluss hat. Die Resultate dieser zweiten Versuchsreihe sind in der folgenden Tafel enthalten.

A	Dynamometer			Galvanometer		
	48,05			359,78		
	953,74	905,69		424,29	64,51	
	48,90	904,84		359,83	64,46	
0	952,90	904,00	903,97	424,30	64,47	64,45
	49,89	903,01		359,90	64,40	
	952,20	902,31		424,29	64,39	
	485,70			329,30		
	513,28	27,58		454,38	125,08	
300	486,10	27,18		329,39	124,99	
östlich	513,35	27,25	27,54	454,28	124,89	125,08
	485,09	28,26		329,18	125,10	
	512,52	27,43		454,53	125,35	
	512,37			454,50		
	486,72	25,65		329,32	125,18	
300	514,49	27,77		454,61	125,29	
westlich	487,06	27,43	27,20	329,26	125,35	125,23
	514,66	27,60		454,56	125,30	
	487,11	27,55		329,51	125,05	

Es ist hierbei zu bemerken, dass auch der Strom von 2 Grove'schen Bechern eine grössere Ablenkung des Dynamometers hervorbrachte, als mit der 1000 Theile umfassenden Skale gemessen werden konnte, wenn die feste Rolle im Mittelpunkte der Bifilarrolle aufgestellt war, und dass

daher in diesem Falle der Strom dadurch geschwächt wurde, dass der Widerstand der Kette durch Einschaltung eines langen und dünnen Leitungsdrahts vermehrt wurde, der bei 300 Millimeter Abstand der beiden Rollen wieder entfernt wurde, weil sonst die Ablenkung des Dynamometers hier wieder für eine genaue Messung zu klein ausgefallen sein würde. Man erkennt dies aus der Verschiedenheit der Magnetometerablenkung, welche die Stromintensität misst, und im letzteren Falle fast das Doppelte wie im ersteren beträgt.

Die Resultate dieser Versuchsreihe lassen sich leicht in folgender Zusammenstellung aller Mittelwerthe der gleichzeitigen Ablenkungen des Dynamometers und Galvanometers übersehen, nämlich:

Abstand in Millimetern	Dynamometer	Galvanometer
0	903,97	64,45
300 östlich	27,54	125,08
300 westlich	27,20	125,23.

Diese Zahlen sind den katoptrischen Gesetzen gemäss den Tangenten der doppelten Ablenkungswinkel proportional und sollen auf die Tangenten der einfachen Ablenkungswinkel reducirt werden, weil diese das Maass der ablenkenden Kraft geben. Es ist dabei noch ein geringer Einfluss der Excentricität der Spiegel zu berücksichtigen. Man erhält hieraus folgende reducirte Werthe:

0	899,79	64,44
300 östlich	27,54	124,98
300 westlich	27,20	125,13.

Von den beiden letzten Zahlenreihen, welche von einander nur wenig verschieden sind, nehmen wir die Mittel, weil sie ganz gleich sein sollten, wenn die Stromintensität dieselbe, und die Stellung der festen Rolle östlich und westlich von der Bifilarrolle ganz symmetrisch gewesen wäre, wodurch wir folgende Werthe erhalten:

0	899,79	64,44
300	27,37	125,055.

Die Resultate der vorhergehenden Versuchsreihe lassen sich in der Zusammenstellung aller Mittelwerthe der Dynamometer- und Galvanometerablenkungen in folgender Tafel übersehen, nämlich:

Abstand	Oestlich		Westlich		Südlich		Nördlich	
Millimeter	Dynamometer	Galvanometer	Dynamometer	Galvanometer	Dynamometer	Galvanometer	Dynamometer	Galvanometer
300	190,08	297,30	192,17	297,81	78,85	299,89	78,08	298,33
400	81,64	303,79	79,60	300,81	35,43	299,30	36,15	302,07
500	42,89	308,80	44,31	314,32	19,49	305,56	20,30	312,48
600	23,89	304,92	26,35	320,14	—	—	—	—

Ich habe mich überzeugt, dass der Einfluss der Reduktion dieser Zahlen auf Tangenten der einfachen Ablenkungswinkel für das Dynamometer so gering ist, dass er ausser Betracht gelassen werden kann, er ist nämlich kleiner, als die unvermeidlichen Beobachtungsfehler. Auch bei den Galvanometer-Beobachtungen kommt diese Korrektion in Betracht, weil in der Ablenkung des Galvanometers keine grossen Verschiedenheiten vorkommen.

6.

Die beobachteten elektrodynamischen Kräfte im vorigen Artikel können zu der beabsichtigten Prüfung der durch das Ampère'sche Gesetz bestimmten Abhängigkeit dieser Kräfte von der gegenseitigen Lage der auf einander wirkenden Leitungsdrähte nicht unmittelbar benutzt werden, weil sie auf verschiedene Stromintensitäten sich beziehen. Es sollen daher zunächst diese Beobachtungen *auf gleiche Stromintensität* reducirt werden, wozu das im vierten Artikel bewiesene Gesetz in Anwendung kommt, nach welchem die Dynamometer-Ablenkungen den Quadraten der Galvanometer-Ablenkungen proportional sind. Die Anwendung dieses Gesetzes auf die vorliegenden Beobachtungen setzt aber selbst wieder eine andere Reduktion voraus, nämlich die *auf gleiche Direktionskraft* der Bifilarrolle, welche bei diesen Versuchen merkliche Aenderungen erlitt. Bei den im vierten Artikel angeführten Beobachtungsresultaten, durch welche das angeführte Gesetz bewiesen wurde, war die hieraus sich ergebende Korrektion unmerklich und brauchte daher nicht in Rechnung gebracht zu werden, weil dort der Strom, welcher durch die feste Rolle des Dynamometers ging, getheilt wurde und nur ein kleiner Theil, nämlich $\frac{1}{246}$ des ganzen Stroms, durch die *Bifilarrolle* geführt wurde, der auf die Direktionskraft dieser Rolle keinen merklichen Einfluss hatte. Bei den jetzt vorliegenden Beobachtungsresultaten dagegen darf diese Reduktion nicht unbeachtet bleiben, weil hier der ganze durch die feste Rolle geführte Strom durch die Bifilarrolle weiter ging.

Die *Direktionskraft der Bifilarrolle* zerfällt in einen *konstanten* und in einen *veränderlichen* Theil. Der *konstante* Theil, welcher das *statische Moment* heisst, hängt von dem Gewicht der Bifilarrolle und von Länge und Abstand der Aufhängungsdrähte ab und lässt sich aus der beobachteten *Schwingungsdauer* und dem *Trägheitsmomente* der Bifilarrolle berechnen. Die *Schwingungsdauer* der Bifilarrolle, wenn kein Strom durchging, war durch besondere Beobachtungen bestimmt worden,

$$t = 13{,}3259''.$$

Das *Trägheitsmoment* K wurde nach den von Gauss in der *Intensitas* gegebenen Vorschriften

$$K = 864\,800\,000$$

gefunden, wobei Millimeter und Milligramm als Längen- und Massenmaass zum Grunde liegen. Das *statische Moment* S erhält man hieraus

$$S = \frac{\pi^2 K}{t^2} = 48\,064\,000.$$

Der *veränderliche* Theil der Direktionskraft der Bifilarrolle, welcher das *elektromagnetische Moment* heisse, hängt von der Intensität des horizontalen Theils des *Erdmagnetismus* T, von der Intensität des Stroms der Bifilarrolle $\varkappa$ und von der Grösse des Flächenraums λ ab, welcher von den Drahtwindungen der Bifilarrolle begrenzt wird, und ist dem Produkte dieser drei Grössen gleich zu setzen. Die Intensität des horizontalen Theils des Erdmagnetismus war an der Stelle der Bifilarrolle

$$T = 1{,}83$$

gefunden worden. Die Grösse des *Flächenraums*, welcher von den Drahtwindungen der Bifilarrolle begrenzt war, konnte durch direkte Abmessung nicht bestimmt werden, weil die Zahl der Drahtwindungen nicht genau bekannt war. Es wurde daher dieser Flächenraum mittelbar durch Vergleichung der elektromagnetischen Wirkung dieser Rolle mit der einer anderen von bekanntem Flächenraume auf eine entfernte Boussole bestimmt, wonach

$$\lambda = 29\,314\,000 \text{ Quadratmillimeter}$$

erhalten wurde. Die *Stromintensitäten* waren endlich für alle einzelnen Versuche durch die Galvanometerbeobachtungen in Skalentheilen gegeben, die jedoch zu vorliegendem Zwecke auf das *elektromagnetische Grundmaass* der Stromintensitäten zurückzuführen sind. Hierzu muss die beobachtete Zahl der Skalentheile mit einem konstanten Faktor multiplicirt werden, welcher der im neunten Artikel zu gebenden Nachweisung gemäss

$$= 0{,}000\,361\,4$$

zu setzen ist. Bezeichnet also y die am Galvanometer beobachtete Zahl der Skalentheile, so ist die Stromintensität

$$\varkappa = 0{,}000\,361\,4 \,.\, y.$$

Aus diesen Elementen ergiebt sich das *elektromagnetische Moment* der Bifilarrolle

$$\varkappa\lambda T = 19\,400 \,.\, y.$$

Dieser Werth des elektromagnetischen Moments ist bei der *ersten* Versuchsreihe von dem des *statischen Moments* abzuziehen, bei der zweiten Versuchsreihe aber demselben hinzuzufügen, um die *Direktionskraft der Bifilarrolle* zu erhalten, weil, wie schon S. 62 bemerkt worden ist, die

Stromrichtung in der Bifilarrolle in der letzteren Reihe der in der ersteren entgegengesetzt war. Für die *erste* Versuchsreihe ergiebt sich hieraus die Direktionskraft in Theilen des statischen Moments

$$= 1 - \frac{19\,400}{48\,064\,000} \cdot y;$$

für die zweite Versuchsreihe

$$= 1 + \frac{19\,400}{48\,064\,000} \cdot y.$$

Die beobachteten *Dynamometer-Ablenkungen* werden hiernach auf eine konstante, dem *statischen Momente* gleiche, Direktionskraft reducirt, wenn man die am Dynamometer beobachtete Zahl der Skalentheile x in der *ersten* Versuchsreihe mit $(1 - 194 \,.\, y/480\,640)$, in der *zweiten* mit $(1 + 194 \,.\, y/480\,640)$ multiplicirt.

Nach dieser Reduktion erhält man für die *erste Reihe* die in folgender Tafel zusammengestellten Werthe der Dynamometer- und Galvanometer-Ablenkungen.

Abstand	Oestlich		Westlich		Südlich		Nördlich	
Millimeter	Dynamometer	Galvanometer	Dynamometer	Galvanometer	Dynamometer	Galvanometer	Dynamometer	Galvanometer
300	167,26	297,30	169,06	297,81	69,30	299,89	68,67	298,33
400	71,63	303,79	69,93	300,81	31,15	299,30	31,74	302,07
500	37,54	308,80	38,69	314,32	17,09	305,56	17,74	312,48
600	20,95	304,92	22,94	320,14	—	—	—	—

Für die *zweite Reihe* erhält man folgende zusammengehörige Werthe:

Abstand	Oestlich oder Westlich	
Millimeter	Dynamometer	Galvanometer
0	923,19	64,44
300	28,75	125,055

Die *Empfindlichkeit* eines Instruments ist seiner *Direktionskraft* umgekehrt proportional, d. h. die zu messende Kraft bringt eine desto grössere Ablenkung hervor, je kleiner seine Direktionskraft ist. Obige auf *gleiche Direktionskraft* reducirten Beobachtungen sind also denen gleich, welche bei *gleicher Empfindlichkeit* des Dynamometers erhalten worden wären.

Nach dieser Reduktion der Dynamometer-Beobachtungen *auf gleiche Direktionskraft* lässt sich nun das im vierten Artikel bewiesene Gesetz in Anwendung bringen und alle Beobachtungen, zur besseren Vergleichung

unter einander, *auf gleiche Stromintensität* reduciren. Es ist hierzu nur nöthig, die normale Stromintensität, für welche die reducirten Beobachtungen gelten sollen, näher zu bestimmen. Da es nicht nöthig ist, für beide Versuchsreihen *gleiche* normale Stromintensitäten anzuwenden, so möge für die *erste Reihe* diejenige gewählt werden, welche einer Galvanometer-Ablenkung in Skalentheilen entspricht, deren Quadrat = 100 000 ist, für die *zweite Reihe* eine 5 Mal kleinere, für welche dieses Quadrat = 4000 ist. Nach dem im vierten Artikel bewiesenen Gesetze erhält man dann aus der in der Tafel angegebenen Dynamometer-Ablenkung x, welche der ebenfalls in der Tafel angegebenen Galvanometer-Ablenkung y entsprach, den reducirten Werth für die *erste* Reihe

$$= 100\,000 \cdot \frac{x}{y^2},$$

für die *zweite* Reihe

$$= 4000 \cdot \frac{x}{y^2}.$$

In folgender Tafel sind die hiernach reducirten Werthe der *ersten* Reihe zusammengestellt.

Abstand	Oestlich	Westlich	Südlich	Nördlich
300	189,24	190,62	77,06	77,16
400	77,61	77,28	34,77	34,78
500	39,37	39,16	18,30	18,17
600	22,53	22,38	—	—

Die reducirten Werthe der *zweiten* Reihe sind folgende:

Abstand	Oestlich oder westlich
0	889,29
300	7,35.

Aus dieser letzteren ergiebt sich, dass die elektrodynamische Kraft der festen Rolle auf die Bifilarrolle, wenn die Mittelpunkte zusammenfallen

$$\frac{88\,929}{735} = 120{,}9 \text{ Mal}$$

grösser war, als wenn die Mittelpunkte in west-östlicher Richtung 300 Millimeter von einander entfernt waren.

In der Tafel für die erste Reihe sieht man, dass sowohl die in Osten und Westen als auch die in Süden und Norden sich entsprechenden Werthe sehr nahe übereinstimmen, was ein Beweis ist sowohl für die Genauigkeit der Messung als auch für die symmetrische Stellung, welche die feste Rolle zu beiden Seiten der Bifilarrolle erhalten hatte. Nimmt man nun die Mittel von diesen schon nahe mit einander übereinstim-

menden Werthen, und fügt für 0 Abstand, dem eben aus der *zweiten* Reihe gezogenen Resultate gemäss, den 120,9 fachen Werth der Wirkung für 300 Millimeter Abstand senkrecht auf dem magnetischen Meridiane hinzu, so erhält man folgende Tafel:

Abstand	Senkrecht auf den magnetischen Meridian	In der Richtung d. magnetischen Meridians
0	22960	22960
300	189,93	77,11
400	77,45	34,77
500	39,27	18,24
600	22,46	—

7.

Ehe wir nun dieses System von Messungen über die Wechselwirkung zweier Leitungsdrähte dazu benutzen, das AMPÈRE'sche Fundamentalgesetz direkt daran zu prüfen, wollen wir eine interessante, wenn auch nur indirekte und partielle Prüfung vorausschicken. Es ist nämlich bekannt, dass es eine der wichtigsten Konsequenzen des AMPÈRE'schen Fundamentalgesetzes für die Wechselwirkung zweier Stromelemente sei, dass die Wechselwirkung zweier Magnete, bei aller Verschiedenheit ihrer gegenseitigen Lage, auch durch konstante galvanische Ströme, welche auf eine bestimmte Weise auf der Oberfläche oder im Innern der Magnete Statt finden, hervorgebracht werden würde, und umgekehrt, dass die Wechselwirkungen zweier galvanischer Rollen, wie diejenigen, womit unsere Messungen ausgeführt wurden, bei aller Verschiedenheit ihrer gegenseitigen Lage, auch durch zwei konstante Magnete hervorgebracht werden würden, welche in Räumen enthalten sind, welche von den Drahtwindungen jener Rollen umschlossen sind, wenn der freie Magnetismus auf eine bestimmte Weise im Innern oder auf ihrer Oberfläche vertheilt wäre. Hiernach können alle Resultate, welche GAUSS in der *Intensitas vis magneticae* etc. für solche Magnete bewiesen hat, auf unsere beiden Rollen übertragen werden, und dies kann um so leichter geschehen, als wir unsere Messungen über die Wechselwirkungen der beiden Rollen genau so angeordnet haben, wie GAUSS die Messungen der Wechselwirkungen der beiden Magnete bestimmt hat. GAUSS hat a. a. O. den Abstand der beiden Magnete in Metern angegeben, statt wir Millimeter gebrauchen; ferner hat GAUSS die *einfachen*, von der natürlichen Ruhelage der Nadel an gerechneten, Ablenkungen in Graden, Minuten und Sekunden bestimmt, während wir die *doppelten* Tangenten der einfachen Ablenkungswinkel in Skalentheilen (d. i. mit dem konstanten Koefficienten 6612,6 multiplicirt), angesetzt haben. Wollen wir

daher unsere Messungen über die Wechselwirkung der beiden Leitungsrollen in die nämliche Form bringen wie jene magnetischen, so erhalten wir folgende Tafel der *gemessenen* Ablenkungen:

R	v	v'
0,3 m	0° 49′ 22″	0° 20′ 3″
0,4 „	0° 20′ 8″	0° 9′ 2″
0,5 „	0° 10′ 12″	0° 4′ 44″
0,6 „	0° 5′ 50″	—

Die Tangenten von v und v' sollen sich dann hier wie dort nach den fallenden ungeraden Potenzen von R entwickeln lassen, und zwar soll

$$\operatorname{tang} v = aR^{-3} + bR^{-5}$$
$$\operatorname{tang} v' = \frac{1}{2}aR^{-3} + cR^{-5}$$

gesetzt werden können, wo a, b, c aus der Erfahrung zu bestimmen sind. Setzt man nun in unserem Falle

$$\operatorname{tang} v = 0{,}000\,357\,2\, R^{-3} + 0{,}000\,002\,755\, R^{-5}$$
$$\operatorname{tang} v' = 0{,}000\,178\,6\, R^{-3} - 0{,}000\,001\,886\, R^{-5}$$

so ergiebt sich folgende Tafel *berechneter* Ablenkungen, denen die Unterschiede von den *gemessenen* beigefügt worden sind:

R	v	Unterschied	v'	Unterschied
0,3 m	0° 49′ 22″	0	0° 20′ 4″	− 1
0,4 „	0° 20′ 7″	+ 1	0° 8′ 58″	+ 4
0,5 „	0° 10′ 8″	+ 4	0° 4′ 42″	+ 2
0,6 „	0° 5′ 49″	+ 1	—	

Die Uebereinstimmung zwischen beobachteten und berechneten Werthen kann nicht besser gewünscht werden und das Ampère'sche Fundamentalgesetz findet sich hiernach in einer seiner allgemeinsten und wichtigsten Konsequenzen durch die Erfahrung bestätigt.

8.

Das Ampère'sche Fundamentalgesetz für die Wechselwirkung zweier Stromelemente, welches an dem vorliegenden Systeme von Messungen dieser Wechselwirkung geprüft werden soll, besteht selbst nun wesentlich in Folgendem: Die Wechselwirkung zweier Stromelemente ist dem Quadrate ihres Abstandes von einander umgekehrt, und der Stromintensität und der Länge jedes Stromelements und ausserdem einem Faktor direkt proportional, welcher von dem Winkel, welchen die Richtungen

der beiden Stromelemente mit einander, und von den beiden Winkeln, welche die beiden Stromelemente mit ihrer geraden Verbindungslinie bilden, abhängt. Man bezeichne mit r den Abstand der beiden Stromelemente von einander, mit i und i' die beiden Stromintensitäten, mit ds und ds' die Längen der beiden Stromelemente, mit ε den Winkel, welchen die Richtungen der beiden Stromelemente mit einander bilden, endlich mit ϑ den Winkel des einen Stromelements mit der Linie r, und mit ϑ' den Winkel des anderen Stromelements mit der verlängerten Linie r, so ist

$$-\frac{ii'}{rr}\left(\cos\varepsilon - \frac{3}{2}\cos\vartheta\cos\vartheta'\right) ds\, ds'$$

ein Ausdruck für die *Grösse* der Wechselwirkung beider Elemente; die *Richtung* derselben fällt für beide Stromelemente mit ihrer Verbindungslinie zusammen, und ist für die beiden Stromelemente entgegengesetzt, für beide abstossend, wenn obiger Ausdruck einen positiven Werth hat, im entgegengesetzten Falle anziehend.

Aus diesem Fundamentalgesetze lässt sich nun zunächst der Ausdruck für die Gesammtwirkung finden, welche eine Anzahl von Stromelementen, die zusammen eine *geschlossene* Linie bilden, auf irgend ein anderes Stromelement ausüben.

Man kann diese Wirkung nach drei rechtwinklichten Koordinatenaxen zerlegen. Bezeichnet man diese drei Komponenten mit X, Y, Z, ferner die Winkel, welche das Stromelement ds', auf welches gewirkt wird, mit den drei Koordinatenaxen bildet, mit λ, μ, ν, und ist die Mitte des Elements ds' der Anfangspunkt der Koordinaten, so hat AMPÈRE schon bewiesen, dass

$$X = -\frac{1}{2} ii' ds' \left(\cos\mu \int \frac{x\,dy - y\,dx}{r^3} - \cos\nu \int \frac{z\,dx - x\,dz}{r^3}\right)$$

$$Y = -\frac{1}{2} ii' ds' \left(\cos\nu \int \frac{y\,dz - z\,dy}{r^3} - \cos\lambda \int \frac{x\,dy - y\,dx}{r^3}\right)$$

$$Z = -\frac{1}{2} ii' ds' \left(\cos\lambda \int \frac{z\,dx - x\,dz}{r^3} - \cos\mu \int \frac{y\,dz - z\,dy}{r^3}\right)$$

(siehe Mémoires de l'acad. roy. des sc. de l'Institut de France. Année 1823, S. 214). Ist nun die geschlossene Linie eine Kreislinie von dem Halbmesser m, ist ferner die Axe der x der Projektion der den Mittelpunkt des Kreises mit dem Anfangspunkte der Koordinaten verbindenden Geraden auf die Kreisebene parallel, und die Axe der y dem auf jene Projektion senkrechten Durchmesser des Kreises; bezeichnet man ferner den auf die Kreisebene projicirten Abstand des Kreismittelpunkts vom Anfangspunkte der Koordinaten mit p, und den Winkel, welchen die

Linie p mit dem Radius eines Kreiselements $\mathrm{d}s$ bildet, mit ω; endlich mit q das Perpendikel vom Anfangspunkte der Koordinaten auf die Kreisebene, so ist für diesen Fall in obigen Werthen von X, Y, Z

$$z = q, \qquad y = m \sin \omega, \qquad x = p - m \cos \omega,$$

folglich ist, weil $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ ist,

$$\int \frac{x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x}{r^3} = mp \int \frac{\cos \omega\, \mathrm{d}\omega}{r^3} - m^2 \int \frac{\mathrm{d}\omega}{r^3}$$

$$= mp \left(\frac{\sin \omega}{r^3} + 3 \int \sin \omega \cdot \frac{\mathrm{d}r}{r^4} \right) - m^2 \int \frac{\mathrm{d}\omega}{r^3}$$

$$\int \frac{z\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}z}{r^3} = mq \int \frac{\sin \omega\, \mathrm{d}\omega}{r^3}$$

$$\int \frac{y\,\mathrm{d}z - z\,\mathrm{d}y}{r^3} = - mq \int \frac{\cos \omega\, \mathrm{d}\omega}{r^3} = - mq \left(\frac{\sin \omega}{r^3} + 3 \int \sin \omega \cdot \frac{\mathrm{d}r}{r^4} \right).$$

Substituirt man hierin endlich für $\mathrm{d}r$ seinen aus der Gleichung für r, nämlich:

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 = m^2 + p^2 + q^2 - 2mp \cos \omega,$$

sich ergebenden Werth

$$\mathrm{d}r = \frac{mp \sin \omega\, \mathrm{d}\omega}{r},$$

und erstreckt die Integralwerthe auf den ganzen Kreisumfang, so erhält man

$$\int \frac{x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x}{r^3} = 3\, m^2 p^2 \int \frac{\sin \omega^2\, \mathrm{d}\omega}{r^5} - m^2 \int \frac{\mathrm{d}\omega}{r^3}$$

$$\int \frac{z\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}z}{r^3} = 0$$

$$\int \frac{y\,\mathrm{d}z - z\,\mathrm{d}y}{r^3} = - 3\, m^2 pq \int \frac{\sin \omega^2\, \mathrm{d}\omega}{r^5};$$

folglich

$$X = -\frac{1}{2}\, ii'\,\mathrm{d}s' \,.\, m^2 \cos \mu \left(3\, p^2 \int \frac{\sin \omega^2\, \mathrm{d}\omega}{r^5} - \int \frac{\mathrm{d}\omega}{r^3} \right)$$

$$Y = +\frac{1}{2}\, ii'\,\mathrm{d}s' \,.\, m^2 \left(3pq \cos \nu \int \frac{\sin \omega^2 \mathrm{d}\omega}{r^5} + 3p^2 \cos \lambda \int \frac{\sin \omega^2 \mathrm{d}\omega}{r^5} - \cos \lambda \int \frac{\mathrm{d}\omega}{r^3} \right).$$

Gehört nun das Element $\mathrm{d}s'$ ebenfalls einem Kreise an, dessen Halbmesser mit n bezeichnet werde, und dessen Ebene der Koordinatenaxe z parallel ist, und bezeichnet man mit a das Perpendikel vom Mittelpunkte des Kreises m auf die Ebene des Kreises n, mit c das Perpen-

dikel vom Mittelpunkte des Kreises n auf die Ebene des Kreises m, mit b den Abstand beider Perpendikel, und ist, wie in obigen Versuchen der Fall war,

$$b = 0,$$

so erhält man für die Winkel α, β, γ, welche das Perpendikel auf die Ebene des Kreises n mit den Koordinatenaxen bildet, folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} \gamma &= 90^0 \\ \cos\alpha^2 + \cos\beta^2 &= 1 \\ \cos\alpha\cos\lambda + \cos\beta\cos\mu &= 0. \end{aligned}$$

Da ausserdem

$$\cos\lambda^2 + \cos\mu^2 + \cos\nu^2 = 1$$

gegeben ist, so erhält man

$$\cos\alpha = \frac{\cos\mu}{\sin\nu}, \qquad \cos\beta = -\frac{\cos\lambda}{\sin\nu}.$$

Für p und q erhält man ferner folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} p\cos\beta &= n\cos\nu \\ p^2 &= a^2 + n^2\cos\nu^2 \\ q &= c + n\sin\nu. \end{aligned}$$

Multiplicirt man nun die Komponenten X, Y, Z respektive mit den Kosinus der Winkel α, β, γ, welche das Perpendikel auf die Ebene des Kreises n mit den Koordinatenaxen macht, so giebt die Summe dieser Produkte die Komponente in der auf die Ebene des Kreises n senkrechten Richtung, nämlich:

$$= X\cos\alpha + Y\cos\beta + Z\cos\gamma,$$

oder, wenn man für X, Y, $\cos\alpha$, $\cos\beta$, und γ die gefundenen Werthe substituirt, und p und q eliminirt,

$$= -\frac{1}{2}\,ii'm^2\mathrm{d}s' . \left[3\,(a^2\sin\nu - cn\cos\nu^2)\int\frac{\sin\omega^2\,\mathrm{d}\omega}{r^5} - \sin\nu\int\frac{\mathrm{d}\omega}{r^3}\right],$$

worin

$$r^2 = a^2 + c^2 + m^2 + n^2 + 2cn\sin\nu - 2m\cos\omega\,.\sqrt{(a^2 + n^2\cos\nu^2)}.$$

Schreibt man in obigem Ausdrucke für die Länge des Kreiselements $\mathrm{d}s'$ seinen durch Bogenwerth und Halbmesser ausgedrückten Werth $= n\mathrm{d}\nu$, und multiplicirt dann mit dem Abstande des Elements von dem vertikalen Durchmesser des Kreises $= n\sin\nu$, so erhält man das Drehungsmoment der Kraft, in Beziehung auf den vertikalen Durchmesser des Kreises als Drehungsaxe,

$$= -\frac{1}{2}\,ii' . m^2n^2\sin\nu\,.\,\mathrm{d}\nu\left[3\,(a^2\sin\nu - cn\cos\nu^2)\int\frac{\sin\omega^2\,\mathrm{d}\omega}{r^5} - \sin\nu\int\frac{\mathrm{d}\omega}{r^3}\right].$$

Integrirt man diesen Ausdruck zwischen den Grenzen $\nu = 0$ bis $\nu = 2\pi$, so erhält man das Drehungsmoment, welches der Kreisstrom m auf den Kreisstrom n ausübt.

Bei der angegebenen Stellung der beiden Kreise gegen einander (wo nämlich ihre Ebenen auf einander senkrecht sind, und die darauf in ihren Mittelpunkten errichteten Perpendikel einander schneiden) können drei Hauptfälle unterschieden werden, die allein bei den obigen Versuchen vorkommen, nämlich entweder

1. die Ebene des Kreises m halbirt die Ebene des Kreises n, oder es ist $c = 0$; oder

2. die Ebene des Kreises n halbirt die Ebene des Kreises m, oder es ist $a = 0$; oder endlich

3. beide Ebenen halbiren einander wechselseitig, oder es ist $a = 0$ und $c = 0$.

Für den *ersten* Fall ergiebt sich folgender Ausdruck des auf den Kreis n wirkenden Drehungsmoments, nämlich:

$$-\frac{1}{2} ii' . m^2 n^2 \int_0^{2\pi} \sin \nu^2 \mathrm{d}\nu \left(3a^2 \int \frac{\sin \omega^2 \mathrm{d}\omega}{r^5} - \int \frac{\mathrm{d}\omega}{r^3}\right);$$

worin

$$r^2 = a^2 + m^2 + n^2 - 2m \cos \omega . \sqrt{(a^2 + n^2 \cos \nu^2)}.$$

Für den *zweiten* Fall ergiebt sich folgendes Drehungsmoment:

$$+\frac{1}{2} ii' . m^2 n^2 \int_0^{2\pi} \sin \nu \,\mathrm{d}\nu \left(3cn \cos \nu^2 \int \frac{\sin \omega^2 \,\mathrm{d}\omega}{r^5} + \sin \nu \int \frac{\mathrm{d}\omega}{r^3}\right),$$

worin

$$r^2 = c^2 + m^2 + n^2 + 2cn \sin \nu - 2mn \cos \nu \cos \omega.$$

Für den *dritten* Fall ergiebt sich folgendes Drehungsmoment:

$$+\frac{1}{2} ii' m^2 n^2 \int_0^{2\pi} \sin \nu^2 \,\mathrm{d}\nu \int \frac{\mathrm{d}\omega}{r^3},$$

worin

$$r^2 = m^2 + n^2 - 2mn \cos \nu \cos \omega.$$

Die erste Integration obiger Ausdrücke, nämlich in Beziehung auf ω, lässt sich nur ausführen, indem man $1/r^3$ und $1/r^5$ in Reihen nach wachsenden Potenzen von $\cos \omega$ entwickelt. Da r^2 die Form hat:

$$l^2 \,(1 - k \cos \omega),$$

so ergiebt sich:

$$\frac{1}{r^3} = \frac{1}{l^3}\left(1 + \frac{3}{2} k \cos\omega + \frac{15}{8} k^2 \cos\omega^2 + \frac{35}{16} k^3 \cos\omega^3 + \frac{315}{128} k^4 \cos\omega^4 + ..\right)$$

$$\frac{1}{r^5} = \frac{1}{l^5}\left(1 + \frac{5}{2} k \cos\omega + \frac{35}{8} k^2 \cos\omega^2 + \frac{105}{16} k^3 \cos\omega^3 + \frac{1155}{128} k^4 \cos\omega^4 + ..\right).$$

Da ferner

$$\pi = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\omega = \int_0^{2\pi} \sin\omega^2 d\omega = \int_0^{2\pi} \cos\omega^2 d\omega = 4\int_0^{2\pi} \sin\omega^2 \cos\omega^2 d\omega$$

$$= \frac{4}{3}\int_0^{2\pi} \cos\omega^4 d\omega = 8\int_0^{2\pi} \sin\omega^2 \cos\omega^4 d\omega = \text{etc.}$$

$$0 = \int_0^{2\pi} \cos\omega\, d\omega = \int_0^{2\pi} \sin\omega^2 \cos\omega\, d\omega = \int_0^{2\pi} \cos\omega^3 d\omega = \int_0^{2\pi} \sin\omega^2 \cos\omega^3 d\omega = \text{etc.},$$

so erhält man

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin\omega^2 d\omega}{r^5} = \frac{\pi}{l^5}\left(1 + \frac{35}{32} k^2 + \frac{1155}{1024} k^4 + ..\right)$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\omega}{r^3} = \frac{2\pi}{l^3}\left(1 + \frac{15}{16} k^2 + \frac{945}{1024} k^4 + ..\right).$$

Substituirt man diese Werthe, so erhält man für den *ersten* Hauptfall, wo $c = 0$ ist, den Werth des elektrodynamischen Drehungsmoments

$$= -\frac{\pi}{2}\frac{m^2 n^2}{l^3} i i' . \Sigma,$$

wo Σ folgenden Integralwerth bezeichnet:

$$\int_0^{2\pi} \sin\nu^2 d\nu \left[3\frac{a^2}{l^2}\left(1 + \frac{35}{32} k^2 + \frac{1155}{1024} k^4 + ..\right) - 2\left(1 + \frac{15}{16} k^2 + \frac{945}{1024} k^4 + ..\right)\right].$$

Es ist hierin

$$a^2 + m^2 + n^2 = l^2 \text{ und } 4(a^2 + n^2 \cos\nu^2) . \frac{m^2}{l^4} = k^2.$$

Substituirt man diesen Werth von k^2, und integrirt den nach Potenzen von $\cos\nu^2$ geordneten Ausdruck, so erhält man das elektrodynamische Drehungsmoment

$$= -\frac{\pi^2}{2}\frac{m^2 n^2}{l^3} i i' \left[3\frac{a^2}{l^2} - 2 + \frac{15}{32}\left(7\frac{a^2}{l^2} - 4\right)\left(4 + \frac{n^2}{a^2}\right)\frac{a^2 m^2}{l^4} + ..\right].$$

Dieser Ausdruck giebt also für den betrachteten ersten Hauptfall das Maass des Drehungsmoments, welches ein Ring vom Halbmesser $= m$ auf einen Ring vom Halbmesser $= n$ ausübt. Für ein System von Ringen, deren Halbmesser arithmetisch von 0 bis m wachsen, erhält man als Maass des Drehungsmoments, welches dasselbe auf den Ring vom Halbmesser $= n$ ausübt, das Integral des obigen mit dm multiplicirten Ausdrucks, zwischen den Grenzen $m = 0$ bis $m = m$ genommen. Setzt man Kürze halber

$$\frac{m^2}{a^2+n^2} = v^2; \quad \frac{n^2}{a^2+n^2} = w^2; \quad \frac{4a^2+n^2}{16(a^2+n^2)} = f; \quad \frac{8a^4+4a^2n^2+n^4}{64(a^2+n^2)^2} = g,$$

so ist das gesuchte elektrodynamische Drehungsmoment

$$= -\frac{\pi^2}{2} v^3 n^2 i i' . S,$$

wo S folgende Reihe bezeichnet:

$$\begin{aligned} S = & + \left[\frac{1}{3} - w^2\right] \\ & - \frac{3}{2}\left[\frac{3}{5} - w^2 - (3 - 7w^2) f\right] v^2 \\ & + \frac{15}{8}\left[\frac{5}{7} - w^2 - 2(5 - 9w^2) f + 3(5 - 11w^2) g\right] v^4 \\ & - \frac{35}{16}\left[\frac{7}{9} - w^2 - 3(7 - 11w^2) f + 11(7 - 13w^2) g\right] v^6 \\ & + \frac{315}{128}\left[\frac{9}{11} - w^2 - 4(9 - 13w^2) f + 26(9 - 15w^2) g\right] v^8 \\ & - \text{etc.} \end{aligned}$$

Eine genaue Vergleichung mit den Beobachtungen fordert, das Drehungsmoment zu bestimmen, welches ein System von solchen Ringsystemen mit gemeinschaftlicher Axe auf ein anderes ähnliches System ausübe, wozu noch mehrere Integrationen nöthig wären. Indess sieht man leicht ein, dass, wenn man von dem mittelsten dieser auf einer Axe befindlichen Ringsysteme ausgeht, die Wirkung desselben als Mittelwerth für je zwei symmetrisch zu beiden Seiten desselben liegende Systeme genommen werden dürfe, weil die Wirkung des einen der beiden letzteren nahe eben so viel jenen Mittelwerth übersteigt, als die Wirkung des anderen darunter bleibt. Es gilt dies um so mehr, je kleinere Bruchtheile die Halbmesser m und n von dem Abstande a der Mittelpunkte beider Systeme sind. Wir können daher bei dem zuletzt gegebenen Ausdrucke als Maass der Wirkung stehen bleiben.

Setzt man darin nun die aus der Beobachtung bekannten Werthe von m und n, nämlich in Millimetern:

$$m = 44{,}4$$
$$n = 55{,}8,$$

und für a successive folgende verschiedene Werthe:

1. $a' = 300$
2. $a'' = 400$
3. $a''' = 500$,

so erhält man folgende mit $\pi^2 i^2$ zu multiplicirende Werthe des Drehungsmoments:

1. $-$ 1,454 4
2. $-$ 0,654 7
3. $-$ 0,345 2.

Wendet man ein ähnliches Verfahren auf den *zweiten* Hauptfall an, wo $a = 0$ ist, so erhält man den Werth des elektrodynamischen Drehungsmoments

$$= + \pi^2 v^3 n^2 i i' . S,$$

worin Kürze halber

$$\frac{m^2}{c^2 + n^2} = v^2; \quad \frac{c^2}{c^2 + n^2} = f; \quad \frac{n^2}{c^2 + n^2} = 4 g v^2$$

gesetzt worden, und S folgende Reihe bezeichnet:

$$\begin{aligned} S = &+ \left[\frac{1}{3}\right] \\ &- \frac{3}{2}\left[\frac{1}{5} - \frac{10}{3} f g\right] v^2 \\ &+ \frac{15}{8}\left[\frac{1}{7} + \frac{2}{5}(1 - 14 f) g + 42 f^2 g^2\right] v^4 \\ &- \frac{35}{16}\left[\frac{1}{9} + \frac{3}{7}(2 - 18 f) g - \frac{54}{5}(1 - 11 f) f g^2 - 572 f^3 g^3\right] v^6 \\ &+ \frac{315}{128}\left[\begin{aligned} &\frac{1}{11} + \frac{4}{9}(3 - 22 f) g + \frac{12}{7}(1 - 22 f + 143 f^2) g^2 \\ &+ \frac{1144}{5}(1 - 10 f) f^2 g^3 + \frac{24310}{3} f^4 g^4 \end{aligned}\right] v^8 \\ &- \text{etc.} \end{aligned}$$

Setzt man nun in diesem Ausdrucke die aus der Beobachtung bekannten Werthe von m und n, nämlich in Millimetern:

$$m = 44{,}4$$
$$n = 55{,}8,$$

und für c successive folgende verschiedene Werthe:

1. $c' = 300$
2. $c'' = 400$
3. $c''' = 500$
4. $c'''' = 600,$

so erhält man folgende mit $\pi^2 i^2$ zu multiplicirende Werthe des Drehungsmoments:

1. $+ 3,5625$
2. $+ 1,4661$
3. $+ 0,7420$
4. $+ 0,4267.$

Für den *dritten* Hauptfall endlich, wo $a = c = 0$ und m/n ein echter Bruch ist, reicht es für unseren Zweck nicht hin, für n einen Mittelwerth anzunehmen, sondern man muss den für irgend ein n gefundenen Werth mit dn multipliciren, und das Integral dieses Produkts zwischen den durch die Beobachtung gegebenen Grenzwerthen von n, welche wir mit n' und n'' bezeichnen wollen, nehmen. Der hieraus sich ergebende Ausdruck ist dann noch mit $n'' - n'$ zu dividiren, um seinen Werth auf das Maass der für den ersten und zweiten Hauptfall gegebenen Ausdrücke zu reduciren, welche in Beziehung auf n nicht integrirt worden sind. Man erhält dann für diesen dritten Hauptfall, wo $a = 0$ und $c = 0$ ist, folgenden Ausdruck für das Drehungsmoment:

$$+\frac{\pi^2 m^3}{n''-n'} ii' \left[\begin{array}{l} \frac{1}{3}\log\text{nat}\frac{n''}{n'} + \frac{9}{160}\left(\frac{1}{n''^2}-\frac{1}{n'^2}\right)m^2 - \frac{225}{14336}\left(\frac{1}{n''^4}-\frac{1}{n'^4}\right)m^4 \\ + \frac{6125}{884736}\left(\frac{1}{n''^6}-\frac{1}{n'^6}\right)m^6 + \frac{694575}{184549376}\left(\frac{1}{n''^8}-\frac{1}{n'^8}\right)m^8 + \ldots \end{array}\right]$$

Setzt man in diesem Ausdrucke die aus der Beobachtung bekannten Werthe von m, n' und n'', nämlich in Millimetern:

$$m = 44,4$$
$$n' = 50,25$$
$$n'' = 61,35,$$

so erhält man folgenden mit $\pi^2 i^2$ zu multiplicirenden Werth des Drehungsmoments:

$$442,714.$$

Bei der Nachbarschaft der Rollen in diesem Falle muss endlich noch darauf Rücksicht genommen werden, dass nicht sämmtliche Windungen jeder Rolle in einer Ebene liegen. Wenn daher auch für die Mittelpunkte der mittleren Querschnitte beider Rollen die Abstände $a = 0$ und $c = 0$ sind, so gilt dies doch nicht für die übrigen Querschnitte.

Es ergiebt sich hieraus, wie man leicht sieht, eine Verkleinerung der Wirkung. In welchem Verhältnisse nun diese Verkleinerung zur ganzen Wirkung steht, lässt sich mit hinreichender Schärfe bestimmen, wenn man in der S. 72 gegebenen allgemeinen Formel, nach Substitution der Werthe von $1/r^3$ und $1/r^5$, sich blos an das erste von $\varkappa$ unabhängige Glied hält, und das zwischen den Grenzwerthen $\omega = 0$ bis $\omega = 2\pi$ genommene Integral desselben, nachdem es mit $n \sin \nu$ und mit $\mathrm{d}m\mathrm{d}n\mathrm{d}a\mathrm{d}c$ multiplicirt, und $n\mathrm{d}\nu$ für $\mathrm{d}s'$ gesetzt worden ist, zwischen den Grenzen $\nu = 0$ bis $\nu = 2\pi$, $m = 0$ bis $m = 44{,}4$, $n = 50{,}25$ bis $n = 61{,}35$, $a = 0$ bis $a = 15$ und $c = 0$ bis $c = 15$ integrirt. Führt man diese Rechnung aus, so erhält man einen Ausdruck von folgender Form

$$A\left(1 - \frac{\alpha^2}{5000} + \frac{\gamma^2}{22000}\right) . \alpha\gamma,$$

worin A blos von i und i' und den Grenzwerthen von m und n abhängig ist, und α und γ die grössten Werthe von a und c bezeichnen. Die gesuchte Verkleinerung, in Theilen der ganzen Wirkung ausgedrückt, ist hiernach

$$= \frac{1}{5000}\alpha^2 - \frac{1}{22000} \cdot \gamma^2,$$

und beträgt nach den angegebenen Zahlenwerthen $\alpha = \gamma = 15$

$$\frac{1}{29}.$$

Zieht man also von obigem Werthe $\frac{1}{29} \cdot 442{,}714$ ab, so erhält man folgenden mit $\pi^2 i^2$ zu multiplicirenden Werth des elektrodynamischen Drehungsmoments, welches dem *dritten Hauptfall* entspricht,

$$= 427{,}45.$$

Stellt man nun, nach Analogie mit den Beobachtungen, die gefundenen Rechnungsresultate zusammen, so erhält man folgende Tafel für die berechneten Werthe der elektrodynamischen Drehungsmomente:

Abstand	Senkrecht auf den magnetischen Meridian	In der Richtung des magnetischen Meridians
0	+ 427,45	+ 427,45
300	+ 3,5625	— 1,4544
400	+ 1,4661	— 0,6547
500	+ 0,7420	— 0,3452
600	+ 0,4267	—

Diese Werthe müssen nun, wenn das AMPÈRE'sche Gesetz richtig ist, den beobachteten Werthen proportional sein. In der That, multiplicirt man sämmtliche Werthe mit dem konstanten Faktor

53,06,

so erhält man den beobachteten sehr nahe kommende Werthe, welche nebst ihren Unterschieden von den letzteren in der folgenden Tafel enthalten sind.

Abstand	Senkrecht auf den magnetischen Meridian	Unterschied	In der Richtung des magnetischen Meridians	Unterschied
0	+ 22680	+ 280	+ 22680	+ 280
300	+ 189,03	+ 0,90	— 77,17	— 0,06
400	+ 77,79	— 0,34	— 34,74	+ 0,03
500	+ 39,37	— 0,10	— 18,31	— 0,07
600	+ 22,64	— 0,18	—	—

Der erste berechnete Werth, nämlich + 22680, ist hier mit dem 120,9fachen Werthe dessen verglichen worden, welcher bei 300 Millimeter östlichem oder westlichem Abstande erhalten worden war, weil dieser Werth, dem in Art. 6 aus der zweiten Versuchsreihe gezogenen Resultate gemäss, der Wirkung der festen Rolle entspricht, wenn ihr Mittelpunkt mit dem der Bifilarrolle zusammenfällt. Der dabei angegebene Unterschied von 280 Einheiten erscheint daher vergrössert und entspricht einem Beobachtungsfehler von $\frac{1}{3}$ Skalentheile, welcher in der zweiten Versuchsreihe Art. 5 in der Bestimmung der Dynamometer-Ablenkung bei 300 Millimeter Abstand begangen worden.

Diese vollkommene Uebereinstimmung zwischen den nach der Ampère'schen Formel berechneten und den beobachteten Werthen (die Unterschiede übersteigen nämlich nirgends den möglichen Betrag der unvermeidlichen Beobachtungsfehler) ist bei den so verschiedenen Verhältnissen, auf welche diese Uebereinstimmung sich bezieht, ein vollständiger Beweis der Wahrheit des Ampère'schen Fundamentalgesetzes.

Aus obiger Tafel ersieht man, dass die berechneten Werthe der elektrodynamischen Drehungsmomente sich theils positiv theils negativ ergeben. Die Bedeutung der verschiedenen Vorzeichen ist hierbei folgende. Die Ebenen der beiden Drahtrollen waren gegen einander rechtwinklicht vorausgesetzt worden. Das elektrodynamische Drehungsmoment, welches die feste Rolle auf die bewegliche (Bifilarrolle) ausübt, strebt daher die Ebene der letzteren der Ebene der ersteren parallel zu machen, was von der ursprünglichen rechtwinklichten Lage aus auf doppelte Weise, nämlich durch Drehung nach beiden Seiten hin, geschehen kann. Die eine dieser Drehungen führt nun zu einem solchen Parallelismus der Ebenen, wobei die Ströme um eine auf beide Ebenen senkrechte Axe in gleichem Sinne herumgehen; die andere Drehung führt dagegen zu einem solchen Parallelismus der Ebenen, wobei die Ströme in entgegengesetztem Sinne um eine solche Axe herumgehen. Die elektrodynamischen Drehungsmomente, je nachdem sie die erstere

oder die letztere Drehung bewirken, werden in der Rechnung als positiv oder negativ bezeichnet. Die Vorzeichen in obiger Tafel der berechneten Werthe lehren also, dass, wenn die feste Rolle auf die Bifilarrolle aus der Ferne von Norden oder Süden her wirkt, eine Drehung der Bifilarrolle erfolge, welche, wenn sie 90° betrüge, bewirken würde, dass die Ströme in *entgegengesetztem* Sinne um gleich gerichtete Axen herumgingen; wenn dagegen die feste Rolle aus der Ferne von Osten oder Westen her wirkt, eine Drehung der Bifilarrolle erfolge, welche, wenn sie 90° betrüge, bewirken würde, dass die Ströme in *gleichem* Sinne um gleich gerichtete Axen herumgingen. Das letztere findet der Rechnung nach auch dann Statt, wenn die Mittelpunkte beider Rollen zusammen fallen.

Auch diese Resultate der Rechnung fanden sich durch die Resultate aller Beobachtungen vollständig bestätigt. Die deshalb zu beachtenden Verhältnisse sind in der oben gegebenen Beschreibung blos deshalb nicht ausführlich erörtert worden, weil die vollständigen Angaben über den Sinn der Strömung in allen einzelnen Theilen der Leitungskette und über den Sinn der beobachteten Drehungen zu vielen Raum gekostet haben würden. Da übrigens zur Prüfung dieser Resultate der Rechnung keine exakten Messungen nöthig sind, so konnte die Bestätigung derselben auch mit den bisherigen Mitteln erlangt werden und ist damit auch schon erhalten worden, weshalb es hier genügt, die Uebereinstimmung der mitgetheilten Beobachtungen mit obigen Rechnungs-Resultaten nur im Allgemeinen zu bemerken.

9.

Das Ampère'sche Fundamentalgesetz giebt die berechneten Drehungsmomente in *absoluten Maassen* ausgedrückt, vorausgesetzt, dass den Werthen der Stromintensität i ein absolutes Intensitätsmaass zum Grunde gelegt werde, und zwar ist hierbei als Grundmaass der Stromintensitäten diejenige Stromintensität zu betrachten, bei welcher zwei gleiche parallele, auf der Verbindungslinie senkrechte Stromelemente aus dem dem Längenmaasse gleichen Abstande eine Kraft auf einander ausüben, welche von dem in der Mechanik festgesetzten Kraftmaasse denselben Bruchtheil bildet, wie das *Quadrat der Länge jener Stromelemente* von dem *Flächenmaasse.* Denn setzt man in der Ampère'schen Formel für die Grösse der elektrodynamischen Kraft zweier Stromelemente von der Länge a und von gleicher Stromintensität, nämlich:

$$-\frac{a^2}{r^2}\, i^2 (\cos \varepsilon - \tfrac{3}{2} \cos \vartheta \cos \vartheta'),$$

1. den Winkel ε, welchen beide Stromelemente mit einander bilden, $= 0^0$ oder $= 180^0$; 2. die Winkel ϑ und ϑ', welche beide Stromelemente mit der Verbindungslinie bilden, $= 90^0$ oder $= 270^0$; 3. den Abstand $r = 1$; so erhält man als Werth der elektrodynamischen Kraft für die *Einheit* der Stromintensität

$$\pm a^2,$$

d. h. in der AMPÈRE'schen Formel wird ein solches Maass der Stromintensität vorausgesetzt, bei welchem die *elektrodynamische Kraft in dem bezeichneten Falle* sich zu dem *Kraftmaasse* verhält, wie

$$a^2 : 1,$$

d. i. wie das *Quadrat der Länge jener Stromelemente* zum *Flächenmaass.* Diesem Grundmaasse für die Stromintensität liegt also das *elektrodynamische Princip* selbst zum Grunde.

Zum Zweck unserer Messungen haben wir dagegen dem Maasse der Stromintensität das *elektromagnetische Princip* zum Grunde gelegt, wonach als Grundmaass der Stromintensitäten diejenige Stromintensität zu betrachten ist, welche in einem das Flächenmaass begrenzenden Leiter Statt finden muss, um auf einen *entfernten Magnet* gleiche Wirkungen hervorzubringen, wie ein Magnet an derselben Stelle, dessen magnetisches Moment dem von GAUSS in der *Intensitas* etc. festgesetzten absoluten Maasse gleich ist, und dessen Axen gleiche Richtung hat, wie die Normale der Stromebene.

Diese beiden Grundmaasse lassen sich nun nach der von AMPÈRE gegebenen Relation zwischen der *Elektrodynamik* und dem *Elektromagnetismus* mit einander vergleichen. Denn nach dieser Relation kann auch der andere *entfernte Magnet* auf gleiche Weise, wie der erstere, durch einen geschlossenen Strom ersetzt werden.

Nun wird das Drehungsmoment eines Magnets auf einen anderen entfernten Magnet, wenn ihre magnetischen Momente nach absolutem Maasse $= m$ und m' sind, wie sich aus den von GAUSS gegebenen Vorschriften (Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins im Jahre 1840. S. 26—34 [1]) leicht ergiebt,

$$= \frac{mm'}{r^3} \sin \delta \cdot \sqrt{1 + 3 \cos \psi^2}$$

gefunden, wo ψ den Winkel bezeichnet, welchen die Axe des ersten Magnets mit der Verbindungslinie r, und δ den Winkel, welchen die Axe des zweiten Magnets mit derjenigen Richtung einschliesst, für welche das Drehungsmoment $= 0$ ist.

[1]) [GAUSS' Werke, Bd. V, p. 427 bis 435.]

Setzt man nun an die Stelle des ersten Magnets einen Strom von der Intensität $\varkappa$, der die kleine Ebene λ begrenzt, deren Normale gleiche Richtung wie die Axe des Magnets hat, so ergiebt sich nach dem *elektromagnetischen* Fundamentalgesetze (wonach die Stärke der elektromagnetischen Kraft eines Stromelements von der Länge a und Intensität $\varkappa$ auf ein Element magnetischen Fluidums μ in der Entfernung r, wenn r mit a den Winkel φ einschliesst, $= a\varkappa\mu \sin\varphi / r^2$ gegeben ist, und zwar normal auf die Ebene, welche mit a und r parallel ist) das von diesem Strome auf den entfernten Magnet ausgeübte Drehungsmoment

$$= \frac{\varkappa\lambda \cdot m'}{r^3} \sin\delta \cdot \sqrt{1 + 3\cos\psi^2},$$

worin für die Stromintensität $\varkappa$ das oben angegebene *elektromagnetische Maass* zum Grunde liegt. Es muss also, dieser Maassbestimmung gemäss,

$$\varkappa\lambda = m$$

sein, wenn dieses Drehungsmoment dem vorigen gleich sein soll.

Nach der von Ampère gegebenen Relation kann nun ohne Aenderung der Wirkung auf gleiche Weise *der zweite Magnet durch einen geschlossenen Strom ersetzt werden*, für welchen

$$\varkappa'\lambda' = m'$$

ist, und es ergiebt sich daraus die Grösse des Drehungsmoments, welches der erste Strom auf den zweiten ausübt,

$$= \frac{\varkappa\varkappa'\lambda\lambda'}{r^3} \sin\delta \cdot \sqrt{1 + 3\cos\psi^2},$$

worin für die Stromintensitäten $\varkappa$ und $\varkappa'$ das oben angegebene *elektromagnetische Maass* zum Grunde liegt.

Berechnet man nun aber nach der Ampère'schen Formel (S. 70) das Drehungsmoment, welches ein solcher kleiner Planstrom auf einen anderen aus grosser Entfernung ausübt, so ergiebt sich dessen Werth

$$= -\frac{1}{2}\frac{ii'\lambda\lambda'}{r^3} \sin\delta \cdot \sqrt{1 + 3\cos\psi^2},\text{ [1]}$$

[1] Der Fall, wo $\delta = \psi = 90^0$ ist, folglich das elektrodynamische Drehungsmoment

$$= -\frac{1}{2}\frac{ii'\lambda\lambda'}{r^3}$$

ist, entspricht dem früher betrachteten *ersten Hauptfalle*, für welchen die Stärke des Drehungsmoments S. 74

$$= -\frac{\pi^2}{2}\frac{m^2n^2}{l^3}ii'\left[3\frac{a^2}{l^2} - 2 + \frac{15}{32}\left(7\frac{a^2}{l^2} - 4\right)\left(4 + \frac{n^2}{a^2}\right)\frac{a^2m^2}{l^4} + \dots\right]$$

gefunden worden ist. Für grosse Entfernungen, wie hier vorausgesetzt worden, verschwindet m und n gegen l, und r kann für a und l gesetzt werden; das Drehungsmoment wird also für diesen Fall

$$= -\frac{\pi^2}{2}\frac{m^2n^2}{r^3}ii',$$

worin für die Stromintensitäten i und i' das oben angegebene *elektrodynamische Maass* zum Grunde liegt.

was mit dem aus obiger Formel für diesen Fall abgeleiteten Werthe identisch ist, weil πm^2 und πn^2 die Flächenräume λ und λ' bezeichnen.

Die oben angeführten *analogen* Gesetze des Magnetismus, des Elektromagnetismus und der Elektrodynamik, aus denen der einfache Zusammenhang dieser verschiedenen Klassen von Erscheinungen leicht übersehen werden kann, welcher unmittelbar aus den *Grundgesetzen* nicht einleuchtet, können aus letzteren auf folgende Weise abgeleitet werden.

1. Ableitung des Gesetzes der magnetischen Wirkung, welche ein Magnetstab auf einen anderen in der Ferne ausübt.

Aus dem *Grundgesetz des Magnetismus* hat Gauss in den „Resultaten etc. 1840" S. 26ff.*) das Gesetz der magnetischen Wirkung abgeleitet, welche ein Magnetstab auf die in einem entfernten Punkte koncentrirt gedachte Einheit des nördlichen magnetischen Fluidums ausübt. Dieses Gesetz ist folgendes: Wenn Fig. 12 A der Mittelpunkt des Magnetstabs ist, dessen magnetisches Moment mit m bezeichnet werde, n ein beliebiger anderer Punkt seiner durch A gelegten magnetischen Axe auf der Seite des Nordpols, C der Punkt, für welchen die magnetische Wirkung des Magnetstabs auf die daselbst koncentrirt gedachte Einheit des nördlichen magnetischen Fluidums bestimmt werden soll, und wenn CB eine Normale gegen CA in derjenigen Ebene ist, in welcher n, A, C liegen, und B ihr Durchschnittspunkt mit der magnetischen Axe, und wenn endlich D von AB das Stück $AD = \frac{1}{3} AB$ abschneidet: so ist *die Stärke* der Kraft, welche der Magnetstab auf die in C koncentrirt gedachte Einheit des nördlichen magnetischen Fluidums ausübt,

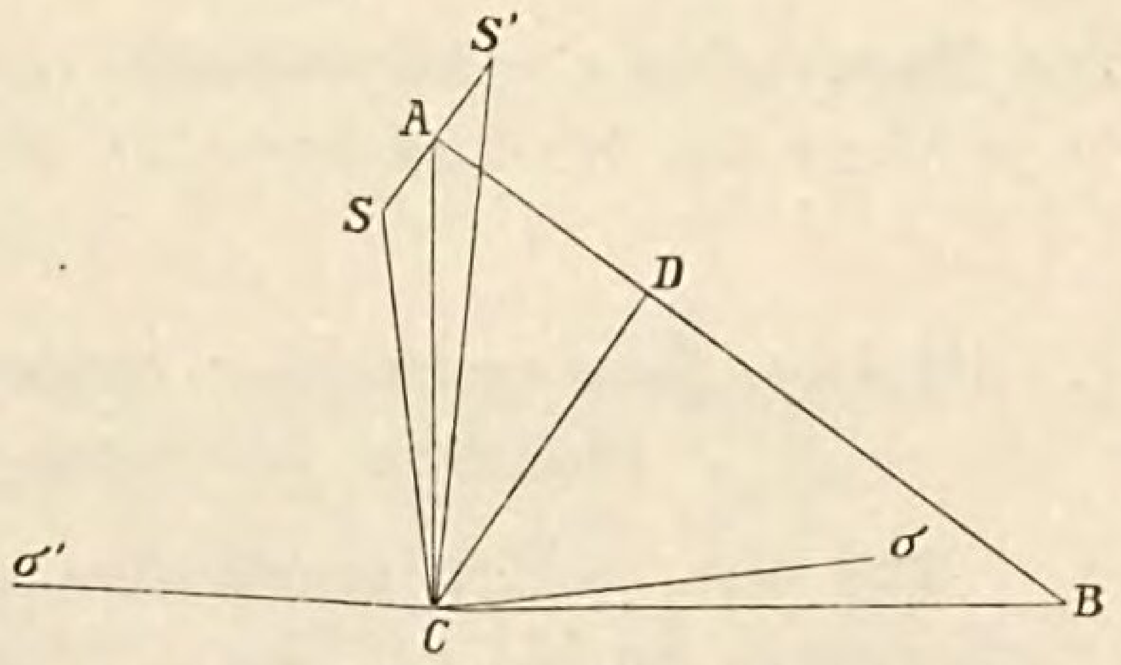


Fig. 12.

$$= \frac{CD}{AD} \cdot \frac{m}{AC^3}.$$

Die *Richtung* dieser Kraft ist, wenn nAC ein stumpfer Winkel ist, CD, wenn nAC ein spitzer Winkel ist, DC.

Nun ist im Dreieck ABC, weil $ACB = 90^0$ ist,

$$AC = AB \cos BAC = 3AD \cos DAC.$$

Ferner ist in dem Dreieck ACD

$$CD = \sqrt{AC^2 + AD^2 - 2AC \,.\, AD \,.\, \cos DAC} = AD \,.\, \sqrt{1 + 3 \cos DAC^2},$$

folglich ist

$$\frac{CD}{AD} = \sqrt{1 + 3 \cos DAC^2}.$$

Setzt man $AC = r$ und $nAC = \psi$, so ist, da $\cos DAC^2 = \cos nAC^2 = \cos \psi^2$, die *Stärke* der Kraft

$$\frac{CD}{AD} \cdot \frac{m}{AC^3} = \frac{m}{r^3} \cdot \sqrt{1 + 3 \cos \psi^2}.$$

*) [Gauss' Werke, Bd. V, p. 427.]

Es folgt nun hieraus, dass, wenn der letztere Werth, nach dem *elektrodynamischen* Maasse, mit dem ersteren, nach dem *elektromagnetischen*

Befindet sich in einem Stahlstabe bei C die nordmagnetische Masse $+\mu$ und die südmagnetische Masse $-\mu$ durch die gegen r unendlich kleine Linie a geschieden, so ist $a\mu = m'$ das magnetische Moment des Stahlstabs und $+\frac{m\mu}{r^3}\sqrt{1+3\cos\psi^2}$ und $-\frac{m\mu}{r^3}\sqrt{1+3\cos\psi^2}$ sind die beiden Kräfte, welche auf ihn in der Richtung CD oder DC wirken. Ist n' der Endpunkt der kleinen Linie a, in welchem die Masse $+\mu$ koncentrirt gedacht wird, und C ihr Mittelpunkt, und bezeichnet δ den Winkel, welchen Cn' mit der Richtung CD oder DC der oben bestimmten Kraft bildet, so ist $a\sin\delta$ der Abstand der Angriffspunkte beider Kräfte senkrecht gegen ihre Richtung geschätzt. Das Produkt dieses Abstandes in den Werth obiger Kraft giebt dann das Drehungsmoment, welches der Magnetstab in A auf den Magnetstab in C ausübt,

$$= a\sin\delta\cdot\frac{m\mu}{r^3}\sqrt{1+\cos 3\psi^2} = \frac{mm'}{r^3}\sin\delta\sqrt{1+3\cos\psi^2}.$$

Der Magnet bei C wird dadurch in der Ebene ACD in demjenigen Sinne gedreht, in welchem Cn der Richtung CD oder DC der oben bestimmten Kraft genähert wird.

2. *Ableitung des Gesetzes der elektromagnetischen Wirkung, welche ein geschlossener Planstrom auf einen Magnetstab in der Ferne ausübt.*

Aus dem *elektromagnetischen Grundgesetze* kann zunächst die Wirkung eines geschlossenen Stroms auf die nordmagnetische Masse $+\mu$ des Magnetstabs, welche in einem Punkte bei C Fig. 12 koncentrirt gedacht wird, bestimmt werden. Man lege durch C und durch den Mittelpunkt A der vom Strome begrenzten Ebene eine auf letztere senkrechte Ebene ACB, CB sei senkrecht auf CA; s und s' seien die Durchschnittspunkte des Stroms mit dieser Ebene. Man zerlege ferner jedes Stromelement in drei aufeinander senkrechte Elemente, das erste nach C gerichtet und das zweite senkrecht auf die Richtung CB. Die nach C gerichteten Elemente haben auf den Magnetismus in C keine Wirkung und können also ganz ausser Betracht bleiben, weil für sie in dem allgemeinen Ausdrucke der Stärke der Kraft $= a\varkappa\mu\sin\varphi/r^2$ der Werth von $\varphi = 0$ ist. Zur zweiten Klasse gehören die beiden in s und s' auf der Ebene ACB perpendikularen Elemente, deren Länge mit ds bezeichnet werde. Die Kraft, welche das erstere auf den Magnetismus in C ausübt, hat dem elektromagnetischen Grundgesetze nach die Richtung $C\sigma$ senkrecht gegen Cs; die Kraft des letzteren hat die Richtung $C\sigma'$ senkrecht gegen Cs', und die Stärke dieser Kräfte ist, wenn $\varkappa$ die Stromintensität nach elektromagnetischem Grundmaasse bezeichnet,

$$\frac{\varkappa\mu\,ds}{Cs^2} \text{ und } \frac{\varkappa\mu\,ds}{Cs'^2}.$$

Zerlegt man nun diese Kräfte nach CA und senkrecht darauf, so erhält man

$$\text{die mit } CA \text{ parallele Komponente} = \frac{\varkappa\mu\,ds}{Cs^2}\cos AC\sigma + \frac{\varkappa\mu\,ds}{Cs'^2}\cos AC\sigma'$$

$$\text{die auf } CA \text{ senkrechte Komponente} = \frac{\varkappa\mu\,ds}{Cs^2}\sin AC\sigma - \frac{\varkappa\mu\,ds}{Cs'^2}\sin AC\sigma'.$$

Bezeichnet man nun den Winkel, welchen die Normale der Stromebene AB mit $AC = r$ bildet, durch ψ und beachtet, dass As und As' gegen r verschwinden soll, so erhält man

Maasse, identisch sein soll, die oben definirten elektrodynamischen und elektromagnetischen Maasse der Stromintensitäten in solchem Verhält-

$$Cs = r - As \cos\psi, \quad Cs' = r + As' \cos\psi$$

oder $$\frac{1}{Cs} = \frac{1}{r}\left(1 + \frac{As}{r}\cos\psi\right), \quad \frac{1}{Cs'} = \frac{1}{r}\left(1 - \frac{As'}{r}\cos\psi\right);$$

$$\cos AC\sigma = \sin ACs = ACs$$

$$\cos AC\sigma' = \sin ACs' = ACs'$$

$$sCs' = \frac{(ss')}{r}\cos\psi.$$

Substituirt man diese Werthe, und bezeichnet die Entfernung ss' mit x, so erhält man die Kompenente nach CA

$$= \frac{\varkappa\mu}{r^3}\cos\psi \,.\, x\,\mathrm{d}s.$$

Da alle Stromelemente sehr nahe um A liegen, so kann der Faktor $\frac{\varkappa\mu}{r^3}\cos\psi$ als konstant betrachtet werden, und man erhält also die Komponente nach CA für alle Stromelemente zweiter Klasse:

$$= \frac{\varkappa\mu}{r^3}\cos\psi \,.\int x\,\mathrm{d}s.$$

Das Integral $\int x\,\mathrm{d}s$ bezeichnet aber den vom Strome begrenzten Flächenraum $= \lambda$; folglich ist die Komponente nach CA für alle Stromelemente *zweiter* Klasse

$$= \frac{\varkappa\lambda\mu}{r^3}\cos\psi.$$

Ebenso ergiebt sich die Komponente senkrecht auf CA für alle Stromelemente *zweiter* Klasse

$$= \frac{\varkappa\lambda\mu}{r^3}\sin\psi.$$

Auf ähnliche Weise findet man ferner die Komponente nach CA für alle Stromelemente *dritter* Klasse

$$= \frac{\varkappa\lambda\mu}{r^3}\cos\psi,$$

die Komponente senkrecht auf CA für alle Stromelemente *dritter* Klasse

$$= 0.$$

Die Resultante aller dieser Kräfte ist also

$$= \frac{\varkappa\lambda\mu}{r^3}\sqrt{4\cos\psi^2 + \sin\psi^2} = \frac{\varkappa\lambda\mu}{r^3}\sqrt{1 + 3\cos\psi^2}.$$

Die Richtung dieser Resultante fällt in die Ebene ACB und macht mit CA einen Winkel, dessen Tangente der Komponente senkrecht auf AC, $= \varkappa\lambda\mu\sin\psi / r^3$, dividirt durch die Komponente nach AC, $= 2\varkappa\lambda\mu\cos\psi / r^3$, gleich ist, d. i.

$$= \tfrac{1}{2}\,\mathrm{tang}\,\psi.$$

Da nun $CAB = \psi$ und $ACB = 90^0$ ist, so ist, wenn $AD = \frac{1}{3}AB$ gemacht wird,

$$\sin ACD : \sin\psi = \tfrac{1}{3}AB : CD$$

$$\cos ACD : \cos\psi = \tfrac{2}{3}AB : CD,$$

folglich

$$\mathrm{tang}\,ACD = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{tang}\,\psi,$$

nisse zu einander stehen müssen, dass $\varkappa$ und $\varkappa'$ nach dem letzteren Maasse die nämlichen Stromintensitäten bezeichnen wie $i\sqrt{1/2}$ und $i'\sqrt{1/2}$

woraus hervorgeht, dass CD die Richtung der Resultante ist. Hierbei ist vorausgesetzt, dass, wenn man sich senkrecht auf die Stromebene in A stehend denkt, den Kopf in B, der Strom im Sinne der scheinbaren täglichen Bewegung der Sonne herumlaufe. Findet das Entgegengesetzte Statt, so ist die Richtung der Kraft CD mit DC zu vertauschen. Hiernach hat der geschlossene Strom in A auf den Magnetismus in C dieselbe Wirkung, wie nach (1) ein Magnetstab in A, dessen magnetisches Moment

$$m = \varkappa\lambda$$

ist und dessen magnetische Axe mit der Normale der Stromebene zusammenfällt, und zwar den Südpol auf derjenigen Seite der Stromebene, von welcher aus betrachtet der Strom in der Richtung der scheinbaren täglichen Bewegung der Sonne läuft. Es folgt daraus, dass, wenn man wie in (1) in C einen Magnetstab stellt, dessen magnetisches Moment $= m'$ ist, und dessen magnetische Axe mit CD den Winkel δ macht, das Drehungsmoment, welches der geschlossene Strom in A auf diesen Magnetstab übt, dem in (1) gefundenen Drehungsmomente gleich ist, wenn man darin m mit $\varkappa\lambda$ vertauscht, also

$$= \frac{\varkappa\lambda m'}{r^3} \sin\delta \sqrt{1 + 3\cos\psi^2},$$

was zu beweisen war.

3. *Ableitung des Gesetzes der elektrodynamischen Wirkung, welche ein geschlossener Planstrom auf einen anderen in der Ferne ausübt.*

Das Gesetz der Wirkung, welche ein geschlossener Planstrom auf ein *Stromelement* in der Ferne ausübt, hat Ampere schon S. 214, 227 seiner Abhandlung aus dem Grundgesetze der Elektrodynamik abgeleitet. Es lässt sich dasselbe auf folgende Weise aussprechen: Befindet sich das Stromelement in C Fig. 12 und der geschlossene Planstrom in A, ist AB die Normale auf der Stromebene, CB senkrecht auf CA, und $AD = \frac{1}{3}AB$, so ist die Kraft, welche der Strom in A auf das Stromelement in C übt, auf den beiden Richtungen des Stromelements selbst und der Linie CD senkrecht, und die Stärke der Kraft ist, wenn nach dem elektrodynamischen Grundmaasse die Intensität des geschlossenen Stroms mit i, und die des Stromelements mit i' bezeichnet wird, und ferner ds' die Länge des Stromelements, $r = AC$ und $\psi = CAD$ ist,

$$= \frac{1}{2} i i' ds' \frac{\lambda}{r^3} \sqrt{1 + 3\cos\psi^2}.$$

Befindet sich nun auch in C ein geschlossener Planstrom und schliesst die Normale seiner Ebene mit CD den Winkel δ ein, so kann man jedes Element dieses Stroms in zwei Elemente zerlegen, das eine parallel der Linie, in welcher eine auf CD normale Ebene die Stromebene schneidet, das andere senkrecht auf dieser Schneidungslinie. Die ersteren Elemente kann man paarweise von gleicher Länge ds' ordnen und durch Perpendikel auf jener Schneidungslinie verbinden. Bezeichnet man die Länge dieses Perpendikels mit x, so ergiebt sich, dass die Wirkung des geschlossenen Stroms in A auf ein solches Paar in einem Drehungsmomente besteht, welches dem Produkte von $x \sin\delta$ in obige Kraft gleich ist, d. i.

$$= \frac{1}{2} i i' \frac{\lambda}{r^3} \sin\delta \sqrt{1 + 3\cos\psi^2} \,.\, x ds'.$$

nach dem ersteren. Hieraus ergiebt sich, dass alle nach dem *elektromagnetischen* Grundmaasse gemachten Bestimmungen der Stromintensitäten mit dem konstanten Faktor $\sqrt{2}$ zu multipliciren sind, um sie auf das der Ampère'schen Formel zum Grunde liegende *elektrodynamische* Intensitätsmaass zu reduciren.

Dies vorausgesetzt, lässt sich selbst auch noch der *konstante Faktor*, mit welchem alle berechneten Werthe zu multipliciren sind, um die beobachteten zu geben, aus den Galvanometer-Beobachtungen ableiten, und die Vergleichung des so bestimmten Faktors mit dem oben angewendeten, nämlich mit

$$53{,}06,$$

giebt dann endlich noch den Prüfstein für die Richtigkeit der aus Ampère's Formel berechneten *absoluten* Werthe, oder für die Richtigkeit der zwischen der Elektrodynamik und dem Elektromagnetismus gegebenen Relation.

Es wird hierzu dreierlei erfordert: 1. ist der Faktor zu bestimmen, mit welchem alle von uns beobachteten Dynamometerwirkungen zu multipliciren sind, um sie auf das absolute Maass der *Drehungsmomente* zu reduciren; 2. ist der Faktor zu bestimmen, mit welchem alle von uns beobachteten Galvanometerwirkungen zu multipliciren sind, um sie auf das *elektromagnetische Grundmaass der Stromintensitäten* zu reduciren; 3. sind die *Flächenräume* zu bestimmen, welche von der Bifilarrolle und von der festen Rolle des Dynamometers begrenzt werden.

1. Bestimmung des Faktors zur Reduktion der beobachteten Dynamometerwirkungen auf absolutes Maass.

Die beobachteten Dynamometerablenkungen sind nach *Skalentheilen* gemessen und sind daher, um sie auf absolutes *Winkelmaass* zu bringen, bei der Kleinheit der Winkel, blos mit dem doppelten Horizontalabstande des Spiegels von der Skale (= 6 612,6 Skalentheilen) zu dividiren. Es

Der Strom in A übt also auf alle mit obiger Schneidungslinie parallelen Stromelemente das Drehungsmoment

$$= \frac{1}{2} i i' \frac{\lambda}{r^3} \sin\delta \sqrt{1 + 3\cos\psi^2} \,.\, \int x \,\mathrm{d}s$$

aus, wo das Integral $\int x\,\mathrm{d}s'$ den von dem Strome in C begrenzten Flächenraum $= \lambda'$ bezeichnet; folglich ist dieses Drehungsmoment

$$= \frac{1}{2} i i' \frac{\lambda\lambda'}{r^3} \sin\delta \,.\, \sqrt{1 + 3\cos\psi^2}.$$

Betrachtet man auf ähnliche Weise die Wirkung des geschlossenen Stroms in A auf die gegen obige Scheidungslinie senkrechten Elemente, so ergiebt sich das Drehungsmoment = 0, woraus folgt, dass das soeben angegebene Drehungsmoment die ganze Wirkung ist, welche der geschlossene Strom in A auf den geschlossenen Strom in C ausübt, was zu beweisen war.

entspricht ferner die angegebene Zahl der Skalentheile der Differenz der positiven und negativen Ablenkung, und ist daher ausserdem noch mit 2 zu dividiren, um sie auf die einfache Ablenkung zu reduciren. Bezeichnet also x die in den obigen Tafeln angegebene *Zahl der Skalentheile*, so giebt

$$\frac{x}{13\,225{,}2}$$

die einfache *Angularablenkung* in Theilen des Halbmessers. Bezeichnet ferner S das im 6. Artikel angegebene *statische Moment* der Bifilarrolle, worauf die Ablenkungen reducirt worden sind, so braucht man, wenn x den reducirten Werth bezeichnet, die Angularablenkung $= x/13\,225{,}2$ nur mit jenem Werthe von S zu multipliciren, um das *elektrodynamische Drehungsmoment*, welches die Ablenkung hervorbrachte, nach den in der Statik festgesetzten Grundmaassen ausgedrückt zu erhalten. Es ist also dieses Moment

$$= \frac{x}{13\,225{,}2} \cdot S = 3\,634 \,.\, x.$$

Folglich ist 3 634 der konstante Faktor, womit die am Schlusse von Art. 6 angegebenen Dynamometerablenkungen zu multipliciren sind, um auf absolutes Maass reducirt zu werden.

2. Bestimmung des Faktors zur Reduktion der beobachteten Galvanometerwirkungen auf absolutes Maass.

Die Galvanometerwirkungen sind oben ebenfalls in *Skalentheilen* angegeben, und zwar entspricht die angegebene Zahl y der Differenz der positiven und negativen Ablenkung. Da nun der horizontale Abstand des Spiegels von der Skale beim Galvanometer 1 103 Skalentheile betrug, so ergiebt sich die einfache *Angularablenkung* nach absolutem Winkelmaasse, d. h. in Theilen des Halbmessers,

$$= \frac{y}{4\,412}.$$

Diese Angularablenkung wurde durch eine Drahtrolle hervorgebracht, durch welche der zu bestimmende Strom ging, und die in 217 Millimeter Abstand westlich von dem kleinen Magnetometer aufgestellt war.

Multiplicirt man den Sinus dieser Angularablenkung mit der Direktionskraft $= m'T$, welche der Erdmagnetismus $= T$ auf die Boussole übte, deren magnetisches Moment $= m'$ war, so erhält man das Drehungsmoment, womit der Erdmagnetismus die abgelenkte Boussole zum magnetischen Meridian zurücktrieb,

$$= m'T \,.\, \sin \frac{y}{4\,412} \cdot \frac{180^0}{\pi}.$$

Es ist hierin nach absolutem Maasse der Werth von

$$T = 1{,}91$$

zu setzen, wie derselbe am Platze der Boussole gefunden worden war.[1])

Die Boussole wurde nun in jener abgelenkten Lage im Gleichgewicht erhalten, durch dasjenige Drehungsmoment, welches der Strom in der 217 Millimeter entfernten Drahtrolle auf sie übte, und es war folglich die Stärke dieses letzteren Drehungsmoments gleichfalls

$$= 1{,}91 \,.\, m' \sin \frac{y}{4\,412} \cdot \frac{180^0}{\pi} .$$

Nach dem S. 84 in der Anmerkung unter (2) erwiesenen Gesetze würde nun, wenn der Strom hierbei aus einer *grossen* Entfernung r gewirkt hätte, dieses letztere Drehungsmoment

$$= \frac{\varkappa\lambda m'}{r^3} \sin \delta \,.\, \sqrt{1 + 3 \cos \psi^2}$$

sein, worin der Werth von ψ für unseren Fall $= 0$, und δ die Ergänzung des beobachteten Ablenkungswinkels zu 90^0 ist, wodurch dieser Ausdruck

$$= 2 \frac{\varkappa\lambda m}{r^3} \cos \frac{y}{4\,412} \cdot \frac{180^0}{\pi}$$

wird. Es ist nun aber die Entfernung von 217 Millimetern viel zu klein, um dieses Gesetz unmittelbar in Anwendung zu bringen. Ich habe daher, um diese Anwendung zu vermitteln, besondere Versuche angestellt zur Vergleichung der Wirkung der Rolle aus 217 Millimeter Entfernung mit ihrer Wirkung aus grösseren Entfernungen r, für welche obiges Gesetz zulässig ist, und habe das Verhältniss dieser Wirkungen wie

$$1 : 1\,388 \cdot \frac{10^4}{r^3}$$

gefunden. Das beobachtete Drehungsmoment $= 1{,}91 \,.\, m' \sin \frac{y}{4\,412} \cdot \frac{180^0}{\pi}$ muss also mit dem Faktor

$$1\,388 \cdot \frac{10^4}{217^3}$$

multiplicirt werden, wenn es dem für grosse Entfernungen geltenden Ausdrucke gleich gesetzt werden soll; man erhält also

$$1\,388 \cdot \frac{10^4}{217^3} \cdot 1{,}91 \cdot m' \sin \frac{y}{4\,412} \cdot \frac{180^0}{\pi} = 2 \frac{\varkappa\lambda m'}{217^3} \cdot \cos \frac{y}{4\,412} \cdot \frac{180^0}{\pi},$$

[1]) Die Boussole stand nahe an der Wand eines Nebenzimmers, in welchem grosse Magnete aufgestellt waren; wurden diese Magnete entfernt, so sank der Werth von T auf 1,83 herab, was ungefähr der gegenwärtige Werth des horizontalen Theils des Erdmagnetismus in Leipzig ist.

und hieraus folgt bei kleinen Bögen der Werth

$$\varkappa\lambda = 3\,004\,.\,y.$$

Durch genaue Abmessung war aber

$$\lambda = 8\,313\,440 \text{ Quadratmillimeter}$$

gefunden worden. Hieraus ergiebt sich

$$\varkappa = 0{,}000\,361\,4\,.\,y,$$

woraus folgt, dass

$$0{,}000\,361\,4$$

der Faktor ist zur Reduktion der beobachteten Galvanometerwirkungen auf das *elektromagnetische* Grundmaass der Stromintensität. Es ist dieser Faktor schon oben im 6. Artikel zum Zwecke der Reduktion der Beobachtungen auf gleiche Direktionskraft der Bifilarrolle angeführt worden. Die Stromintensität i nach dem der Ampère'schen Formel zum Grunde liegenden *elektrodynamischen* Grundmasse erhält man endlich durch Multiplikation der in Skalentheilen beobachteten Wirkungen mit dem Faktor $0{,}000\,361\,4\,.\,\sqrt{2}$. Es ist jedoch zu bemerken, dass dieser Reduktionsfaktor auf Erfahrungsdaten beruhet, welche zum Theil nur beiläufig erhalten worden und daher auf keine grosse Präcision Anspruch machen.

3. Bestimmung der Flächenräume, welche von der Bifilarrolle und von der festen Rolle des Dynamometers begrenzt werden.

Der Flächenraum der Bifilarrolle ist schon im 6. Artikel

$$= 29\,314\,000 \text{ Quadratmillimeter}$$

angegeben worden. Auf dieselbe Weise wie dieser war auch der Flächenraum der anderen festen Rolle des Dynamometers bestimmt worden, nämlich

$$= 31\,327\,000 \text{ Quadratmillimeter}.$$

Es leuchtet ein, dass auch diese Bestimmung in Betracht der indirekten Methode, nach welcher sie gefunden worden, auf keine grosse Präcision Anspruch machen könne.

Mit Hülfe dieser drei Bestimmungen lässt sich nun endlich auch noch der *absolute* Werth der elektrodynamischen Wirkungen, wie er sich aus Ampère's Fundamentalgesetz ergiebt, der erfahrungsmässigen Prüfung unterwerfen. Aus (2) ergiebt sich nämlich der Werth von i^2, welcher der *normalen* Stromintensität, auf welche die Beobachtungen reducirt sind, entspricht. Setzt man nämlich für dieselbe nach S. 67

$$y^2 = 100\,000,$$

so ist

$$i^2 = 2\varkappa^2 = 2\,.\,0{,}000\,361\,4^2\,.\,y^2 = 0{,}026\,12.$$

Ferner ersieht man leicht, dass in der S. 76 nach der AMPÈRE'schen Formel gemachten Berechnung des elektrodynamischen Drehungsmoments, der Flächenraum der Bifilarrolle nur zu

$$\pi \,.\, 55{,}8^2 \text{ Quadratmillimetern}$$

in Anschlag gebracht worden ist, statt derselbe sich nach (3)

$$= 29\,314\,000 \text{ Quadratmillimeter}$$

ergeben hat, und dass auf gleiche Weise der Flächenraum der festen Rolle des Dynamometers a. a. O. nur zu

$$\frac{1}{3}\pi \,.\, 44{,}4^3 \text{ Quadratmillimeter}$$

in Rechnung gebracht ist, statt derselbe sich nach (3)

$$= 21\,327\,000 \text{ Quadratmillimeter}$$

ergeben hat. Hieraus folgt, dass die in der Tafel S. 78 aufgeführten *berechneten* Werthe mit

$$\frac{29\,314\,000 \,.\, 21\,327\,000}{\frac{1}{3}\pi^2 \,.\, 55{,}8^2 \,.\, 44{,}4^3} \cdot \pi^2 i^2 = 180\,000$$

zu multipliciren sind, um die elektrodynamischen Drehungsmomente nach AMPÈRE's Fundamentalgesetze in absolutem Maasse zu bestimmen. Aus (1) ersieht man aber, dass die in Skalentheilen *beobachteten* Dynamometerwirkungen in der Tafel S. 68 mit dem Faktor 3 634 zu multipliciren sind, um sie auf absolute Drehungsmomente zu reduciren. Dividirt man folglich mit diesem letzteren Faktor den vorhergehenden, so erhält man den Faktor 49,5, mit welchem die in der Tafel S. 78 aufgeführten *berechneten* Werthe zu multipliciren sind, um mit den in der Tafel S. 68 aufgeführten *beobachteten* Werthen verglichen zu werden. Dieser Faktor ist etwa um 6 Procent kleiner als der oben unmittelbar aus der Vergleichung der berechneten und beobachteten Werthe abgeleitete Faktor 53,06, eine Differenz, wie sie bei so vielen zur Bestimmung des Faktors nothwendigen aus der Erfahrung entnommenen Elementen, unter denen mehrere nur beiläufig bestimmt worden sind (siehe [2] und [3]), erwartet werden musste. Es wird also hierdurch die Richtigkeit der aus AMPÈRE's Formel berechneten *absoluten* Werthe oder die Richtigkeit der zwischen der Elektrodynamik und dem Elektromagnetismus aufgestellten Relation in so weit bestätigt gefunden, als nur die gemachten Erfahrungen verbürgt werden können. Diese Prüfung der *absoluten Werthe* oder der angegebenen Relationen zwischen der *Elektrodynamik* und dem *Elektromagnetismus* lag ursprünglich nicht in dem Zwecke der hier mitgetheilten Versuche, welcher blos die Abhängigkeit der elektrodynamischen Kraft von der gegenseitigen Lage und Entfernung der auf einander wirkenden Leitungsdrähte betraf, sonst

würden Einrichtungen getroffen worden sein, um die galvanischen Ströme auch ihrer *absoluten* Intensität nach mit grösserer Präcision zu bestimmen, sowie auch die Zahl der Umwindungen der beiden Rollen des Dynamometers *direkt* zu ermitteln; jene Prüfung ist aber beiläufig mit angeführt worden, weil die beschriebenen Versuche die wesentlichen Data an die Hand gaben. Weil aber nicht *alle* diese Data die hierfür wünschenswerthe Präcision besitzen, so muss eine schärfere Ausführung dieser Prüfung einer künftigen Gelegenheit vorbehalten werden. Welche Einrichtungen und Abänderungen in den Versuchen zu treffen sein würden, um den hier weniger genau bestimmten Datis eine grössere Präcision zu verschaffen, leuchtet von selbst leicht ein und bedarf keiner weiteren Erörterung.

Volta-Induktion mit dem Elektro-Dynamometer.

10.

Wir haben bisher die erste Klasse elektrodynamischer Erscheinungen betrachtet, nämlich die von Ampère entdeckten, welche die Kräfte betreffen, womit die *Stromträger* bei gegebenen Stromintensitäten einander zu bewegen suchen, und haben das von Ampère für diese Klasse von Erscheinungen aufgestellte Gesetz bestätigt gefunden. Zu dieser ersten Klasse elektrodynamischer Erscheinungen ist durch Faraday's Entdeckung 10 Jahre später eine zweite Klasse noch hinzugekommen, wo die elektrodynamischen Wirkungen in Kräften bestehen, welche nicht die Stromträger, sondern die *Elektricität in den Stromträgern* zu bewegen suchen. Man kann für diese unter dem Namen der *Volta-Induktion* begriffenen Erscheinungen zwei Fundamentalversuche unterscheiden, welche beide von Faraday herrühren.

Gleich im Beginne seiner „Experimental-Untersuchungen über Elektricität", Poggendorff's Annalen 1832, Bd. XXV, S. 93 Art. 10, beschreibt nämlich Faraday den *ersten* Fundamentalversuch der Volta-Induktion, wo zwei isolirte Kupferdrähte dicht neben einander auf einer Holzwalze aufgewunden waren, und der eine mit dem Galvanometer, der andere mit einer Volta'schen Säule in Verbindung gebracht wurde, und wo die Entstehung eines Stroms im ersteren Drahte am Galvanometer jedesmal in dem Momente beobachtet wurde, wo die Kette, zu welcher der zweite Draht gehörte, entweder gelöst oder wieder geschlossen wurde. Der *zweite* Fundamentalversuch folgt darauf in Art. 18, wo er zwei Kupferdrähte in gleichen Zickzackbiegungen getrennt von einander auf zwei Brettern befestigt, und den einen mit dem Galvanometer, den anderen mit der Volta'schen Säule in Verbindung gesetzt

hat, und wo die Entstehung eines Stromes im ersteren Drahte am Galvanometer jedesmal in dem Momente beobachtet wurde, wo das Brett mit diesem Drahte entweder aus der Ferne plötzlich genähert und auf das Brett mit dem zweiten Drahte aufgelegt, oder wo das aufliegende Brett plötzlich aufgehoben und von dem anderen entfernt wurde.

Nach Faraday haben sich besonders Nobili und Lenz mit dieser Art der Induktion beschäftigt und letzterer hat ein einfaches Gesetz aufgestellt, wodurch die Induktion eines Stroms auf einen bewegten Leiter auf die Ampère'schen Sätze der elektrodynamischen Bewegungen zurückgeführt wird.

„Gleich bei Durchlesung der Abhandlung Faraday's," sagt Lenz, Poggendorff's Annalen 1834, Bd. XXXI, S. 484 f., „schien es mir, als müssten sich sämmtliche Versuche der elektrodynamischen Vertheilung sehr einfach auf die Sätze der elektrodynamischen Bewegungen zurückführen lassen, so dass, wenn man diese als bekannt voraussetzt, auch jene dadurch bestimmt sind, und da sich diese Ansicht bei mir durch vielfache Versuche bestätigt hat, so werde ich sie im Nachfolgenden auseinandersetzen, und theils an bekannten, theils an eigens dazu angestellten Versuchen prüfen. Der Satz, nach welchem die Reduktion der magnetoelektrischen Erscheinungen auf die elektromagnetischen geschieht, ist folgender:

> „Wenn sich ein metallischer Leiter in der Nähe eines galvanischen Stroms oder eines Magneten bewegt, so wird in ihm ein galvanischer Strom erregt, der eine solche Richtung hat, dass er in dem ruhenden Drahte eine Bewegung hervorgebracht hätte, die der hier dem Drahte gegebenen gerade entgegengesetzt wäre, vorausgesetzt, dass der ruhende Draht nur in Richtung der Bewegung und entgegengesetzt beweglich wäre."

„Zur Bestätigung dieses Satzes, so weit er die Induktion eines Stroms auf einen bewegten Leiter betrifft, führt nun Lenz folgende drei Versuche von Faraday, von sich und von Nobili an."

„*a*) Wenn von zwei geradlinigen, einander parallelen Leitern einer von einem galvanischen Strom durchlaufen wird, und wenn man den anderen Leiter jenem in paralleler Richtung nähert, so wird während der Bewegung im bewegten Leiter ein entgegengesetzter Strom von dem im unbewegten hervorgerufen; entfernt man ihn aber, so ist der erregte Strom mit dem erregenden gleichlaufend." (Faraday.)

„*b*) Wenn von zwei vertikalen kreisförmigen Leitern, die, von nahezu gleichem Durchmesser, mit ihren Ebenen auf einander senkrecht stehen, der eine, feststehende, von einem galvanischen Strome durchflossen wird, und wenn man dann den anderen, um den

gemeinschaftlichen vertikalen Durchmesser als Axe drehbaren, plötzlich aus der senkrechten in die parallel anliegende Lage bringt, so entsteht in ihm ein Strom, der dem im anderen Leiter entgegengesetzt ist. Diesen letzten Versuch," sagt Lenz, „habe ich mit zwei kreisförmigen Leitern angestellt, von denen jeder aus 20 Windungen besponnenen Kupferdrahts bestand; der eine ward mit einem 2 Quadratfuss grossen Zinkkupferpaar, der andere mit einem empfindlichen Nobili'schen Multiplikator in Verbindung gesetzt."

„*c*) Bewegt sich ein begrenzter Leiter, der senkrecht auf einen vom galvanischen Strom durchflossenen unbegrenzten Leiter steht, längs diesem und in Richtung seines Stroms hin, so entsteht in ihm ein Strom, der gegen den begrenzten Leiter gerichtet ist; bewegt sich aber der begrenzte Leiter gegen die Richtung des Stroms im unbegrenzten Leiter, so ist die Richtung des in ihm durch Vertheilung erregten Stroms von dem unbegrenzten Strom abwärts. (Nobili, Poggendorff's Annalen 1833, No. 3, S. 407)."

Durch obigen von Lenz zuerst ausgesprochenen Satz werden die inducirten Ströme zunächst nur ihrer Richtung nach bestimmt: eine quantitative Bestimmung für die Intensität der inducirten Ströme hat Lenz nicht gegeben. Es ist dies aber von Neumann in einer noch ungedruckten Abhandlung geschehen, von welcher soeben in Poggendorff's Annalen 1846, Bd. LXVII, S. 31 ein Auszug erschienen ist. Die hierdurch gewonnenen quantitativen Bestimmungen bedürfen aber einer Prüfung an der Erfahrung, wozu es noch an den erforderlichen Messungen gebricht.

Eigenthümliche Versuche über die Induktion von Strömen in einem ruhenden Leiter bei *Lösung* der Kette einer benachbarten Volta'schen Säule hat Henry, Poggendorff's Annalen 1842, Ergänzungsband S. 282, mitgetheilt, wobei er den inducirten Draht in verschiedene Entfernungen und Lagen gebracht hat. Auch hat er den inducirten Strom selbst wieder benutzt, um in einem dritten Leiter einen Strom zu induciren u. s. w. Er schreibt nach diesen Versuchen diesen inducirten Strömen in parallelen Drähten abwechselnd entgegengesetzte Richtungen zu; dem ersten aber dieselbe Richtung wie dem durch *Lösung* der Kette verschwindenden Strome der Volta'schen Säule.

Es soll nun in diesem Abschnitte *zuerst* gezeigt werden, wie auch die Erscheinungen der Volta-Induktion sich mit dem *Elektrodynamometer* beobachten lassen, sodann sollen einige *Maassbestimmungen* über den zweiten Faraday'schen Fundamentalversuch mitgetheilt werden.

In der Darstellung der Erscheinungen der Volta-Induktion muss wesentlich zweierlei unterschieden werden, nämlich *erstens* die Vorrichtung zur Stromerregung, *zweitens*, weil der erregte Strom unmittelbar

nicht wahrnehmbar ist, eine Vorrichtung zur Beobachtung einer wahrnehmbaren Wirkung des erregten Stroms. Bei dem zweiten Faraday'schen Fundamentalversuche bilden z. B. die beiden zickzackförmig gebogenen Kupferdrähte, deren einer in eine galvanische Kette eingeschaltet ist, nebst der Einrichtung, wodurch beide Drähte plötzlich einander genähert oder von einander entfernt werden können, die erste Vorrichtung, zur *Erregung* des Stroms; das *Galvanometer* dagegen, welches mit dem anderen Drahte in Verbindung gesetzt wird, bildet die zweite Vorrichtung, zur Beobachtung einer *sichtbaren Wirkung* des erregten Stroms. Hier sind also die beiden wesentlichen Vorrichtungen zu dem Versuche verschieden und von einander getrennt.

Eine wesentliche Vereinfachung des Versuchs kann man nun aber durch das *Elektrodynamometer* erlangen, wo es möglich ist, dieselbe Vorrichtung, welche zur Erregung des Stroms dient, auch zur Beobachtung einer sichtbaren Wirkung des Stroms zu benutzen. Die Bifilarrolle des Elektrodynamometers wird nämlich in *Schwingung* gesetzt und diese Bewegung zur Induktion benutzt; sodann wird die *Abnahme der Schwingungsbögen* derselben Bifilarrolle beobachtet, welche, wie sogleich gezeigt werden wird, die Folge der elektrodynamischen Wechselwirkung des inducirenden und des inducirten Stroms ist. Dabei gestattet die Gesetzmässigkeit sowohl jener, die Induktion vermittelnden, Schwingungen, als auch dieser, als sichtbare Wirkung des inducirten Stroms beobachteten, Abnahme der Schwingungsbögen, genaue *Maassbestimmungen* für diese Induktionserscheinungen auszuführen.

Verbindet man nämlich den Draht der *einen* Rolle des Dynamometers, während die Bifilarrolle *schwingt*, mit einer Volta'schen Säule, so braucht man, um einen Strom in der *anderen* Rolle zu *induciren*, nur ihre beiden Drahtenden mit einander zu verknüpfen. Dieser an sich zwar unwahrnehmbare in der letzteren Rolle inducirte Strom übt nun sogleich im Dynamometer selbst auf den Strom der ersteren Rolle eine *wahrnehmbare elektrodynamische Kraft* aus und ändert dadurch die Schwingung der Bifilarrolle. Beobachtet man also diese Aenderung, so lernt man daraus die elektrodynamische Kraft kennen, welche sie verursacht, und aus der elektrodynamischen Kraft wiederum den *inducirten Strom*, dem sie proportional ist, ohne dass es dazu nöthig ist, den inducirten Strom durch den Multiplikator eines *Galvanometers* zu leiten. Das *Dynamometer* dient also hierbei selbst sowohl zur *Erregung* des Stroms, als auch zur Beobachtung einer *sichtbaren und messbaren Wirkung* des erregten Stroms.

Ruhet die Bifilarrolle, so wird kein Strom erregt, folglich ist die elektrodynamische Kraft $= 0$, und die Bifilarrolle wird dann von der festen Rolle nicht bewegt. Schwingt aber die Bifilarrolle, so sind zwei

Fälle zu unterscheiden: entweder ist nämlich die feste Rolle mit der Volta'schen Säule verbunden und die Bifilarrolle ist in sich geschlossen; alsdann wird ein Strom in der schwingenden Bifilarrolle erregt: oder die schwingende Bifilarrolle selbst ist durch ihre beiden Aufhängungsdrähte mit der Volta'schen Säule in Verbindung gebracht und die feste Rolle ist in sich geschlossen; alsdann wird ein Strom in der festen Rolle erregt. In beiden Fällen ergiebt sich eine elektrodynamische Kraft, welche auf gleiche Weise die Schwingung der Bifilarrolle ändert.

Die *Beobachtung* aber dieser Schwingungsänderung, in Folge eines inducirten Stromes und der davon nach Ampère's Fundamentalgesetze abhängigen *elektrodynamischen* Wechselwirkung zwischen der inducirenden und der inducirten Drahtrolle, muss auf eine ganz *andere* Weise ausgeführt werden, wie die in den vorhergehenden Artikeln beschriebenen Beobachtungen am Dynamometer. Es müssen an die Stelle der bisherigen *Standbeobachtungen* am Dynamometer *Beobachtungen über die Abnahme der Schwingungsbögen* der schwingenden Bifilarrolle treten. Die Nothwendigkeit dieser veränderten Beobachtungsmethode ergiebt sich leicht wie folgt.

Die elektrodynamische Wechselwirkung beider Rollen, welche mit dem Elektrodynamometer beobachtet werden soll, besteht nach dem Ampère'schen Fundamentalgesetze in einem Drehungsmomente, welches auf die schwingende Bifilarrolle wirkt und dem ein veränderter *Ruhestand* dieser Rolle entspricht. Dieser *Ruhestand* der Bifilarrolle kann nun aber, wenn dieselbe schwingt, nicht unmittelbar beobachtet, sondern kann nur aus mehreren Beobachtungen, welche um die Schwingungsdauer von einander abstehen, bestimmt werden, und zwar nur unter der Voraussetzung, dass in der Zwischenzeit die äusseren Kräfte, welche auf die Rolle wirken, *konstant* geblieben seien, oder sich stetig und *proportional* mit der *Zeit* geändert haben. Wenn also die elektrodynamische Einwirkung, welche in Folge des inducirten Stroms auf die schwingende Rolle Statt findet, *konstant* bliebe, oder mehrere Schwingungen hindurch *proportional* mit der Zeit sich änderte, so würde dieselbe sich *durch den veränderten Ruhestand*, wie er aus einem System von Beobachtungen bestimmt wird, erkennen lassen. Wenn aber die elektrodynamische Einwirkung, welche in Folge des inducirten Stroms auf die schwingende Rolle Statt findet, *von Schwingung zu Schwingung sich umkehrt*, so wird der Ruhestand der Rolle, wie er aus einem System von Beobachtungen während der Schwingung bestimmt wird, sich trotz der vorhandenen elektrodynamischen Einwirkung dennoch *unverändert* finden. Die Beobachtung zeigt in der That, dass das letztere Statt findet, dass also die elektrodynamische Einwirkung, wenn eine solche in Folge eines inducirten Stromes wirklich existirt, sich von Schwingung

zu Schwingung umkehren müsse und durch blosse *Standbeobachtungen* am Dynamometer nicht erforscht werden könne.

Findet nun wirklich eine solche elektrodynamische Einwirkung auf die schwingende Rolle Statt, welche von Schwingung zu Schwingung sich umkehrt: so wird diese zwar durch Bestimmung des Ruhestandes der Rolle nicht erkennbar sein, sie muss sich aber an den *Schwingungsbögen* der Rolle zu erkennen geben; es muss nämlich die Grösse des Schwingungsbogens von Schwingung zu Schwingung sich *ändern*, entweder immer wachsen, oder immer abnehmen.

Wirklich zeigt die Erfahrung, dass, während der berechnete Ruhestand der schwingenden Rolle immer der nämliche bleibt, der Schwingungsbogen immer *abnimmt* und es geht aus den nachfolgenden Versuchen hervor, dass diese Abnahme wirklich von *elektrodynamischen* Einwirkungen und nicht von fremdartigen äusseren Ursachen herrührt, wenn man den gewöhnlichen Einfluss des Widerstands der Luft in Abrechnung bringt.

Um also diese zweite Klasse von Erscheinungen mit dem Elektrodynamometer zu beobachten, wird es hiernach nöthig, zur genauen Messung der Abnahme der Schwingungsbögen, *Schwingungsversuche* mit der Bifilarrolle des Dynamometers zu machen, während wir zum Zweck der Ampère'schen elektrodynamischen Erscheinungen auf *Ablenkungsversuche* oder *Standbeobachtungen* uns beschränken konnten.

Für unseren Zweck ist es zunächst von Wichtigkeit, nachzuweisen, dass sich die *Schwingungsbeobachtungen* am Dynamometer nach derselben Methode und mit einer eben so grossen Präcision, wie an einem Magnetometer, ausführen lassen. Ich will daher zunächst eine Reihe von Schwingungsversuchen, welche ich mit dem Dynamometer gemacht habe, vorausschicken, wobei *keine* elektrodynamische Einwirkung Statt fand, indem gar kein galvanischer Strom durch das Instrument geleitet wurde und die Drahtenden sogar unverbunden blieben.

Die Methode, wie diese Versuche angestellt wurden, ist die nämliche, wie sie Gauss in den „Resultaten aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins im Jahre 1837", S. 58 ff.[1]), angegeben hat, und es ist darnach nicht nöthig, die ursprünglichen Protokolle selbst vollständig mitzutheilen, sondern es genügt die Mittheilung des Extrakts, welcher aus diesen Protokollen eben so, wie a. a. O. abgeleitet ist.

Zu den folgenden Beobachtungen diente das Fig. 2, 3 und 4 abgebildete Dynamometer von Meyerstein, wo die schwingende Rolle im Mittelpunkte der festen Rolle aufgehängt und das Fernrohr etwa 6 Meter von dem Instrumente aufgestellt war. Der Abstand des Spiegels von

[1]) [Gauss' Werke, Bd. V, p. 374.]

der Skale betrug 6 018,6 Skalentheile und es war der Werth von

1 Skalentheil = 17,135 6″.

Die Beobachtungen wurden abwechselnd von verschiedenen Beobachtern angestellt, nämlich von Herrn Dr. Stähelin aus Basel, von meinem Assistenten, Herrn Dietzel, und von mir. Jeder machte einen Satz von Beobachtungen nach der a. a. O. S. 61 [1]) gegebenen Vorschrift, welcher sechs Zeiten der Vorübergänge eines bestimmten, nahe der Mitte des Schwingungsbogens liegenden Skalenpunktes und sieben Elongationspunkte enthielt. In der folgenden Tafel giebt jede horizontale Zeile die Resultate eines solchen Satzes von Beobachtungen, nämlich die Bezifferung der Schwingung, die entsprechende Zeit, den entsprechenden Ruhestand in Skalentheilen, den entsprechenden Schwingungsbogen in Skalentheilen und den Logarithmus des letzteren.

Beobachtungen zur Bestimmung der Schwingungsdauer und der Abnahme der Schwingungsbögen der Bifilarrolle des Dynamometers bei offener Kette.

Schwingung. No.	Zeit	Stand	Schwingungsbogen	Log.
0.	5h 16′ 28,53″	457,10	650,80	2,813 448
14.	20′ 10,20″	457,38	601,43	2,779 185
25.	23′ 4,39″	457,15	564,90	2,751 972
52.	30′ 12,50″	457,19	485,28	2,685 992
82.	38′ 8,02″	457,29	409,62	2,612 381
109.	45′ 16,16″	457,15	353,08	2,547 873
134.	51′ 52,08″	457,65	306,70	2,486 714
163.	59′ 31,80″	457,41	261,08	2,416 774
189.	6h 6′ 23,90″	457,56	226,33	2,354 742
212.	12′ 28,22″	457,69	198,68	2,298 154
232.	17′ 45,45″	457,63	178,26	2,251 054
254.	23′ 33,89″	457,78	157,98	2,198 602
284.	31′ 29,30″	457,73	134,17	2,127 655
309.	38′ 5,53″	456,55	116,30	2,065 580
328.	43′ 6,90″	458,02	105,25	2,022 222
369.	53′ 56,24″	457,81	83,68	1,922 622
387.	58′ 41,96″	457,90	75,45	1,877 659

Dividirt man den Unterschied der ersten und letzten Zeit mit der Zahl der Schwingungen, so erhält man eine ziemlich genaue Bestimmung der Schwingungsdauer der schwingenden Rolle, weil die zur Reduktion auf unendlich kleine Bögen anzubringende Korrektion bei so kleinen Schwingungsbögen, wie hier Statt fanden, nur wenig beträgt. Diese genäherte Schwingungsdauer ist

= 15,848 65″.

[1]) [Gauss' Werke, Bd. V, p. 376.]

Reducirt man mit dieser genäherten Schwingungsdauer alle Zeiten in der Tafel, durch Abrechnung des Produkts der Zahl der Schwingung in die Schwingungsdauer, auf die erste Zeit, so erhält man die in der dritten Kolumne der folgenden Tafel enthaltenen Werthe:

Schwingung. No.	Zeit	Reducirte Zeit	Unterschied vom Mittel
0.	5h 16′ 28,52″	5h 16′ 28,53″	+ 0,13″
14.	20′ 10,20″	28,32″	— 0,08″
25.	23′ 4,39″	28,17″	— 0,23″
52.	30′ 12,50″	28,37″	— 0,03″
82.	38′ 8,02″	28,43″	+ 0,03″
109.	45′ 16,16″	28,66″	+ 0,26″
134.	51′ 52,08″	28,36″	— 0,04″
163.	59′ 31,80″	28,47″	+ 0,07″
189.	6h 6′ 23,90″	28,50″	+ 0,10″
212.	12, 28,22″	28,31″	— 0,09″
232.	17′ 45,45″	28,56″	+ 0,16″
254.	23′ 33,89″	28,33″	— 0,07″
284.	31′ 29,30″	28,28″	— 0,12″
309.	38′ 5,53″	28,30″	— 0,10″
328.	43′ 6,90″	28,54″	+ 0,14″
369.	53′ 56,24″	28,07″	— 0,33″
387.	58′ 41,96″	28,53″	+ 0,13″

Aus der Uebereinstimmung dieser reducirten Werthe, deren Unterschiede vom Mittelwerthe stets unter $\frac{1}{3}$ Sekunde bleiben, geht von selbst hervor, dass die Bestimmung der *Schwingungsdauer* der Bifilarrolle des Dynamometers gleicher Schärfe und Genauigkeit fähig ist, wie beim Magnetometer, wobei noch zu beachten ist, dass jene Unterschiede durch die konstante Differenz, welche bekanntlich immer zwischen zwei Beobachtern Statt findet, vergrössert erscheint. Auch die Bestimmungen des *Ruhestandes* der schwingenden Rolle aus den Elongationsbeobachtungen in der dritten Kolumne der ersten Tafel zeigen eine grosse Uebereinstimmung, wie die folgende Uebersicht ihrer Abweichungen vom Mittelwerthe, nach ihrem Bogenwerthe ausgedrückt, beweist:

— 6,3″	+ 3,1	+ 4,5
— 1,5″	— 1,0	— 15,8
— 5,5″	+ 1,5	+ 9,4
— 4,8″	+ 3,8	+ 5,8
— 3,1″	+ 2,7	+ 7,4
— 5,5″	+ 5,3	

Diese Uebereinstimmung aller Standbeobachtungen kann nicht grösser gewünscht werden, zumal wenn man beachtet, dass das Fernrohrstativ auf dem hölzernen Fussboden des Zimmers aufgestellt war, wo bekannt-

lich die Richtung des Fernrohrs durch das Auftreten auf den Boden leicht etwas geändert wird. Man erkennt auch leicht, dass der Stand in der letzteren Hälfte der Beobachtungen etwas grösser, als in der ersteren, gewesen sei.

Es bleibt uns endlich die *Abnahme der Schwingungsbögen* zu betrachten übrig. Die einzelnen Sätze der Beobachtungen folgen zum Theil in so kurzer Zeit auf einander, dass die Abnahme der Schwingungsbögen in der Zwischenzeit nicht gross genug ist, um eine genaue Bestimmung des Verhältnisses zweier auf einander folgender Schwingungsbögen zu geben. Es möge daher der Logarithmus dieses Verhältnisses bestimmt werden, indem statt der Differenz je zweier unmittelbar auf einander folgender Logarithmen der Schwingungsbögen die Differenz des ersten und fünften, des zweiten und sechsten u. s. w. mit der Zahl der dazwischen liegenden Schwingungen dividirt wird. Man erhält alsdann aus obigen 17 Beobachtungssätzen statt 16 nur 13, aber genauere Werthe des *logarithmischen Dekrements*, nämlich folgende. Vor jedem Werthe ist die Schwingungszahl bemerkt, zu welcher er im Mittel gehört.

Schwingung. No.	Logarithmisches Dekrement	Unterschied vom Mittel
41.	0,002452	+ 0,000038
61½.	0,002435	+ 0,000021
79½.	0,002433	+ 0,000019
107½.	0,002425	+ 0,000011
135½.	0,002408	— 0,000006
160½.	0,002424	+ 0,000010
183.	0,002405	— 0,000009
208½.	0,002397	— 0,000017
236½.	0,002390	— 0,000024
260½.	0,002398	— 0,000016
280.	0,002384	— 0,000030
311½.	0,002400	— 0,000014
335½.	0,002427	+ 0,000013

Mittel = 0,002 414.

Es ergiebt sich also im Mittel eine *Abnahme der Schwingungsbögen*, wonach die Grösse des Bogens nach $124\frac{7}{10}$ Schwingungen, oder nach 32 Minuten $56\frac{1}{3}$ Sekunde auf die Hälfte herabsinkt. Die Uebereinstimmung der partiellen Werthe beweist, dass man auch diese kleine Abnahme der Schwingungsbögen mit Schärfe messen könne.

An dem nämlichen Tage, unmittelbar vor der eben beschriebenen Beobachtungsreihe, war eine andere ähnliche Beobachtungsreihe unter ganz gleichen äusseren Verhältnissen gemacht worden, blos mit dem Unterschiede, dass die beiden Enden der festen Rolle mit einer Säule

von drei kleinen GROVE'schen Bechern, den nämlichen wie im vierten Artikel, in Verbindung gesetzt, und dass die freien Enden der Aufhängungsdrähte der Bifilarrolle unter sich verknüpft worden waren. Zur näheren Kenntniss des Stroms, welcher durch die feste Rolle geleitet wurde, diente die Beobachtung der Ablenkung, welche diese Rolle selbst auf das 583,5 Millimeter nördlich von ihr aufgestellte, Art. 3, beschriebene *Spiegelmagnetometer* hervorbrachte. Diese beobachtete Ablenkung des Spiegelmagnetometers ist in der letzten Kolumne der folgenden Tafel bemerkt worden. Der Werth der Skalentheile dieses Magnetometers hängt von dem horizontalen Abstande des Spiegels von der Skale ab, welcher = 1 301 Skalentheile war. Die Beobachter und die Methode der Beobachtung waren die nämlichen. Die folgende Tafel giebt den Extrakt von dieser Beobachtungsreihe gerade so, wie die vorige Tafel von der anderen.

Beobachtungen zur Bestimmung der Schwingungsdauer und der Abnahme der Schwingungsbögen der Bifilarrolle des Dynamometers beim Durchgange des Stroms von drei GROVE'schen Bechern durch die feste Rolle, während der Leitungsdraht der Bifilarrolle geschlossen war.

Schwingung. No.	Zeit	Stand	Schwingungsbogen	Log.	Ablenkung des Spiegelmagnetometers
0.	3h 29′ 44,88″	464,05	764,10	2,883150	108,50
9.	32′ 7,03″	464,44	679,15	2,831966	
18.	34′ 29,58″	464,23	604,05	2,781073	
35.	38′ 50,17″	464,07	484,15	2,684980	108,60
47.	42′ 9,10″	464,20	414,60	2,617629	
57.	44′ 47,66″	464,25	365,50	2,562887	
74.	49′ 16,79″	464,22	292,27	2,465784	109,10
85.	52′ 10,80″	464,30	253,30	2,403635	
103.	56′ 56,11″	464,40	200,80	2,302764	
118.	4h 0′ 53,43″	464,25	165,56	2,218955	108,95
130.	4′ 3,26″	464,37	141,37	2,150357	
143.	7′ 28,90″	465,23	119,33	2,076750	
157.	11′ 11,11″	464,96	100,49	2,002123	109,20
179.	16′ 59,23″	465,20	75,59	1,878464	
196.	21′ 28,65″	464,88	60,58	1,782329	190,40
210.	25′ 10,23″	464,96	50,08	1,699664	

Ich beschränke mich bei dieser, der vorigen im Uebrigen sehr ähnlichen Beobachtungsreihe auf die Betrachtung der Abnahme der Schwingungsbögen. Der Logarithmus des Verhältnisses zweier auf einander folgender Schwingungsbögen, oder das logarithmische Dekrement, soll hier bestimmt werden, indem die Differenz des ersten und vierten, des zweiten und fünften u. s. w. Logarithmus mit der Zahl der

dazwischen liegenden Schwingungen dividirt wird. Man erhält dann aus obigen 16 Beobachtungssätzen 13 Werthe des logarithmischen Dekrements, wie sie die folgende Tafel mit Beifügung der Schwingungszahl, zu welcher jeder im Mittel gehört, enthält.

Schwingung. No.	Logarithmisches Dekrement	Unterschied vom Mittel
$17\frac{1}{2}$.	0,005662	+ 0,000042
28.	0,005640	+ 0,000020
$37\frac{1}{2}$.	0,005595	— 0,000025
$54\frac{1}{2}$.	0,005620	0,000000
66.	0,005631	+ 0,000011
80.	0,005655	+ 0,000035
96.	0,005610	— 0,000010
$107\frac{1}{2}$.	0,005628	+ 0,000008
123.	0,005650	+ 0,000030
$137\frac{1}{2}$.	0,005560	— 0,009060
$154\frac{1}{2}$.	0,005549	— 0,000071
$169\frac{1}{2}$.	0,005555	— 0,000065
$183\frac{1}{2}$.	0,005707	+ 0,000087

Mittel = 0,005620.

Es ergiebt sich also im Mittel eine *Abnahme der Schwingungsbögen*, wonach die Grösse des Bogens nach 53,564 Schwingungen, oder nach 14 Minuten 8,187 Sekunden auf die Hälfte herabsinkt. Auch hier zeugt die Uebereinstimmung der partiellen Werthe für die Schärfe der Messung, und es kann dabei nicht auffallen, dass zuletzt, wo die Schwingungsbögen sehr klein geworden waren, die Differenzen etwas grösser erscheinen.

Der Unterschied, welcher zwischen dieser letzteren Bestimmung des logarithmischen Dekrements und der vorhergehenden Statt findet, hat seinen Grund nicht in der Verschiedenheit äusserer Verhältnisse, welche auf die schwingende Rolle einwirkten, weil diese vollkommen die nämlichen blieben, sondern in dem *inducirenden* Einflusse der festen Rolle auf die schwingende Rolle, welcher den einzigen Unterschied zwischen der ersten und zweiten Versuchsreihe bildete. Beide Versuchsreihen sind an mehreren Tagen wiederholt worden, und haben nicht allein fast genau denselben Unterschied im Werthe der logarithmischen Dekremente, sondern auch nahe gleiche absolute Werthe für beide Dekremente gegeben, wodurch kein Zweifel daran bleibt, dass hierbei wirklich eine Induktion galvanischer Ströme in der geschlossenen Bifilarrolle durch den galvanischen Strom in der festen Rolle Statt findet, und zwar von solcher Stärke, dass die in der Abnahme der Schwingungsbögen sichtbare Wirkung der inducirten Ströme einer genauen Maassbestimmung fähig ist.

11.

Nach dieser Nachweisung der *praktischen* Brauchbarkeit des Elektrodynamometers zur Darstellung der Erscheinungen der Volta-Induktion, gehen wir *zweitens* dazu über, einige *gesetzliche Bestimmungen* für diese Erscheinungen aus den Beobachtungen der Schwingungen und der Abnahme der Schwingungsbögen der Bifilarrolle abzuleiten.

Erstens ist schon bemerkt worden, dass die in Folge der inducirten Ströme *sich ändernde Grösse* der Schwingungsbögen, bei unverändertem mittleren Stande der Bifilarrolle, beweist, dass die Richtung des inducirten Stroms mit der *Richtung der Bewegung* der schwingenden Bifilarrolle wechselt, dass folglich durch entgegengesetzte Bewegungen entgegengesetzte Ströme inducirt werden, wie dies auch bei der Magneto-Induktion der Fall ist.

Zweitens, die *Abnahme* der Schwingungsbögen beweist, dass bei *Annäherung* paralleler Elemente der inducirenden Drähte ein dem inducirenden Strome *entgegengesetzter*, bei *Entfernung* paralleler Elemente ein dem inducirenden *gleich gerichteter* Strom inducirt werde. Wenn das entgegengesetzte Verhältniss der Stromrichtungen der inducirenden und inducirten Ströme Statt fände, müsste nämlich eine fortwährende *Zunahme* der Schwingungsbögen sich ergeben. Auch diese Bestimmung ist mit dem analog, was für die Magneto-Induktion erfahrungsmässig begründet ist.

Drittens, das *geometrische Gesetz* der Abnahme der Schwingungsbögen in Folge der inducirten Ströme beweist, dass die Intensität des inducirten Stroms der *Geschwindigkeit* der inducirenden Bewegung proportional ist; denn das geometrische Gesetz für die Abnahme der Schwingungsbögen beweist, dass die Kraft, welche diese Abnahme hervorbringt, d. h. die Intensität der inducirten Ströme, der Grösse der Schwingungsbögen immer proportional bleibt: es ist aber bekannt, dass die Grösse der Schwingungsbögen eines *isochron* schwingenden Körpers der ihm in entsprechenden Augenblicken seiner Schwingungsdauer zukommenden Geschwindigkeit immer proportional ist.

Viertens, was die gesetzliche Bestimmung der *absoluten* Stärke der Volta-Induktion betrifft, so wollen wir endlich noch folgenden Satz aus Beobachtungen am Dynamometer ableiten.

> Die *Volta-Induktion* ist der *Magneto-Induktion* in der in sich geschlossenen schwingenden Bifilarrolle gleich, wenn jene von einem durch die feste Rolle geleiteten galvanischen Strome, diese durch Magnete hervorgebracht wird, welche in einer solchen Lage gegen die Bifilarrolle sich befinden, bei welcher, wenn durch die Bifilarrolle ein Strom geht, das *elektrodynamische* Drehungsmoment jenes

Stroms dem *elektromagnetischen* Drehungsmomente dieser Magnete gleich ist.

Durch diesen Satz wird, wie man leicht sieht, die Bestimmung der Volta-Induktion mit Hülfe bekannter *elektromagnetischer* und *elektrodynamischer* Kräfte auf die Gesetze der Magneto-Induktion zurückgeführt, die auf anderen Wegen schon genauer erforscht worden sind. Zum Beweis dieses Satzes kann ich vor der Hand zwar nur einige mit dem Dynamometer ausgeführte Messungen geben, die unter Umständen gemacht wurden, unter welchen keine auf feine Bruchtheile genauen Bestimmungen möglich waren; es dürften jedoch diese Messungen einstweilen als genügend angesehen werden, weil, wenn obiger Satz unrichtig wäre, gar kein Grund zu derjenigen approximativen Uebereinstimmung vorläge, die sich aus den Beobachtungen ohne Zweifel ergiebt. Zu einer feineren Prüfung obigen Satzes müssten alle dabei konkurrirenden Messungen mit gleicher Genauigkeit ausgeführt werden. Um aber alle Verhältnisse zur Erreichung dieser gleichmässigen Genauigkeit ganz zweckmässig einzurichten, würde es nöthig sein, besondere Instrumente blos für diesen Zweck darzustellen, was mir bisher nicht möglich war.

Ich werde die Beobachtungsresultate hier kurz zusammen stellen, ohne in das Detail der Beobachtungen selbst einzugehen, das im Wesentlichen mit dem der vorhergehenden Beobachtungen übereinstimmt.

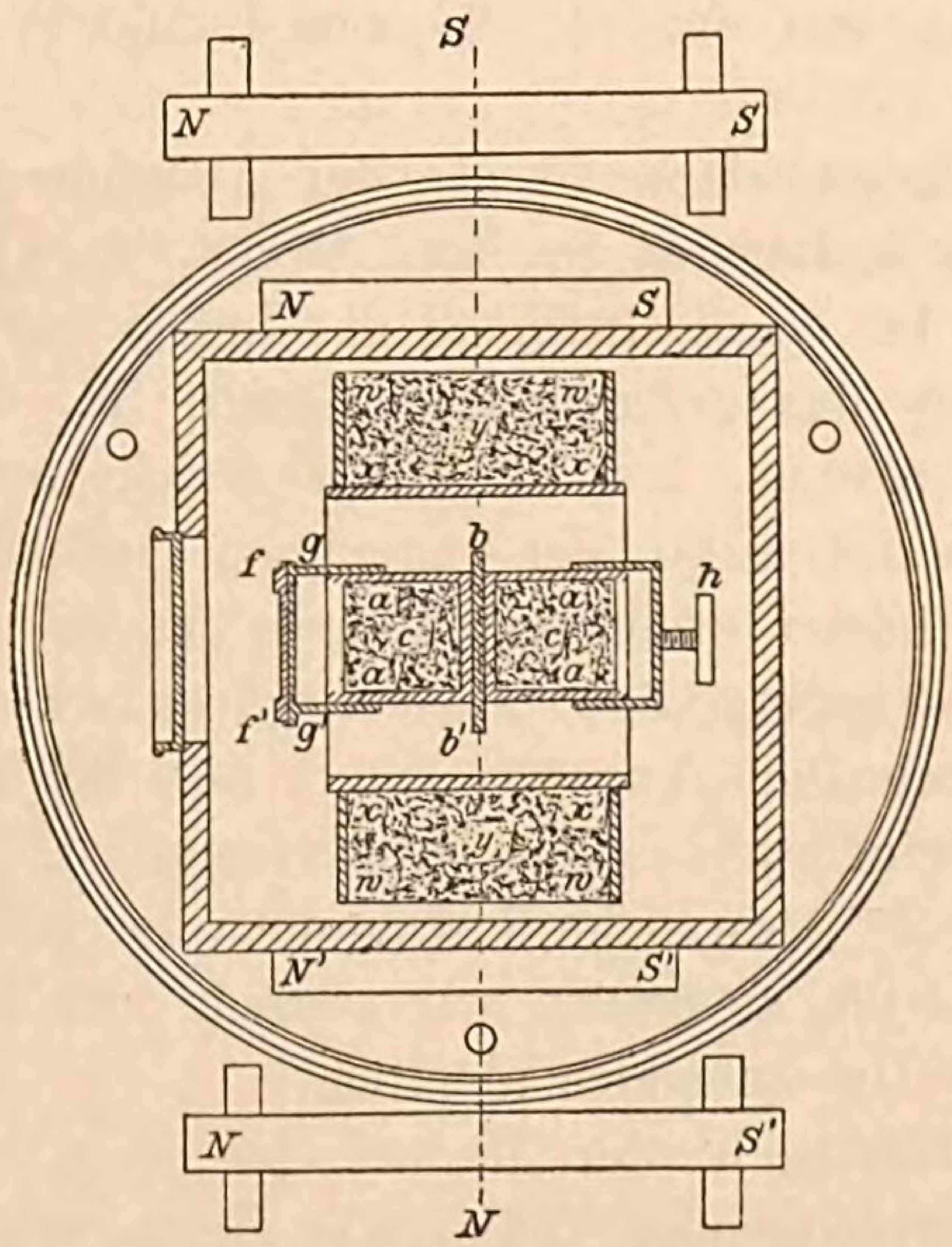


Fig. 4.

Die *erste* Versuchsreihe bezog sich auf Messung der Magneto-Induktion. Gerade diese Reihe ist es, für welche die Verhältnisse am wenigsten günstig sich gestalten liessen, und die daher der Genauigkeit

der ganzen Maassbestimmung engere Schranken setzte, die unter etwas günstigeren Verhältnissen leicht bedeutend hätten erweitert werden können. Die Bifilarrolle des Art. 1 beschriebenen, Fig. 2, 3 und 4 abgebildeten Dynamometers wurde nämlich in sich geschlossen und in Schwingung gesetzt, während ausserhalb des Kastens, welcher die schwingende Bifilarrolle vor der Luft schützte, mehrere kleine Magnete NS, $N'S'$, Fig. 4 in derjenigen Lage fest aufgestellt wurden, in welcher sie in der schwingenden Bifilarrolle die stärksten *magnetoelektrischen* Ströme inducirten. Diese kleinen Magnete lagen nämlich sämmtlich senkrecht gegen den durch die Axe der Bifilarrolle gehenden magnetischen Meridian, und zwar nördlich und südlich von der Bifilarrolle symmetrisch und ihre gleichnamigen Pole waren dabei nach gleicher Seite gekehrt, wie die Figur es zeigt, worin N und N' Nordpole, S und S' Südpole bedeuten. Alsdann wurden die Schwingungen der Bifilarrolle, wie früher, von dem Augenblicke an, wo sie durch die Skale gemessen werden konnten, so lange beobachtet, bis sie zu genauen Bestimmungen der Abnahme der Schwingungsbögen zu klein wurden. Diese Beobachtungen wurden auf dieselbe Weise, wie oben, berechnet und ergaben das *logarithmische Dekrement* für die Abnahme der Schwingungsbögen

$$= 0{,}002\,638.$$

Dieselbe Versuchsreihe wurde nochmals wiederholt mit dem einzigen Unterschiede, dass die Bifilarrolle geöffnet war, und es ergab sich dann für das *logarithmische Dekrement* der Abnahme der Schwingungsbögen folgender etwas kleinere Werth:

$$= 0{,}002\,541.$$

Der geringe Unterschied dieser beiden Werthe,

$$= 0{,}000\,097,$$

ist die Wirkung der *magnetoelektrischen* Ströme, welche in der schwingenden und geschlossenen Bifilarrolle durch die festliegenden Magnete inducirt wurden. Es ist die grösste Sorgfalt darauf gewendet worden, diesen kleinen Unterschied mit möglichster Genauigkeit zu bestimmen, und die Versuche liessen dabei nichts zu wünschen übrig, dennoch liegt es in der Kleinheit des Unterschieds, dass derselbe, wie die Wiederholungen der Versuche zeigten, etwa auf 6 bis 8 Procente als unsicher betrachtet werden muss.

Die *zweite* Versuchsreihe bezog sich auf das *elektromagnetische* Drehungsmoment. Die kleinen Magnete blieben unverrückt an ihrer Stelle, während durch die Bifilarrolle ein schwacher Strom von einer Volta'schen konstanten Säule geleitet wurde; der Strom dieser Säule ging ausserdem durch ein *Galvanometer*, durch welches seine Intensität

gemessen wurde. Nun wurde der *Ruhestand* der Bifilarrolle beobachtet, abwechselnd, wenn die Volta'sche Säule geschlossen und wenn sie geöffnet war. Es ergab sich aus einer Reihe von Wiederholungen nach der Reduktion der Resultate auf gleiche Stromintensität (die nur wenig variirt hatte) mit grosser Uebereinstimmung der Unterschied,

$$= 19{,}1 \text{ Skalentheilen.}$$

Dieser Unterschied ist ein Maass des *elektromagnetischen* Drehungsmoments, welches die oben erwähnten Magnetstäbe auf den Strom in der Bifilarrolle ausübten.

Die *dritte* Versuchsreihe bezog sich auf das *elektrodynamische* Drehungsmoment. Die kleinen Magnete wurden entfernt und dagegen die beiden Drahtenden der festen Rolle des Dynamometers mit einer starken Volta'schen Säule verbunden, während durch die Bifilarrolle der nämliche schwache Strom von einer Volta'schen konstanten Säule geleitet wurde, wie in der vorigen Reihe. Die Intensität beider Ströme wurde durch ein *Galvanometer* gemessen.[1]) Nun wurde, wie in der vorigen Versuchsreihe, der *Ruhestand* der Bifilarrolle beobachtet, abwechselnd wenn die Volta'sche Säule geschlossen und wenn sie geöffnet war. Es ergab sich aus einer Reihe von Wiederholungen nach der Reduktion auf gleiche Stromintensität mit grosser Uebereinstimmung der Unterschied

$$= 101{,}9 \text{ Skalentheilen.}$$

Dieser Unterschied ist ein Maass des *elektrodynamischen* Drehungsmoments, welches der starke Strom in der festen Rolle auf den schwachen Strom in der Bifilarrolle ausübte.

Die *vierte* Versuchsreihe bezog sich endlich auf die *Volta-Induktion.* Die Bifilarrolle wurde in sich geschlossen und in Schwingung gesetzt, während durch die feste Rolle des Dynamometers der Strom derselben Volta'schen Säule geleitet wurde, wie in der vorhergehenden Versuchsreihe. Alsdann wurden die Schwingungen der Bifilarrolle eben so beobachtet, wie in der ersten Versuchsreihe und daraus das *logarithmische Dekrement* der Abnahme der Schwingungsbögen berechnet. Dieses Dekrement ergab sich, nach Reduktion auf diejenige Stromintensität in der festen Rolle, auf welche sich der durch die vorhergehende Versuchsreihe gefundene Werth des *elektrodynamischen* Drehungsmoments bezieht,

$$= 0{,}005\,423.$$

Dieselbe Versuchsreihe wurde nochmals wiederholt mit dem einzigen Unterschiede, dass die Bifilarrolle geöffnet war, und es ergab sich dann

[1]) Beide Ströme stammten von derselben konstanten Säule her und die verschiedene Intensität derselben in den beiden Rollen war durch eine Theilung des Stroms bewirkt worden.

für das *logarithmische Dekrement* der Abnahme der Schwingungsbogen folgender kleinere Werth:

0,002 796.[1])

Der Unterschied dieser beiden Werthe,

= 0,002 627,

ist die Wirkung *der Volta-Induktion*, welche in der schwingenden und geschlossenen Bifilarrolle durch den Strom in der festen Rolle Statt fand.

Da also die *elektrodynamische* Kraft unseres Stroms in der festen Rolle, nach der *dritten* Versuchsreihe, der *elektromagnetischen* Kraft unserer Magnete in der *zweiten* Versuchsreihe nicht gleich war, sondern sich wie

101,9 : 19,1

verhielt, so sollten auch die von beiden unter ganz gleichen Verhältnissen in der Bifilarrolle *inducirten Ströme* nicht gleich sein, sondern sich ebenfalls wie

101,9 : 19,1

verhalten. Wenn aber die Intensitäten der in der schwingenden Bifilarrolle inducirten Ströme in dem angegebenen Verhältnisse stehen, so wird aus der Wechselwirkung dieser Ströme mit jenen sie erzeugenden und deshalb ihnen selbst proportionalen galvanischen und magnetischen Kräften eine Dämpfung der Schwingungen der Bifilarrolle hervorgehen müssen, deren *logarithmische Dekremente* sich wie die Quadrate von 101,9 : 19,1 verhalten, d. h. wie

28,5 : 1.

Statt dessen haben wir aus den Beobachtungen der Abnahme der Schwingungsbögen in beiden Fällen das Verhältniss der von den inducirten Strömen herrührenden Antheile der logarithmischen Dekremente nach der *vierten* und *ersten* Versuchsreihe wie

0,002 627 : 0,000 097 = 27,1 : 1

gefunden, welches Verhältniss von den berechneten etwa um 5 Procent verschieden ist, die sich in dem beobachteten von den *magnetoelektrischen* Strömen herrührenden kleinen logarithmischen Dekremente, wie schon oben S. 105 erwähnt ist, nicht mehr verbürgen lassen.

[1]) Dieser Werth ergab sich noch kleiner, wenn man zugleich den Strom in der festen Rolle unterbrach, weil dieser Strom auch bei geöffneter Bifilarrolle noch in der messingenen Fassung der letzteren während der Schwingung Ströme inducirte, gerade so, wie dies auch in der ersten Versuchsreihe mit den Magneten der Fall gewesen war, die aber weit schwächer wirkten.

12.

Ein inducirter Strom von gleicher Stärke wie der inducirende.

Aus der *Konstanz* des logarithmischen Dekrements der schwingenden Bifilarrolle, unter dem Einflusse eines konstanten Stroms in der festen Rolle, und der dadurch inducirten Ströme in der schwingenden Bifilarrolle, ergab sich schon S. 103 für die Induktion das Gesetz, dass die Intensität des inducirten Stroms in jedem Augenblicke der *Geschwindigkeit* der schwingenden Rolle in diesem Augenblicke proportional ist. Ist nun dieses Gesetz hierdurch ausser Zweifel gesetzt, so folgt daraus, dass man bei einem gegebenen *konstanten* inducirenden Strome den von ihm *inducirten* Strom beliebig verstärken könne, wenn man jene *Geschwindigkeit* vergrössere, und dass es eine Geschwindigkeit geben müsse, bei welcher *die Intensität des inducirten Stroms eben so stark sei, wie die des inducirenden Stroms.* Es dürfte nicht uninteressant sein, eine nähere *Bestimmung* von dieser Geschwindigkeit zu geben. Diese Bestimmung kann leicht erhalten werden, wenn man 1. aus dem gemessenen Schwingungsbogen unserer Rolle und aus ihrer ebenfalls gemessenen Schwingungsdauer nach bekannten Gesetzen die *Geschwindigkeit* berechnet, welche die Rolle in der Mitte ihrer Schwingung besass; 2. wenn man aus dem ebenfalls gemessenen Werthe des logarithmischen Dekrements, welches durch die Volta'sche Induktion hervorgebracht worden war, die *Ablenkung* der Rolle berechnet, welche die Kraft, welche die Geschwindigkeit der schwingenden Bifilarrolle in dem Augenblicke verlangsamt, wo sie in der Mitte ihrer Schwingung sich befindet, wenn sie gleichförmig in gleicher Richtung fortwirkte, hervorbringen würde; und 3. endlich, wenn man durch die Bifilarrolle einen Strom gehen lässt und die Intensität dieses Stroms so lange ändert, bis die elektrodynamische Ablenkung der Rolle in Folge der Wechselwirkung dieses Stroms und des konstanten Stroms in der festen Rolle jener Ablenkung gleich ist, und wenn man alsdann das *Verhältniss* der Intensitäten beider Ströme bestimmt. — Es leuchtet dann ein, dass, wenn man die Geschwindigkeit der schwingenden Rolle nach dem Verhältniss dieser Intensitäten vergrösserte, der inducirte Strom in dem Augenblicke, wo die Rolle in der Mitte ihres Schwingungsbogens sich befindet, dem inducirenden Strom an Stärke gleich sein würde. Auf diesem Wege hat sich ergeben, dass die Bifilarrolle des Art. 1 beschriebenen Dynamometers um ihre senkrechte Drehungsaxe in einer Sekunde

31 Mal

herumgedreht werden müsste, damit der darin von dem beliebig starken oder schwachen Strome der festen Rolle dieses Instruments *inducirte*

Strom in dem Augenblicke, wo beide Rollen auf einander senkrecht stehen, die *Intensität des ursprünglichen Stroms* hätte. Bei dieser Drehungsgeschwindigkeit der Rolle, würde die grösste lineare Geschwindigkeit der Stromelemente, da nach S. 36 der Halbmesser der Bifilarrolle 33,4 Millimeter beträgt, 6½ Meter oder etwa 20 Fuss in einer Sekunde betragen.

13.

Bestimmung der Dauer momentaner Ströme mit dem Dynamometer nebst Anwendung auf physiologische Versuche.

Um mit Hülfe des Dynamometers die Wechselwirkung zweier Leitungsdrähte darzustellen und zu messen, bedarf es, wie die angeführten Thatsachen beweisen, keiner starken Ströme, sondern es reichen dazu schwache Ströme hin, welche mit anderen Hülfsmitteln kaum wahrnehmbar sind, wie z. B. die inducirten Ströme, welche durch die ohne optische Hülfsmittel kaum sichtbaren Schwingungen der Bifilarrolle, nach Art. 10 erregt wurden. Dieser Umstand ist von praktischer Wichtigkeit, weil diese Versuche dadurch eine viel grössere Ausdehnung erhalten und der Weg zu den mannigfaltigsten Anwendungen des Dynamometers insbesondere auch zu *galvanometrischen* Bestimmungen gebahnt wird. Man nennt eine Boussole, oder ein Magnetometer, wenn sie mit einem Multiplikator versehen ist, ein *Galvanometer*, weil sie dazu dient, die Intensität der galvanischen Ströme, welche durch den Multiplikatordraht geführt werden, zu messen. Die Messung der Intensität galvanischer Ströme wird hierbei *nicht auf rein galvanische*, sondern auf *elektromagnetische* Wirkungen begründet. Mit gleichem Rechte verdient auch ein *Voltameter* den Namen eines *Galvanometers,* weil es ebenfalls zur Messung der Intensität galvanischer Ströme dient, welche durch das Voltameter geleitet werden; nur ist letzteres ein *elektrochemisches* Galvanometer, ersteres ein *elektromagnetisches.* Das *Elektrodynamometer* ist nun auch ein *Galvanometer,* weil es zur Messung der Intensität galvanischer Ströme dient, welche durch dasselbe geleitet werden, es ist aber ein *rein galvanisches* oder *elektrodynamisches*, weil es die Wechselwirkung der galvanischen Ströme selbst ist, welche dabei zur Messung der Stromintensität benutzt wird, und es verdient darum sogar vorzugsweise den Namen eines *Galvanometers.*

Dennoch scheint dem *Elektrodynamometer*, wenn es sich nicht mehr um Prüfung der elektrodynamischen Grundgesetze, sondern blos um *galvanometrische* Bestimmungen handelt, keine grosse praktische Wichtigkeit zugeschrieben werden zu können, weil die mannigfaltigen Einrichtungen der Voltameter und der elektromagnetischen Galvanometer

bei den Intensitätsmessungen galvanischer Ströme schon so gute und bequeme Dienste leisten, dass kein Grund vorliegt, diese schon in Gebrauch befindlichen Instrumente durch neue zu ersetzen. So lange es sich blos um Zwecke handelt, welche mit den letzteren Instrumenten entweder schon erreicht worden sind, oder damit erreicht werden können, kann einem neuen Instrumente, wie dem Dynamometer, in der That keine grosse praktische Wichtigkeit beigelegt werden. Anders verhält es sich aber in denjenigen Fällen, wo die bisherigen Hülfsmittel unzureichend sind, wie z. B. wenn es sich um Bestimmung der Stromintensitäten *für einzelne Augenblicke* handelt.

Es giebt nämlich der Sinus oder die Tangente der Ablenkung der Magnetnadel in der Sinus- oder Tangentenboussole nur dann ein richtiges Maass der Stromintensität im Multiplikator *für einen bestimmten Augenblick*, wenn der auf die Nadel wirkende Strom im Multiplikator *konstant* ist; wenn dagegen seine Intensität *veränderlich* ist, so kann die Intensität des Stroms für einen einzelnen Augenblick aus der Ablenkung der Magnetnadel gar nicht, oder nur durch Rechnung mit Hülfe eines bestimmten für jene Veränderungen gegebenen Gesetzes, abgeleitet werden. Zwar steht es frei, den Strom alsdann nur einen *Augenblick* lang auf die Nadel wirken zu lassen, aber die durch diese augenblickliche Einwirkung hervorgebrachte Ablenkung der Nadel, wenn sie auch für genaue Beobachtung gross genug ist und feine Messung gestattet, genügt für sich allein keineswegs zur Bestimmung der Stromintensität in jenem Augenblicke, sondern es wird dazu noch die Kenntniss eines anderen Elements erfordert, nämlich die Kenntniss der *Dauer* jener momentanen Einwirkung, die mit dem Instrumente nicht zu erlangen ist. Nur wenn man die *Menge* der Elektricität, welche der momentane Strom durchführt und die *Zeit* kennt, in welcher diese Elektricität durch einen Querschnitt gegangen ist, lässt sich die Intensität bestimmen, indem man erstere durch letztere dividirt. Aus der durch jene augenblickliche Einwirkung hervorgebrachten Ablenkung der Nadel lässt sich aber nur eine Bestimmung jener Elektricitätsmenge ableiten, die Zeit bleibt unbestimmt.

Das *Dynamometer* dient nun in solchen Fällen wesentlich zur *Ergänzung* des *elektromagnetischen* Galvanometers, denn beide Instrumente geben uns *zwei wesentlich verschiedene*, von einander unabhängige Bestimmungen, aus welchen *die beiden unbekannten Elemente*, von welchen die Stromintensität abhängt, abgeleitet werden können. Die *Verschiedenheit* der mit beiden Instrumenten erhaltenen Bestimmungen zeigt sich schon, wenn man fortdauernde *konstante* Ströme von *verschiedener Intensität* durch eine Kette leitet, in welcher sowohl das gewöhnliche *Galvanometer*, als auch das *Dynamometer* eingeschlossen ist, und die

Ablenkungswinkel beobachtet, bei welchen für jeden dieser Ströme das Gleichgewicht der Instrumente besteht. Diese Ablenkungswinkel wachsen bei beiden Instrumenten mit der Intensität, aber nach verschiedenen Gesetzen; denn die Tangenten der Ablenkungswinkel des *Dynamometers* sind, wie Art. 2 nachgewiesen worden ist, den *Quadraten* der Tangenten der Ablenkungswinkel des *Magnetometers* proportional.

Noch auffallender zeigt sich jene *Verschiedenheit* in den von beiden Instrumenten gelieferten Bestimmungen, wenn man einen *konstanten* Strom, wie eben beschrieben worden ist, durch beide Instrumente gehen lässt und die korrespondirenden Ablenkungen beider beobachtet und sodann, ohne die Stromintensität zu ändern, blos die *Richtung* des Stroms in allen Leitungsdrähten der beiden Instrumente mit Hülfe eines Kommutators *umkehrt*; es ist bekannt, dass nach dieser Umkehrung der Stromrichtung im Multiplikator der *Magnetnadel* letztere eben so weit, wie vor der Umkehrung, aber nach der *entgegengesetzten* Seite abgelenkt wird. Bei dem *Dynamometer* findet dieses nicht Statt, sondern die vor der Umkehrung des Stroms vorhandene Ablenkung bleibt hier *unverändert* auch nach der Umkehrung des Stroms, so dass, wenn nur die Umkehrung des Stroms ohne Unterbrechung wirklich momentan Statt gefunden hat, von dieser Umkehrung *gar kein Einfluss* auf das Dynamometer wahrzunehmen ist. Letzteres verhält sich hierbei wie ein *elektromagnetisches* Galvanometer sich verhalten würde, wenn in dem Augenblicke, wo der Strom im Multiplikator umgekehrt, zugleich auch die *Pole der Nadel gewechselt* würden, vorausgesetzt, dass die Nadel, wie die Bifilarrolle des Dynamometers, eine bestimmte, von der Lage ihrer Pole unabhängige Direktionskraft besässe. Diese Gleichheit der Wirkungen positiver und negativer Ströme im Dynamometer pflegt bei diesem leicht anzustellenden Versuche um so mehr Aufmerksamkeit zu erregen, je mehr man gewohnt ist, entgegengesetzten Strömen entgegengesetzte Wirkungen entsprechen zu sehen.

Diese experimentell nachgewiesene *Verschiedenheit* der von beiden Instrumenten gelieferten Bestimmungen, lässt sich nun leicht genauer *definiren*. Die unmittelbare Wirkung des durch die Leitungsdrähte beider Instrumente gehenden Stroms ist ein *Drehungsmoment*, welches die Boussole oder die Bifilarrolle, auf die es wirkt, in eine rotirende Bewegung zu setzen strebt. Dieses Drehungsmoment ist bei dem *magnetischen Galvanometer* der Intensität i des Stroms, welcher auf die Nadel wirkt, und dem magnetischen Moment m der Nadel, auf welche gewirkt wird, proportional, und wird also durch die Formel

$$a \, . \, mi$$

dargestellt, worin, wenn man sich auf kleine Ablenkungswinkel beschränkt, a als eine für jedes Instrument ein für allemal zu bestimmende

Konstante zu betrachten ist. Die Wirkung dieses Drehungsmoments in dem Zeitelemente dt wird dann durch das Produkt

$$ami \,.\, \mathrm{d}t$$

ausgedrückt und ist dem Produkte der Drehungsgeschwindigkeit, in welche der drehbare Körper dadurch versetzt wird, in das Trägheitsmoment dieses Körpers gleich.

Bei dem *Dynamometer* ist dagegen das Drehungsmoment der Intensität i des Stroms in der festen Rolle, welche auf die Bifilarrolle wirkt, und auch der Intensität i des Stroms in der Bifilarrolle selbst, auf welche gewirkt wird, proportional und wird also durch die Formel

$$b \,.\, i^2$$

dargestellt, wo b, wenn man sich auf kleine Ablenkungswinkel beschränkt, eine für jedes Dynamometer ein für allemal zu bestimmende Konstante bezeichnet. Die Wirkung dieses Drehungsmoments in dem Zeitelemente dt wird also durch das Produkt

$$bi^2 \,.\, \mathrm{d}t$$

ausgedrückt, und ist ebenfalls dem Produkte der dadurch hervorgebrachten Drehungsgeschwindigkeit in das Trägheitsmoment des drehbaren Körpers gleich.

Dauert nun dieser Strom während der kurzen Zeit von $t = 0$ bis $t = \vartheta$ gleichmässig fort, und bezeichnet man die Trägheitsmomente der Nadel und der Bifilarrolle mit p und q, so ist die dadurch hervorgebrachte *Angulargeschwindigkeit*

$$\text{für die Nadel} \quad = \int_0^{\vartheta} \frac{a}{p} \cdot mi\mathrm{d}t = \frac{am}{p} \cdot i\vartheta$$

$$\text{für die Bifilarrolle} = \int_0^{\vartheta} \frac{b}{q} \cdot i^2\mathrm{d}t = \frac{b}{q} \cdot i^2\vartheta.$$

Waren beide Instrumente vorher in Ruhe, so sind sie durch Mittheilung dieser Angulargeschwindigkeit in Schwingung versetzt, und bezeichnet s und ς die *Schwingungsdauer* beider Instrumente, so wird nach bekannten Schwingungsgesetzen, wenn keine Dämpfung Statt findet, und wenn der Zeitraum ϑ, in welchem die Nadel und die Bifilarrolle jene Angulargeschwindigkeiten erhielten, so klein ist, dass die *Verrückung* derselben während dieses kleinen Zeitraums, wie bei einem *Stosse*, nicht in Rechnung gezogen zu werden braucht, die *Drehungsgeschwindigkeit* für irgend einen Augenblick am Ende der Zeit t durch

$$\frac{e\pi}{s} \cdot \cos\frac{\pi}{s}(t - \vartheta) \text{ und } \frac{\varepsilon\pi}{\varsigma} \cdot \cos\frac{\pi}{\varsigma}(t - \vartheta)$$

ausgedrückt, wo e und ε die *Elongationsweiten* bezeichnen, welche an beiden Instrumenten durch *Beobachtung* bestimmt werden können. Setzt man hierin nun für t den ersten Augenblick nach dem Aufhören des Stroms, d. i. $t = \vartheta$, so erhält man die beiden Instrumenten ursprünglich durch den Strom mitgetheilten Geschwindigkeiten:

$$\frac{am}{p} \cdot i\vartheta = \frac{e\pi}{s}, \qquad \frac{b}{q} \cdot i^2\vartheta = \frac{\varepsilon\pi}{\varsigma},$$

oder man hat zur Bestimmung der *Stromintensität* i und der *Stromdauer* ϑ zwei Gleichungen, durch welche sie aus den *gemessenen Ablenkungen* beider Instrumente e und ε berechnet werden können, nämlich:

$$i\vartheta = \frac{\pi p}{ams} \cdot e, \qquad i^2\vartheta = \frac{\pi q}{b\varsigma} \cdot \varepsilon,$$

wo $\pi p/ams$ und $\pi q/b\varsigma$ ein für allemal zu bestimmende Konstante bezeichnen. Die gesuchte *Stromintensität* i ergiebt sich hieraus:

$$i = \frac{am}{b} \cdot \frac{q}{p} \cdot \frac{s}{\varsigma} \cdot \frac{\varepsilon}{e},$$

und die gesuchte *Dauer* dieses Stroms:

$$\vartheta = \frac{\pi b p^2 \varsigma}{a^2 m^2 q s^2} \cdot \frac{e^2}{\varepsilon}.$$

Da sich die *Schwingungsdauer* beider Instrumente s und ς unmittelbar bestimmen lässt, so ist zur vollständigen Bestimmung der *Konstanten* beider Instrumente blos nöthig, einen konstanten Normalstrom, dessen *Intensität* = 1 gesetzt wird, durch beide Instrumente gehen zu lassen und die Tangenten der *Ablenkungswinkel* e' und ε' zu beobachten, für welche das Gleichgewicht alsdann besteht. Diese Tangenten der Ablenkungswinkel sind dann nach bekannten Gesetzen den Verhältnissen der ablenkenden *Drehungsmomente* für die Stromintensität = 1, nämlich

$$am \text{ und } b,$$

zu den *Direktionskräften* der Boussole und der Bifilarrolle, nämlich

$$\frac{\pi^2 p}{s^2} \text{ und } \frac{\pi^2 q}{\varsigma^2},$$

gleichzusetzen, also:

$$e' = am \cdot \frac{s^2}{\pi^2 p}, \qquad \varepsilon' = b \cdot \frac{\varsigma^2}{\pi^2 q}.$$

Substituirt man diese Werthe in den obigen Gleichungen, so erhält man

$$i\vartheta = \frac{s}{\pi} \cdot \frac{e}{e'}, \qquad i^2\vartheta = \frac{\varsigma}{\pi} \cdot \frac{\varepsilon}{\varepsilon'},$$

folglich ist

$$i = \frac{\varsigma}{s} \cdot \frac{e'}{\varepsilon'} \cdot \frac{\varepsilon}{e}$$

$$\vartheta = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{s^2}{\varsigma} \cdot \frac{\varepsilon'}{e'^2} \cdot \frac{e^2}{\varepsilon},$$

worin durch einmalige Beobachtung der Ablenkungen e' und ε' sowie der Schwingungsdauer der Boussole und der Bifilarrolle s und ς die konstanten Koefficienten ς/s, e'/ε', s^2/ς und ε'/e'^2 für immer bestimmt sind. Es geht hieraus also hervor, dass die an beiden Instrumenten gleichzeitig gemachten Beobachtungen der Ablenkungen e und ε sich ergänzen, indem sie vereint die vollständigen Data zur Bestimmung der *Intensität* und der *Dauer* eines momentanen Stroms liefern, während jede einzeln betrachtet, weder das eine, noch das andere kennen lehrt.

Die Fälle, wo diese vollständige, durch gleichzeitigen Gebrauch beider Instrumente erreichbare, Bestimmung momentaner Ströme nützliche *Anwendungen* findet, brauchen nicht weit gesucht zu werden, sie bieten sich von selbst in mannigfaltiger Art dar. So werden z. B. *momentane* Ströme vielfach zu *physiologischen* Versuchen gebraucht, um den *Einfluss des Galvanismus auf das Nervensystem* zu erforschen; denn es zeigt sich, dass eine fortgesetzte Einwirkung des galvanischen Stroms den Nerven, durch welchen er geht, zumal wenn es ein *Sinnesnerv* ist, sehr schnell abstumpft, so dass keine ausgedehntere Reihe schnell auf einander folgender Versuche auf diese Weise ausgeführt werden kann, was möglich wird, wenn man immer nur einen Augenblick lang den Strom durch den Nerven gehen lässt. Diese höchst interessanten Beobachtungen können aber zu keinen bestimmten Resultaten führen, wenn man blos die Verschiedenheit der *Wirkungen* bestimmt, welche von jenen Strömen auf die Nerven hervorgebracht werden, ohne eine *Kenntniss von den Strömen* zu haben, welche jene Wirkungen hervorbringen, insbesondere von ihrer *Intensität* und von ihrer *Dauer*. Eine gründliche Untersuchung der physiologischen Wirkungen galvanischer Ströme auf das Nervensystem fordert daher die vollständige Bestimmung dieser beiden Elemente, die sich aber nur nach der eben entwickelten Methode durch gleichzeitige Beobachtungen des *Galvanometers* und *Dynamometers* erreichen lässt. Jedenfalls ist es eine interessante Aufgabe für die Nervenphysiologie, die *Grenze* der Zeit festzusetzen, wie lange ein Strom auf den Nerven wirken müsse, um eine bestimmte Wirkung in ihm hervorzubringen, und wie sich dieser nothwendige Zeitraum mit der Stromstärke ändere. Ich darf hoffen, dass das Elektrodynamometer zu dem angegebenen Zwecke benutzt werden wird, zumal da schon in dem hiesigen *physiologischen Institute* einige Probeversuche mit gutem Er-

folge gemacht worden sind, die bei einer anderen Gelegenheit mitgetheilt werden sollen. Gegenwärtig werde ich mich zunächst auf solche Anwendungen beschränken, welche sich im Bereiche der Physik selbst machen lassen und zwar zunächst im Gebiete der reinen *Elektricitätslehre.*

14.

Wiederholung des AMPÈRE'*schen Fundamentalversuchs mit gemeiner Elektricität, und Messung der Dauer des elektrischen Funkens bei Entladung einer Leidener Batterie.*

Der AMPÈRE'sche Fundamentalversuch über die Wechselwirkung zweier Leitungsdrähte aus der Ferne war bisher mit einer einzigen Art galvanischer Ströme ausgeführt worden, welche nämlich von einer *Volta'schen Säule* herstammten. Wenn man sich nun gleich mit Recht zu der Vermuthung bewogen findet, dass alle galvanischen Ströme, aus welcher Quelle sie auch stammen mögen, gleichen Gesetzen unterworfen seien, und dass also auch das AMPÈRE'sche Gesetz über die Wechselwirkung zweier Leitungsdrähte für alle Arten von galvanischen oder elektrischen Strömen sich bestätigen werde, so ist doch diese Bestätiguug selbst keineswegs überflüssig. Insofern erscheint es schon wichtig, dass nach den im Vorhergehenden mitgetheilten Versuchen die AMPÈRE'sche Wechselwirkung auch für *magnetoelektrische* und durch *Volta-Induktion* erregte Ströme als sichere Thatsache nachgewiesen worden ist. Noch wichtiger scheint es aber zu sein, den AMPÈRE'schen Fundamentalversuch mit *gemeiner Elektricität*, wie sie bei Entladung einer Leidener Flasche oder Batterie durch den angewandten Entladungsdraht geht, zu wiederholen, da zwischen diesem Strome der gemeinen Elektricität und allen anderen galvanischen Strömen so erhebliche Verschiedenheiten Statt finden, dass nur die Erfahrung lehren kann, ob der AMPÈRE'sche Fundamentalversuch damit bestehen könne, oder nicht. Insbesondere konnte man, so lange die Erfahrung nicht darüber entschieden hatte, leicht vermuthen, dass entweder die äusserst *kurze Dauer* eines Stroms gemeiner Elektricität, oder, bei längerer Dauer, die *Diskontinuirlichkeit* des Stroms der Wechselwirkung zweier langer Leitungsdrähte, wie die beiden Rollen des Dynamometers sind, wesentlich hinderlich sein möchte, weil es möglich wäre, dass die Strömung in dem einen Drahte schon wieder aufgehört hätte, während sie in dem anderen erst begönne. Die Erfahrung am *Elektrodynamometer* hat aber bewiesen, dass der AMPÈRE'sche Fundamentalversuch auch mit gemeiner Elektricität gelinge, wovon ich hier nun genauere Rechenschaft geben will.

Es ist bekannt, dass die Wiederholung des OERSTED'*schen Funda-*

mentalversuchs mit der in einer Leidener Flasche angesammelten *gemeinen Elektricität* am sichersten gemacht wird, wenn man das eine Ende einer *nassen Schnur* an dem Auslader befestigt, das andere Ende an dem Leitungsdrahte, welcher den Multiplikator des *Galvanometers* bildet, und dessen anderes Ende mit der äusseren Belegung der Leidener Flasche in leitender Verbindung steht. Entladet man sodann die Leidener Flasche mit dem Auslader, während die nasse Schnur daran hängt, so beobachtet man eine Ablenkung der Magnetnadel in derjenigen *Richtung*, welche durch die *elektromagnetischen* Gesetze voraus bestimmt werden kann. Die Anwendung einer nassen Schnur ist jedoch zu diesem Fundamentalversuche nicht unbedingt nothwendig, sondern scheint nur dann vortheilhaft zu sein, wenn man die in Leidener Flaschen oder Batterien *angesammelte* Elektricität in Anwendung bringen will, und ist entbehrlich, wenn man die Drahtenden des Multiplikators eines empfindlichen Galvanometers mit dem positiven und negativen Konduktor einer Elektrisirmaschine unmittelbar in Verbindung setzt. Man beobachtet dann gleichfalls die Ablenkung der Nadel nach der durch die elektromagnetischen Gesetze voraus bestimmten Seite während der Drehung der Elektrisirmaschine. Es ist dabei auch nicht nothwendig, die Drähte besser zu isoliren als es bei anderen galvanischen Ketten geschieht. In dem ersten Falle war die Anwendung einer nassen Schnur darum vortheilhaft, weil ohnedem die Heftigkeit der Entladung die Gefahr einer Vereinigung der geschiedenen und in der Batterie angesammelten Elektricitäten auf anderen Wegen als durch alle Windungen des Leitungsdrahts hindurch mit sich führt. Diese Gefahr wird vermieden durch Einschaltung einer nassen Schnur, welche die Heftigkeit der Entladung mindert und dennoch gestattet, dass sehr grosse Massen Elektricität in sehr kurzer Zeit durch den Leitungsdraht sich mit einander vereinigen.

Während es nun bei Anstellung des Oersted'schen Fundamentalversuchs mit gemeiner Elektricität hauptsächlich nur darauf ankommt, recht grosse Massen Elektricität durch den Multiplikator zu leiten, *die Zeit* aber, in welcher die Elektricität durch den Draht geht, *weniger* in Betracht kommt, beruht die erfolgreiche Ausführung des Ampère'schen Fundamentalversuchs vielmehr wesentlich darauf, dass grosse Massen Elektricität *in möglichst kurzer Zeit* durch den Leitungsdraht geführt werden, wozu also die Ansammlung der Elektricität in Batterien und die Entladung der Batterie durch eine nasse Schnur vorzüglich geeignet erscheint. Die Wirkung gleicher Massen Elektricität ist bei dem *ersteren* Versuche immer die *nämliche*, die Zeit des Durchgangs mag kleiner oder grösser sein, wenn sie nur nicht so gross wird, dass sie einen beträchtlichen Theil der Schwingungsdauer erfordert; bei dem *letzteren*

Versuche soll aber, dem vorigen Artikel gemäss, die Wirkung der Zeit des Durchgangs *umgekehrt proportional* sein. Es scheint hiernach die Anwendung der Leidener Batterie nebst nasser Schnur, wenn nicht als nothwendig, doch als besonders günstig für unseren Versuch betrachtet werden zu müssen, und ich habe daher bei meinen ersten Versuchen beide wirklich gebraucht.

Ich verband also zu diesem Zwecke zwei Drahtenden der beiden Rollen des Dynamometers unter einander und führte von den zwei anderen Drahtenden das eine zur äusseren Belegung einer Leidener Batterie, das andere zu einer nassen Schnur, welche an den isolirten Auslader geknüpft war. Die Batterie wurde geladen und endlich der Auslader dem metallenen Knopfe genähert, welcher mit der inneren Belegung der Batterie in Verbindung stand. In dem Augenblicke nun, wo die Entladung der Batterie durch die nasse Schnur und durch die Rollen des Dynamometers Statt fand, wurde das vorher in Ruhe befindliche Dynamometer in eine *Schwingung* gesetzt, welche oft einen Bogen von mehreren hundert Skalentheilen umfasste, wovon sogleich mehrere Beispiele angeführt werden sollen. Der am Fernrohr stehende Beobachter konnte leicht die *Grösse* der ersten Elongation und die *Seite*, nach welcher sie erfolgte, bestimmen.

Wurde darauf der Versuch wiederholt, indem die Leidener Flasche oder Batterie auf gleiche Weise wieder geladen wurde, aber mit dem Unterschiede, dass derjenige Draht, welcher vorher mit der äusseren Belegung in Verbindung war, an das Ende der nassen Schnur des Ausladers geknüpft wurde, und das andere Drahtende statt dessen von der Schnur gelöst und mit der äusseren Belegung der Batterie verbunden ward, so war die Wirkung nicht allein der Grösse, sondern auch ihrer Richtung nach die *nämliche,* so dass in der Wirkung des *positiven* und *negativen* Stroms, wie bei gewöhnlichen Strömen, *gar kein* Unterschied Statt fand. Und diese *Richtung* der Ablenkung des Dynamometers in Folge des durchgehenden Stroms gemeiner Elektricität ergab sich auch als diejenige, welche durch das Ampère'sche Fundamentalgesetz schon *im Voraus* bestimmt war. Es ist hiermit bewiesen, dass der Ampère'sche Fundamentalversuch auch mit dem Strome der gemeinen Elektricität gemacht werden kann.

Es war nun aber ferner interessant, zu prüfen, ob zum Gelingen dieser Versuche die Anwendung der nassen Schnur nothwendig oder entbehrlich sei, sowie überhaupt, ob es Fälle gebe, wo der Strom der gemeinen Elektricität zwar den Oersted'schen, aber nicht den Ampère'schen Fundamentalversuch hervorbringe, oder ob beide Arten von Wirkungen auch bei den Strömen der gemeinen Elektricität immer verbunden seien. Es werden hierzu ausgedehntere Versuchsreihen erfordert, als

ich bisher angestellt habe; doch mögen einige vorläufige Versuche hier einstweilen Platz finden.

Es wurden die früheren Versuche wiederholt, bald mit Anwendung bald mit Ausschliessung der nassen Schnur, und zugleich damit auch die *elektromagnetischen* Versuche verbunden, indem der Multiplikator eines magnetischen Galvanometers in die nämliche Kette eingeschaltet wurde, welche die beiden Rollen des Dynamometers umfasste. Die letztere Wirkung diente dann als Merkmal und Maassstab, *ob* und *wie viel* Elektricität bei der Entladung der Leidener Flasche durch die Drahtkette wirklich hindurchgegangen war. Um bei Ausschliessung der nassen Schnur den grossen Widerstand, welchen sie leistete, auf andere Weise zu ersetzen, wurde ein feiner Argentandraht von $\frac{3}{10}$ Millimeter Durchmesser um zwei $3\frac{3}{4}$ Meter von einander abstehende Glassäulen so gewunden, dass die einzelnen $7\frac{1}{2}$ Meter langen Windungen ungefähr 40 Millimeter weit von einander entfernt waren, wodurch sie von einander vollkommen isolirt wurden. Der Argentandraht bildete 32 solche Umwindungen und das eine Ende dieses Drahts wurde nun frei durch die Luft zu der geladenen Batterie geführt. Ich stelle in folgender Tafel die Resultate zweier Versuchsreihen zur Vergleichung zusammen, wo nämlich in der einen der Strom durch die nasse Schnur ging, in der anderen die nasse Schnur aus der Kette ausgeschlossen war. Die elektrische Batterie bestand aus 4 Flaschen, jede von etwa 2 Quadratfuss belegter Fläche, die mässig stark und bei allen Versuchen so gleichmässig, wie es sich an dem Quadranten-Elektrometer erkennen liess, geladen wurden. Die Schnur war von Hanf, 320 Millimeter lang, 4 Millimeter dick und wurde vor jedem Versuche in Wasser getaucht.

1. Entladung durch die nasse Schnur:

No.	Elongation des Galvanometers $= e$	Elongation des Dynamometers $= \varepsilon$
1.	51,75	206,99
2.	56,26	214,94
3.	61,36	236,98
4.	52,68	216,63
5.	55,31	223,88

2. Entladung durch die Drahtkette, ohne Schnur:

No.	Elongation des Galvanometers $= e$	Elongation des Dynamometers $= \varepsilon$
6.	7,06	0,85
7.	7,04	0,85

Die Beobachtungen am *Galvanometer* zeigten, dass, wenn bei Anwendung der Schnur alle Elektricität durch die Kette gegangen war, ohne die Schnur nur der 7. bis 8. Theil davon durchging, wonach, unter

der Voraussetzung, dass die Entladung ohne Schnur schneller erfolge oder wenigstens nicht langsamer als mit der Schnur, eine mindestens den 50. Theil der vorhergehenden betragende elektrodynamische Wirkung zu erwarten gewesen wäre. Diese hat aber nicht Statt gefunden, sondern, wie die Vergleichung der in der dritten Kolumne unter ε aufgeführten Beobachtungen zeigt, eine fast 6 Mal noch geringere. So klein übrigens diese letztere Wirkung war, so wurde sie doch deutlich wahrgenommen.

Der Einfluss, den das Wasser ausübte, wenn die Elektricität durch dasselbe geleitet wurde, schien genauer erforscht werden zu können, wenn an die Stelle der nassen Schnur eine mit Wasser gefüllte Glasröhre gesetzt würde. Es wurde daher eine 1200 Millimeter lange, 13 Millimeter im Lichten weite Glasröhre *U*-förmig gebogen und mit Wasser gefüllt, zwischen dem Auslader und der übrigen Kette eingeschaltet und die früheren Versuche damit wiederholt, wo sich dann folgende Resultate, bei gleicher Ladung der Batterie wie früher, ergaben, welche bewiesen, dass das in einer Glasröhre eingeschlossene Wasser eine nasse Schnur hierbei nicht ersetzen könne.

Entladung durch eine mit Wasser gefüllte Glasröhre.

No.	Elongation des Galvanometers $= e$	Elongation des Dynamometers $= \varepsilon$
1.	4,68	3,23
2.	4,50	1,57

Alle Vorsichtsmaassregeln, welche bei diesem und bei dem vorigen, mit Ausschliessung der nassen Schnur gemachten, Versuche angewendet wurden, um die Elektricität zu nöthigen, ihren Weg hier durch das Wasser der Röhre, dort durch den Argentandraht zu nehmen, um durch den Widerstand dieser Körper die Heftigkeit der Entladung zu mindern und zu bewirken, dass alle Elektricität ihren Weg durch die Leitungsdrähte der Instrumente nähme, waren vergeblich; nur ein geringer Theil der Elektricität schien den letzteren Weg wirklich einzuschlagen. Wurde dagegen die Glasröhre mit einer Schnur von *Glasfäden* vertauscht, so leistete diese, wenn sie äusserlich benetzt war, ähnliche Dienste, wie die benetzte Hanfschnur. Die Entladung durch eine solche 500 Millimeter lange mit Ammoniak befeuchtete Schnur gab folgende am Galvanometer und Dynamometer sich entsprechende Elongationen:

100,55 70,35.

Es scheint die aus einer Leidener Flasche kommende Elektricität an der Oberfläche der Körper sich besonders zu verbreiten, und ein feuchter Leiter deshalb mehr Wirkung zu haben, wenn er äusserlich die Oberfläche dieser Körper bedeckt, als wenn er eingeschlossen ist.

Zuletzt mögen noch die Resultate einer mit der nassen Schnur angestellten Versuchsreihe Platz finden, wobei eine Batterie von 8 eben solchen Flaschen, wie früher gebraucht wurde, und eine hanfene Schnur von 7 Millimeter Dicke und 2 000 Millimeter Länge eingeschaltet war, diese Länge jedoch gradweise bis auf 125 Millimeter verkürzt wurde.

Länge der Schnur	Elongation des Galvanometers $= e$	Elongation des Dynamometers $= \varepsilon$	$\frac{e^2}{\varepsilon}$
2 000 mm	79,9	65,6	97,3
1 000 „	76,6	153,0	38,3
500 „	82,3	293,8	23,0
250 „	87,3	682,0	11,2
125 „	93,2	aus der Skale	
250 „	82,9	609,1	11,3
500 „	95,6	422,8	21,6
1 000 „	95,8	210,1	43,7
2 000 „	101,5	98,0	105,0

Es möge noch bemerkt werden, dass, als die Schnur in *verdünnte Schwefelsäure* getaucht worden war, eine Entladung der Batterie an dem Galvanometer einen Ausschlag von 83 Skalentheilen gab, während der Ausschlag am Dynamometer selbst bei einer Länge der Schnur von 2 000 Millimetern zu gross war, um mit der Skale gemessen zu werden.

Man sieht leicht, dass hier noch ein weites Feld interessanter Versuche offen steht, welches ich darum nicht weiter verfolgt habe, weil dabei das Bedürfniss sich zeigt, die Elektricitätsmenge in der Batterie, welche zu den Versuchen gebraucht wird, einer direkten genauen Messung zu unterwerfen, nach dem von Ries in seinen elektrischen Untersuchungen gegebenen Muster, wozu mir aber vor der Hand nicht die geeigneten Mittel zu Gebote standen, weshalb ich diese Arbeit auf eine günstigere Zeit verschiebe.

Indessen zeigt sich doch auch schon in der zuletzt angeführten Versuchsreihe, abgesehen von der *Stärke* der Wirkungen, ein solcher Grad von *Regelmässigkeit*, dass es wahrscheinlich wird, dass bei Entladungen der Leidener Batterie durch eine nasse Schnur wirklich *alle Elektricität* durch die Drahtleitung hindurchgehe und darin einen Strom bilde, der dem Strome einer galvanischen Säule einigermassen an Kontinuirlichkeit vergleichbar sein dürfte.[1]) Wäre dies der Fall, so

[1]) Es lassen sich elektrodynamische Versuche mit *zwei Dynamometern* so anordnen, dass die Elektricität in dem einen *succesive*, in dem anderen *simultan* durch die feste und schwebende Rolle geführt wird. Durch Vergleichung der Angaben beider Instrumente, wenn eine Batterie durch sie entladen würde, würde sich die Kontinuirlichkeit oder Diskontinuirlichkeit des Stroms genauer erforschen lassen.

könnte man von den vorliegenden Beobachtungen eine wichtige Anwendung machen, indem sich dann die Art. 13 entwickelten Regeln darauf anwenden liessen, um die *Dauer* des Stroms, welche mit der Dauer des *Entladungsfunkens* als gleich betrachtet werden darf, nach *absolutem Zeitmaass* zu bestimmen. Es ist bekannt, dass Wheatstone diese Bestimmung der Dauer des Entladungsfunkens auf eine ganz andere Weise bewerkstelligt hat, und es würde interessant sein, die auf so verschiedenen Wegen gefundenen Resultate mit einander zu vergleichen. Um die *relativen Zeitmaasse*, welche wir schon den obigen Versuchen selbst in der mit e^2/ε überschriebenen Kolumne beigefügt haben, auf *absolute* zu reduciren, bedarf es nach S. 114 nur eines Versuchs mit einem konstanten, durch beide Instrumente gehenden Strome, den ich zu diesem Zwecke gemacht, und gefunden habe, dass die in obiger Tafel angeführten Werte von e^2/ε mit

1 188

zu dividiren sind, um die Dauer des Stroms in *Sekunden* zu erhalten. Hiernach ist die folgende Tafel berechnet:

Länge der Schnur.	Dauer des Funkens.
Millimeter	Sekunde
2 000	0,081 9
1 000	0,032 2
500	0,019 3
250	0,009 4
250	0,009 5
500	0,018 2
1 000	0,036 8
2 000	0,088 3

oder in Mittelwerthen:

Länge der Schnur.	Dauer des Funkens.
Millimeter	Sekunde
2 000	0,085 1
1 000	0,034 5
500	0,018 7
250	0,009 5

Es ergiebt sich hieraus, dass die *Dauer des Funkens der Länge der Schnur fast proportional* ist, wie folgende Uebersicht der darnach *berechneten* Werthe und ihrer Differenzen von den *beobachteten* Werthen beweisen:

Länge der Schnur.	Berechnete Dauer des Funkens.	Unterschied von der beobachteten.
Millimeter	Sekunde	Sekunde
2 000	0,081 6	— 0,003 5
1 000	0,040 8	+ 0,006 3
500	0,020 4	+ 0,001 7
250	0,010 2	+ 0,000 7

Vergleicht man hiermit das von WHEATSTONE gefundene Resultat, wonach die Dauer des Funkens bei Entladungen durch blos metallische Leiter gegen die hier gefundene Dauer verschwindend klein ist, so steht dieses mit der hier gefundenen Proportionalität der Funkendauer und der Länge der nassen Entladungsschnur in vollkommenem Einklange. Dass hiernach die *Bewegung der Elektricität im Wasser* so *langsam* geschieht, dass die Zeit, welche sie für den kurzen Weg von 2 Metern braucht, ungefähr $\frac{1}{12}$ Sekunde beträgt, verdient jedenfalls besondere Aufmerksamkeit. Man könnte zwar gegen die Anwendung der Regel, wonach diese Zeitbestimmungen gemacht sind, abgesehen von dem von der Diskontinuirlichkeit der Ströme gemeiner Elektricität hergenommenen Einwande (von welchen schon oben die Rede war, und welcher in hohem Grade oder ganz durch den Einfluss des Wassers beseitigt sein dürfte) noch den Einwand machen, dass der Strom im ersten Momente am intensivsten sei, und *allmählig abnehmen* werde, statt dass obige Regel nur dann genaue Anwendung findet, wenn der Strom während seiner kurzen Dauer immer gleiche Intensität besitzt. Erfährt man aber auch in diesem Falle nicht die wahre Dauer, sondern diejenige Dauer, welche einer *mittleren Stromstärke* entsprechen würde, so dürfte doch der Werth der Bestimmung dadurch wenig verlieren, weil die Kenntniss der letzteren Dauer in der Regel mehr Interesse haben wird, als die der ersteren. Auch ist zu bemerken, dass aus demselben Grunde bei der WHEATSTONE'schen Bestimmung der Funkendauer eine ähnliche Differenz veranlasst werde, weil der Funke in eine Linie ausgedehnt wird, die in Folge jener Abnahme sich allmählig ohne scharfe Begrenzung verliert.

15.

Es würden hier noch zwei Untersuchungen im Gebiete der *reinen Elektricitätslehre* auszuführen sein, für welche die Anwendung des Dynamometers einen neuen Weg eröffnet, auf die ich jedoch gegenwärtig noch nicht näher eingehen werde, weil es noch an den nöthigen Versuchen fehlt, um zugleich mit der Methode auch die damit gewonnenen Resultate darzulegen. Diese beiden Untersuchungen betreffen:

1. die Bestimmung der Geschwindigkeit der Stromverbreitung, worüber bisher blos einige wenige Versuche von WHEATSTONE vorliegen, die aber nach WHEATSTONE's eigener Angabe noch zu keinen sicheren Resultaten geführt haben;
2. die Bestimmung der elektromotorischen Kraft einer galvanischen Kette unabhängig von der Polarisation ihrer Platten.

Die *erstere* Anwendung fordert, dass die Bifilarrolle von der festen durch lange Leitungsdrähte geschieden, und in dieser langen Kette ein

Strom hervorgebracht werde, dessen Richtung gleich schnell wechselt, wie WHEATSTONE's Spiegel herumgedreht wird. Es würde die Anwendung des Dynamometers, im Vergleich mit WHEATSTONE's Methode, den Vortheil gewähren, dass galvanische Ströme statt gemeiner Elektricität gebraucht, und die Kette nirgends unterbrochen würde, was bei WHEATSTONE zur Darstellung der Funken nothwendig war. Die *letztere* Anwendung beruht auf der Messung momentaner Ströme nach Art. 13.

16.

Anwendung des Dynamometers auf Intensitätsmessungen der Schallschwingungen.

Es bleibt noch übrig, eine Anwendung des Dynamometers auf Untersuchungen in einem anderen Theile der Physik mitzutheilen, welche ein besonderes Interesse darum zu haben scheint, weil sie dasjenige, was mit diesem Instrumente zu leisten sei, von einer eigenthümlichen Seite in ein helles Licht setzt. Wir besitzen ausserordentlich feine *Galvanoskope,* womit wir im Stande sind, auch die schwächsten in der Natur vorkommenden Ströme zu entdecken und zu erforschen. Wir brauchen uns blos der schönen Arbeiten von MELLONI zu erinnern, um auf den Gebrauch dieser feinen Instrumente und die damit aufgefundenen Spuren von elektrischen Bewegungen die grösste Wichtigkeit für die gesammte Wissenschaft zu legen. Trotz dieser Feinheit der Instrumente ist es aber in vielen Fällen doch nicht gelungen, elektrische Ströme überall nachzuweisen, wo man solche vermuthete, vielleicht weil jene Instrumente trotz ihrer Feinheit dazu ungeeignet waren. Dieser Grund verdient um so mehr Beachtung, als sich *eine* Art von Strömen nachweisen und wirklich darstellen lässt, von denen auch jene feinsten Instrumente der Natur der Sache nach gar nicht afficirt werden können. Dieses findet Statt, wenn wir mit einem veränderlichen Strome zu thun haben, welcher in sehr kurzen, auf einander folgenden Zeitabschnitten *seine Richtung immer wechselt.* Die abwechselnd entgegengesetzten Wirkungen dieses Stroms auf die empfindlichste Magnetnadel müssen sich, wenn der Magnetismus der letzteren immer der nämliche bleibt, vollkommen annulliren. Die von POGGENDORFF (Annalen 1838, Bd. LXV, S. 355 ff.) beobachteten Erscheinungen, wo dieses nicht Statt zu finden schien, rührten jedenfalls von einer Veränderlichkeit des Nadelmagnetismus her, und würden bei sehr beschleunigtem Stromwechsel wieder verschwunden sein. Solche Ströme, deren Richtung sehr schnell wechselt, können also in der Natur in grosser Menge existiren, ohne dass wir noch eine Ahnung von ihrer Existenz haben, weil wir kein Mittel besitzen, sie zu entdecken. Und es ist gar nicht unwahrscheinlich, dass solche Ströme

existiren, denn die Bewegung der Elektricität in ihnen würde sich von der Bewegung der Elektricität in gewöhnlichen Strömen nur dadurch unterscheiden, dass sie in einer *Schwingung* bestände, während in letzteren die Bewegung der Elektricität *progressiv* ist. Da nun die progressive Bewegung der Elektricität in der Natur so häufig vorkommt, so ist nicht einzusehen, warum nicht, bei so grosser Beweglichkeit, auch bisweilen Verhältnisse eintreten sollten, welche eine schwingende Bewegung begünstigten. Wenn z. B. die Lichtundulationen eine Wirkung auf die elektrischen Fluida übten und das Gleichgewicht derselben zu stören vermöchten, so würde gewiss zu erwarten sein, dass diese *Wirkungen* der Lichtundulationen sich der Zeit nach eben so periodisch gestalteten, wie die *Lichtundulationen selbst*, so dass das Resultat in einer *elektrischen Schwingung* bestände, die wir aber mit unseren Instrumenten nicht zu entdecken vermöchten. Nun geschehen die Lichtschwingungen so schnell, dass, wenn die dadurch erregten elektrischen Schwingungen einen gleich geschwinden Wechsel befolgten, kaum zu hoffen wäre, dass es gelingen werde, mit irgend einem Instrumente eine Wirkung davon wahrzunehmen. Es finden sich aber in der Natur auch langsamere Schwingungen, z. B. die akustischen, und es fragt sich daher, ob es nicht elektrische Bewegungen in der Natur gebe, welche ihnen ihren Ursprung verdanken, und wenn es solche gebe, auf welche Weise wir dieselben entdecken und erforschen könnten.

Ich will hier wenigstens ein Beispiel von solchen durch Schallschwingungen erregten *elektrischen Schwingungen* geben und den thatsächlichen Beweis liefern, wie solche elektrische Schwingungen mit Hülfe des *Dynamometers* wahrgenommen und erforscht werden können, und wie die messbaren Wirkungen dieser elektrischen Schwingungen wieder benutzt werden können, um auf die Schallschwingungen, von denen sie herrühren, rückwärts zu schliessen, und dadurch für manche akustische Untersuchungen eine neue Bahn zu eröffnen, für welche es uns gänzlich noch an geeigneten Mitteln gebricht, die *Intensität der Schallschwingungen* zu messen.

In der That besteht die Eigenthümlichkeit des Dynamometers, welche dasselbe am meisten charakterisirt und von allen anderen Galvanometern unterscheidet, darin, dass es für die *Richtung* des Stroms, der darauf wirkt, *indifferent* ist, während andere Galvanometer bei entgegengesetzten Richtungen der Ströme entgegengesetzte Einwirkungen erleiden. Es ist darauf schon oben Art. 13 aufmerksam gemacht worden. Wir können dies kurz dadurch ausdrücken, dass das Dynamometer in Beziehung auf *konstante* Ströme einen Maassstab für das *Quadrat der Stromintensität* gebe, während andere Galvanometer einen Maassstab für die Stromintensität selbst darbieten.

Aus dieser charakteristischen Eigenschaft des Dynamometers leuchtet nun von selbst ein, dass die schnell auf einander folgenden Wirkungen entgegengesetzter Ströme sich nicht, wie beim elektromagnetischen Galvanometer, einander aufheben, sondern vielmehr summiren müssen; und dass folglich das Dynamometer seiner Natur nach seine wahre Bestimmung darin finde, solche auf andere Weise nicht wahrzunehmende Ströme an den Tag zu bringen.

Nun sind zwar die *Schallschwingungen* meist in so engen, fast mikroskopischen Grenzen eingeschlossen, dass wir kaum hoffen dürfen, durch dieselben elektrische Schwingungen in so weiten Grenzen hervorzubringen, als nothwendig sind, um auf das Dynamometer merklich zu wirken. Wenn man indessen die absoluten Geschwindigkeiten, mit welchen sich die schallenden Körper in der Mitte ihrer Schwingungen bewegen, berechnet, so ergiebt sich, dass diese, in Betracht der kurzen Schwingungsdauer, trotz des kleinen Schwingungsbogens, nicht ganz unbeträchtlich sind, sondern oft einen Fuss und mehr in einer Sekunde betragen. Hierauf bauend, habe ich einen Versuch so angestellt, wie er am ersten zu einem Resultate führen zu können schien. Ich habe einen Klangstab von Stahl *aaa* Fig. 13 anfertigen und härten lassen, habe den-

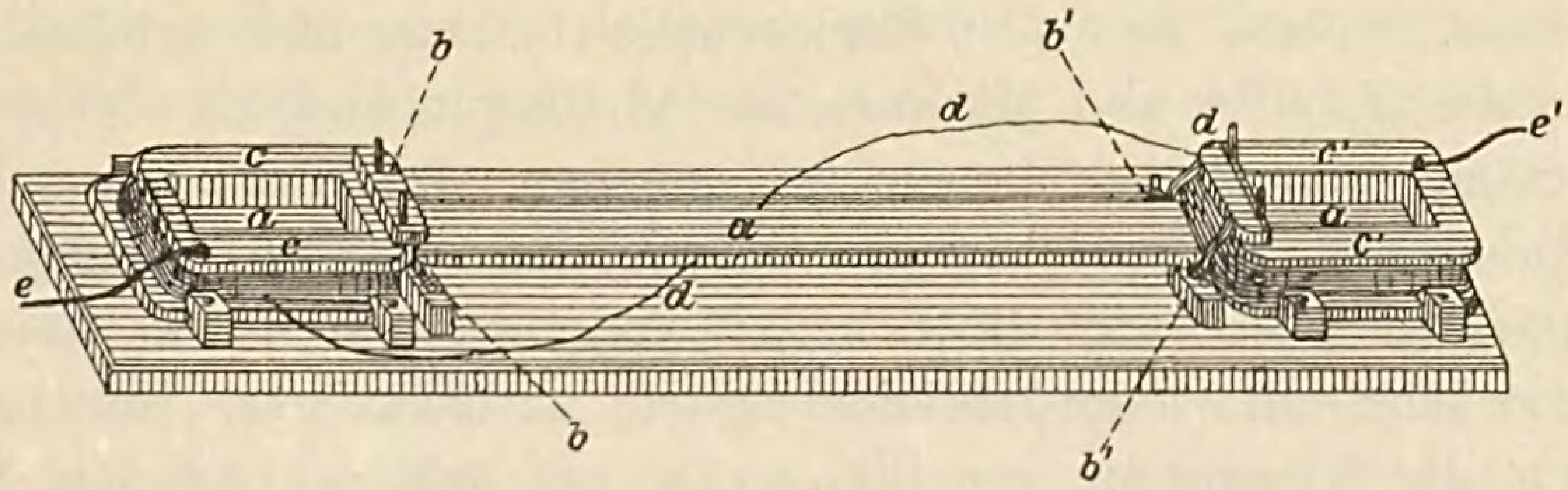


Fig. 13.

selben magnetisirt und ihn sodann in den Endpunkten *b*, *b*, *b'*, *b'* seiner Knotenlinien zwischen Schraubenspitzen als Drehungsaxenbefestigt, wie ich es in Poggendorff's Annalen 1833, Bd. XXVIII, S. 4 [1]) beschrieben habe, und zwar so, dass er in drei gleichzeitig nach entgegengesetzten Seiten schwingende Abtheilungen zerfiel. Die beiden Endabtheilungen machten folglich gleichzeitig ihre Schwingungen nach gleicher Richtung, abwechselnd aufwärts und abwärts. Der freie Magnetismus, welcher in diesen Stäben verbreitet ist, kann nach der von Gauss angegebenen idealen Vertheilung, welche in allen Wirkungen nach aussen die wirkliche Vertheilung vertritt, auf der Oberfläche des Stabs verbreitet gedacht werden, und zwar muss bei starker Magnetisirung der freie Nordmagnetismus fast gänzlich auf der Oberfläche der einen schwingenden Endabtheilung, der freie Südmagnetismus fast gänzlich auf der Oberfläche der anderen schwingenden Endabtheilung, und zwar je näher am

[1]) [Wilhelm Weber's Werke, Bd. I, p. 367.]

Ende, desto mehr koncentrirt gedacht werden, d. h. gerade da am meisten, wo die Schallschwingungen am grössten sind. Daher umgab ich nun diese beiden schwingenden Endabtheilungen mit starken Induktoren *ccc* und *c'c'c'* von feinem Kupferdrahte, welche jedoch den Stab nirgends berührten, damit seine Schwingungen nicht gehemmt würden. Auch war an den einander zugekehrten Seiten der Induktoren zwischen ihren Drahtwindungen ein Durchgang frei geblieben, durch welchen der Stab mit seinen Enden in die Induktoren eingeschoben wurde. Die Windungen der Induktoren waren unter sich parallel und lagen in einer Ebene, gegen welche die Schallschwingungen des Klangstabs senkrecht geschahen. Die beiden Induktoren wurden mit zwei ihrer Drahtenden *dddd* unter sich verbunden, so, dass sie entgegengesetzt gewundene Spiralen bildeten. Ihre beiden Drahtenden *ee* und *e'e'* wurden mit zwei Drahtenden der festen und drehbaren Rolle des Dynamometers in Verbindung gesetzt, deren beide anderen Drahtenden unter sich verbunden waren. Das Dynamometer war vollkommen in Ruhe. Nachdem alles so vorbereitet war, wurde der Klangstab durch einen starken Schlag mit einem weichen Klöppel auf seine Mitte in starke Schwingung gesetzt. Sogleich zeigte sich eine Ablenkung der Bifilarrolle, welche 20 bis 30 Skalentheile betrug, und zeichnete man alsdann die Maxima und Minima des Schwingungsbogens der von nun an schwingenden Bifilarrolle auf, so sah man, dass der daraus berechnete Ruhestand, um welchen die Schwingung geschah, geändert war, dass derselbe aber, wie die Schallschwingungen an Stärke abnahmen, schnell wieder zum ursprünglichen Stande zurückkehrte. Ich bemerke, dass ich die Elongation der Bifilarrolle auf mehrere hundert Skalentheile gebracht habe, indem ich den Klangstab nur so lange schwingen liess, als die Elongation im Wachsen war, dagegen den Klangstab dämpfte, während die Bifilarrolle wieder rückwärts schwang, und den Klangstab von neuem anschlug, sobald die Bifilarrolle wieder in der ursprünglichen Richtung sich zu bewegen begann u. s. f.

Es bedarf wohl kaum der Erwähnung, dass, wenn nach der angegebenen Methode wirklich genauere Bestimmungen über die Intensität der Schallschwingungen gewonnen werden sollen, der Klangstab nicht durch einen Klöppelschlag in Schwingung versetzt werden darf, weil die Intensität der so hervorgebrachten Schwingungen sehr schnell abnimmt und bald ganz verschwindet, sondern durch eine fortdauernde geregelte Einwirkung in einer konstanten Schwingung längere Zeit erhalten werden muss.

Dass die elektrischen Schwingungen, welche hierdurch thatsächlich nachgewiesen werden, unter den Verhältnissen, unter welchen wir beobachteten, Statt fänden, liess sich mit Sicherheit voraussetzen; es kam daher nur darauf an, die Methode, solche Schwingungen *wahrnehmbar*

zu machen, daran zu prüfen. Nachdem nun diese Methode aber bewährt gefunden worden ist, so kann man darauf weiter bauen, und gewiss wird die Benutzung dieser Methode zur Entdeckung elektrischer Schwingungen unter bisher noch nicht geahnten Verhältnissen führen. Zum Beleg der Mannigfaltigkeit dieser Erscheinungen möge hier noch folgender Versuch angeführt werden. Wird nahe neben einer schwingenden Saite, die einen Theil einer in sich zurücklaufenden Drahtkette bildet, ein starker galvanischer Strom vorbeigeführt, so werden in Folge jener Schwingungen in der Drahtkette abwechselnd positive und negative Ströme inducirt, auf ähnliche Weise, wie von dem schwingenden Magnetstabe, deren Intensität mit dem Dynamometer gemessen werden kann.

17.

Ueber verschiedene Einrichtungen des Dynamometers.

Es giebt *drei* wesentlich verschiedene Einrichtungen, welche man dem Dynamometer geben kann, die alle geeignet sind, zu genauen Messungen zu dienen, und unter verschiedenen Verhältnissen eigenthümliche Vorzüge gewähren. Ausser der *ersten* Einrichtung, welche bisher in Anwendung gebracht wurde, bietet sich nämlich zunächst eine *zweite* gleichsam von selbst dar, da sie ihrem wesentlichsten Bestandtheile nach schon häufig zur Beobachtung der Einwirkung des Erdmagnetismus auf einen Stromleiter benutzt worden ist. Man hat nämlich zu diesem Zwecke einen kreisförmig gewundenen Leiter sammt der Säule, von welcher der Strom ausgeht, an einem Faden oder Drahte, wie einen Magnet, aufgehangen und hat das Drehungsmoment beobachtet, welches die Erde auf einen solchen in sich geschlossenen Kreisstrom auf gleiche Weise wie auf eine aufgehangene Magnetnadel ausübt. In der That besitzt man in dieser Vorrichtung einen drehbaren Leiter, dessen Schwingungen und Ablenkungen eben so fein, wie die unserer Bifilarrolle beobachtet werden können, und es ist nur nöthig, diese schwebende Säule mit einem festen Multiplikator zu umgeben, durch welchen ebenfalls ein Strom geht, um das Dynamometer zu vollenden. Dazu kommt nun, dass durch die Entdeckung der *konstanten* Säulen von Daniell und Grove der Weg zu feineren Anwendungen eines solchen Instruments gebahnt worden ist, denen früher die Veränderlichkeit der Ströme entgegenstand. Besonders eignet sich hierzu ein kleiner Grove'scher Becher, der bei geringen Dimensionen und kleinem Gewichte, einen ziemlich starken und konstanten Strom giebt. Fügt man Spiegel, Fernrohr und Skale hinzu, so lassen sich die feinsten Beobachtungen mit diesem Instrumente ausführen. Fig. 14 stellt ein solches Instrument, wie ich es zu diesem Zwecke gebraucht habe, dar. A ist der ringförmig aufgewundene Draht, dessen Enden durch Verbindungsstücke von Messing

ab und *a'b'* mit dem Platin- und Zinkpole eines kleinen Grove'schen Bechers *B* vom Mechanikus Kleinert in Berlin in Verbindung gesetzt wurde. Dieser Becher steht auf einem hölzernen Gestell, welches oberhalb mit einem Torsionskreise *C* versehen ist, an welchem bei *D* der Aufhängungsfaden befestigt wird.

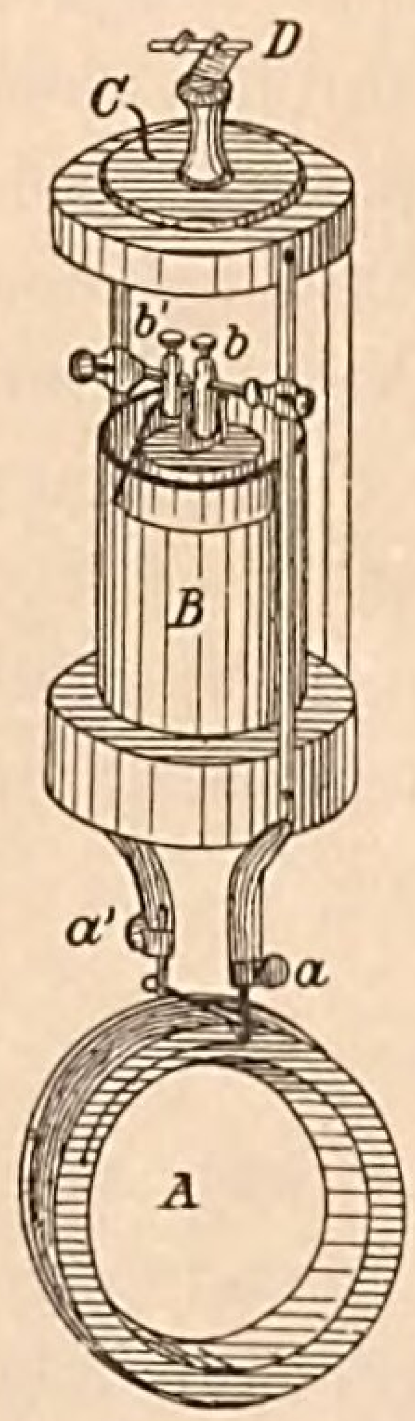


Fig. 14.

So geeignet indess diese Einrichtung des Dynamometers für einige besondere Zwecke sein möge, so ist sie doch weit entfernt, die erstere Einrichtung ersetzen zu können, wovon der Grund in dem Mangel *zweier* Eigenschaften liegt, welche das Dynamometer mit der *Bifilarrolle* besitzt, und die darauf beruhen, dass der Strom, welcher durch die Bifilarrolle geht, sich weiter leiten lässt, sowohl durch die als Multiplikator dienende feste Rolle, als auch durch beliebige andere Leiter. Die *erste* Eigenschaft besteht darin, dass dieses *Dynamometer* mit einem *Galvanometer* zugleich gebraucht werden kann, wodurch eine unabhängige Intensitätsmessung des Stroms in der Bifilarrolle gewonnen wird, was bei jenem Instrumente nicht der Fall ist, weil bei ihm der Strom der schwebenden Säule nicht durch den Multiplikator eines *Galvanometers* abgeleitet werden kann. Die gleichzeitigen Beobachtungen am *Galvanometer* und *Dynamometer* gestatten aber, die elektrodynamischen Wirkungen auf *gleiche Stromintensität* zu reduciren, wie dies im Vorhergehenden häufig geschehen ist. Der Mangel dieser Eigenschaft wird durch Anwendung konstanter Säulen nicht gänzlich beseitigt, weil die Stromintensität auch solcher Säulen immer noch beträchtlichen Schwankungen unterworfen ist, welche bei genaueren Bestimmungen keineswegs vernachlässigt werden dürfen.

Die *zweite* Eigenschaft besteht darin, dass man, indem man die mit dem *Dynamometer* zu untersuchenden Ströme durch *beide* Rollen, durch die feste sowohl, als durch die drehbare, gehen lässt, das *Quadrat der Stromintensität* bestimmen kann, welches unabhängig ist von der *Richtung* des Stroms. Hierauf beruhte die Eigenthümlichkeit des Instruments, welche es fähig machte, in Verbindung mit dem elektromagnetischen Galvanometer die nothwendigen Elemente zur Kenntniss *momentaner* Ströme zu liefern. Siehe oben Art. 13. Auch diese Eigenschaft mangelt dem anderen Instrumente, dessen drehbare Rolle eine in sich abgeschlossene schwebende Säule bildet; denn die verschiedenen zu *untersuchenden* Ströme können hier blos durch den Leitungsdraht der *festen* Rolle geführt werden, während der Strom in der *drehbaren* Rolle unverändert bleibt, wo dann die Wirkung, wie beim elektromagnetischen Galvanometer, der Stromintensität selbst proportional ist,

und folglich das Instrument blos die Dienste eines elektromagnetischen Galvanometers zu leisten, dieselben aber nicht zu ergänzen vermag.

Ich gehe zur *dritten* Einrichtung des Dynamometers über, welche, indem sie die wesentlichsten Eigenschaften der ersten theilt, geeignet ist, den elektrodynamischen Messungen eine noch grössere Ausdehnung zu geben, besonders in solchen Fällen, wo die *erste*, wegen der nothwendigen Feinheit der Aufhängungsdrähte, durch welche der Strom hindurch geleitet wird, den Dienst versagt.

Diese dritte Einrichtung beruht auf demselben Princip, welches ich in den Commentat. Soc. Reg. Sc. Gottingensis recentiores, Vol. VIII [1]) zu dem Zwecke entwickelt habe, eine vollkommen drehbare, von der Reibung freie *Wage* darzustellen, nämlich auf dem Princip der Kompensation zwischen *Schwerkraft* und *Federkraft*. Ich habe dort den horizontalen Wagbalken an zwei elastischen vertikalen Federn aufgehangen. Diese Federn beugten sich zwar, wenn der Wagbalken gedreht wurde, und suchten also durch ihre *Federkraft* die Drehung desto mehr zu *hemmen*, je mehr der Wagbalken gedreht worden war; fand aber dabei die Drehung des Wagbalkens um eine Axe Statt, welche tiefer lag, als der Schwerpunkt desselben, so suchte die *Schwerkraft*, wenn der Wagbalken gedreht wurde, die Drehung zu *fördern*, desto mehr, je mehr der Wagbalken gedreht worden war, und es liess sich eine solche Einrichtung treffen, dass jene *hemmende* Einwirkung der *Federkraft* und diese *fördernde* Einwirkung der *Schwerkraft* einander das Gleichgewicht hielten, und der Wagbalken folglich nicht blos in horizontaler, sondern auch in geneigter Lage im Gleichgewicht beharren und ohne von der Reibung gehindert zu werden, beim geringsten Antriebe aus einer dieser Lagen zur anderen übergehen konnte.

Einen solchen *kompensirten* Wagbalken benutzte ich nun für das Dynamometer und ersetzte dadurch die drehbare Rolle, indem ich von den beiden Aufhängungsfedern hier denselben Gebrauch für die Zuleitung und Ableitung des Stroms mache, wie dort von den beiden Aufhängungsdrähten. Diese Federn sind dann insbesondere jenen feinen Drähten vorzuziehen, wenn es sich um Ströme von grosser Intensität handelt, welche nicht durch feine Drähte geleitet werden dürfen. Bei solchen Strömen begnügt man sich, dieselben durch eine möglichst starke und kurze Kette zu führen; daher kann der Wagbalken, durch welchen dieser Strom gehen soll, aus einem von jenen beiden Federn getragenen, mässig langen Stabe bestehen, an welchem aber ein Spiegel für die feinere Beobachtung angebracht wird. Was endlich die *feste* Rolle betrifft, so wird dieselbe aus gleichem Grunde durch einen anderen, mässig

[1]) [WILHELM WEBER's Werke, Bd. I, p. 497.]

langen *festen* Stab ersetzt, durch welchen der galvanische Strom ebenfalls geleitet wird, und welcher dann auf jenen *drehbaren* Stab wirkt, und ihn, wie eine Wage, ablenkt. Die Empfindlichkeit dieses Instruments beruht hauptsächlich darauf, dass die beiden Stäbe (der feste und der drehbare) parallel in geringer Entfernung von einander gestellt werden. Ich habe dieses Instrument vorzüglich dazu bestimmt, um den elektrodynamischen Versuchen mit *gemeiner* Elektricität eine grössere Ausdehnung zu geben, indem die besonderen Umstände entbehrlich werden, welche nöthig waren, um die Entladung einer Leidener Flasche durch die vielen Windungen der beiden Rollen des *ersten* Dynamometers wirklich sicher zu bewerkstelligen. Dieses letzte Instrument ist bisher noch nicht in derjenigen Vollkommenheit ausgeführt worden, wie es für eine solche Versuchsreihe nöthig sein würde.

Ehe ich diesen Abschnitt über die Einrichtung der Dynamometer beschliesse, will ich noch eine Bemerkung über die Verwandlung derselben in *magnetische Galvanometer* hinzufügen. Ich habe schon erwähnt, dass die für die oben beschriebene *zweite* Einrichtung benutzte, ganz in sich selbst abgeschlossene *schwebende* Säule ihre Anwendung zu *elektromagnetischen* Versuchen, nämlich um die Einwirkung des Erdmagnetismus auf einen Stromleiter zu beobachten, schon früher gefunden habe. Mit dieser in sich abgeschlossenen schwebenden Säule, wenn man auf die Unveränderlichkeit ihres Stroms vollkommen bauen könnte, würden sich alle Versuche und Messungen über den Erdmagnetismus gerade so, wie mit dem Magnetometer ausführen lassen, und es würde ihm in so fern der Name eines *galvanischen Magnetometers* zu geben sein. Unser erstes Dynamometer lässt sich dagegen zu einem *magnetischen Galvanometer* gebrauchen, welches sogar im Vergleiche mit einem mit Multiplikator versehenen Magnetometer grosse Vorzüge darbietet, wenn es sich nicht blos um relative, sondern um *absolute* Bestimmung der Stromintensitäten handelt. Bei dem mit Multiplikator versehenen Magnetometer steht der Stromleiter fest, und der Magnet ist drehbar; es ist aber ohne wesentlichen Einfluss auf die Wirkung, wenn man dies Verhältniss umkehrt und den Magnet feststellt, während der Stromleiter drehbar ist. Zu dem drehbaren Stromleiter kann nun die an zwei Aufhängungsdrähten schwebende Rolle unseres Dynamometers dienen, und zu dem festen Magnete (welcher hier die feste Rolle vertritt) kann man die Erde selbst benutzen. Soll die Erde nun aber diesen Dienst wirklich leisten, so muss die Bifilarrolle anders orientirt werden, nämlich statt wie früher, gleich einem *Deklinationsmagnetometer*, so orientirt zu werden, dass ihre Axe dem magnetischen Meridian parallel ist, muss sie, gleich dem *Intensitätsmagnetometer*, so orientirt werden, dass ihre Axe senkrecht auf dem magnetischen Meridiane steht. Man kann sie

dann ein *magnetisches Bifilargalvanometer* nennen. Dieses einfache Instrument gewährt dann für *absolute* Bestimmung der Stromintensitäten grosse Vortheile, eben dadurch, dass die Lage und Entfernung der einzelnen Theile des Leitungsdrahts gegen die einzelnen Theile des Magneten wegen der grossen Entfernung, aus welcher der Erdmagnetismus wirkt, nicht mehr einzeln in Rechnung gezogen zu werden braucht, und daher zum Zwecke dieser absoluten Bestimmung der Stromintensität ausser der Kenntniss des Erdmagnetismus, der Ablenkung, der Schwingungsdauer und des Trägheitsmoments nach absoluten Maassen, nur die Kenntniss eines einzigen Elements erforderlich ist, nämlich die Kenntniss des vom Drahte umschlossenen *Flächenraums*, wie ich schon in den „Resultaten aus den Beobachtungen des Magnetischen Vereins im Jahre 1840“ S. 93 [1]) auseinander gesetzt habe, wo ich einige solche Intensitätsbestimmungen nach absolutem Maasse, welche mit diesem Instrumente gemacht worden, mitgetheilt habe.

Die bisherige Untersuchung hatte hauptsächlich den Zweck, auf *experimentellem* Wege zu Maassbestimmungen über die elektrodynamischen Kräfte zu führen, und dieselben nach den auf Raum-, Zeit- und Massenmaass reducirten *absoluten* Maassen auszudrücken. Hierdurch war die den Instrumenten gegebene Einrichtung motivirt, welche, wie bei den Magnetometern von Gauss, eine festere Aufstellung und einen grösseren Raum in Anspruch nimmt, als bei anderen physikalischen Apparaten erfordert wird, bei welchen der Maassstab an dem zu beobachtenden Instrumente unmittelbar angebracht ist. Bei einer auf jene Weise einmal zweckmässig getroffenen Einrichtung konnten einzelne grössere Versuchsreihen mit Genauigkeit ausgeführt werden; es liess sich aber diese Einrichtung nicht so leicht wieder ändern und verschiedenartigen Zwecken anpassen. Ich muss es dabei noch als einen besonders günstigen Umstand anerkennen, dass die Räumlichkeit des Leipziger physikalischen Instituts diesen Einrichtungen im Allgemeinen günstig war; dennoch musste ich zu manchen Zwecken, wie mehrfach erwähnt worden ist, für jetzt nur auf Probeversuche mich beschränken, weil nicht alle Einrichtungen auf gleich entsprechende Weise hergestellt werden konnten. Mit Rücksicht auf diese, anderwärts vielleicht noch mehr als hier, vorhandene äussere Beschränkung, und weil auch viele Experimentatoren mit solchen Instrumenten zu beobachten weniger gewohnt sind, habe ich den hiesigen Mechanikus Herrn Leyser veranlasst, dass er, zum leichteren und bequemeren Handgebrauche, kleinere portative Instrumente, ohne katoptrische Vorrichtung, auf die gewöhnliche einfache Weise mit Zeiger und getheiltem Kreise ausführe, welche zur Anstellung der meisten

[1]) [Wilhelm Weber's Werke, Bd. III, p. 15.]

Versuche und zu gewöhnlichen Messungen genügen. Auf diese kleineren Instrumente mache ich Diejenigen aufmerksam, welche sich mit ähnlichen Versuchen beschäftigen wollen, unter Verhältnissen, welche die Anwendung der beschriebenen Instrumente nicht gestatten.

Ueber den Zusammenhang der elektrostatischen und der elektrodynamischen Erscheinungen,

nebst Anwendung auf die elektrodynamischen Maassbestimmungen.

18.

Da das von Ampère aufgestellte elektrodynamische Fundamentalgesetz durch genaue Messungen vollkommen bestätigt gefunden wird, so könnten die *Fundamente der Elektrodynamik* vielleicht für abgeschlossen betrachtet werden. Es würde dies mit Recht geschehen, wenn alle weiteren Forschungen nur in der Entwickelung der Anwendungen und Folgen, welche sich auf jenes Fundamentalgesetz gründen lassen, beständen. Denn könnte man auch zwar noch nach dem *Zusammenhange* fragen, welcher zwischen dem *elektrodynamischen* und *elektrostatischen* Fundamentalgesetze bestehe, so würde doch, so interessant es auch sein möge, und so wichtig für eine genauere Kenntniss der *Natur der Körper,* diesen Zusammenhang erforscht zu haben, sich daraus nichts mehr zur Erklärung der *elektrodynamischen Erscheinungen* ergeben können, wenn diese wirklich schon ihre vollständige Erklärung in dem Ampère'schen Fundamentalgesetze gefunden hätten. Kurz, ein wesentlicher Fortschritt für die Elektrodynamik selbst würde dadurch, dass man ihr Fundament wieder auf das Fundament der Elektrostatik zurückführte, nicht erreicht werden, so wichtig und interessant auch in anderen Beziehungen eine solche Zurückführung sein möchte.

Diese Ansicht von dem Abschlusse, zu welchem die Fundamente der Elektrodynamik durch Ampère's Grundgesetz und dessen Bewährung gelangt seien, setzt aber wesentlich voraus, dass wirklich *alle* elektrodynamischen Erscheinungen in jenem Grundgesetze ihre Erklärung finden. Wäre dies nicht der Fall, gäbe es irgend eine Klasse von elektrodynamischen Erscheinungen, welche ihre Erklärung darin nicht fänden, so würde jenes Grundgesetz nur als ein provisorisches zu betrachten sein, welches durch ein wirklich allgemein gültiges und auf alle elektrodynamische Erscheinungen anwendbares definitives Grundgesetz künftig zu ersetzen wäre. Und es könnte dann wohl geschehen, dass man zu diesem definitiven Grundgesetze gelangte, indem man zunächst eine Zurückführung des Ampère'schen Gesetzes auf ein allgemeineres, die Elektrostatik mit umfassendes Grundgesetz versuchte.

Es wäre nämlich möglich, dass aus der nämlichen Quelle, aus welcher alsdann sowohl das elektrostatische als das AMPÈRE'sche Gesetz abgeleitet würde, unter veränderten Verhältnissen sich auch das Gesetz der übrigen elektrodynamischen Erscheinungen ergäbe, die sich auf das AMPÈRE'sche Gesetz unmittelbar nicht zurückführen lassen, und dass dann die Fundamente der Elektrodynamik in grösster Allgemeinheit nicht abgesondert für sich, sondern nur abhängig von dem allgemeinsten, die Fundamente der Elektrostatik mit umfassenden, elektrischen Grundgesetze dargestellt würden.

Es giebt nun in der That eine solche Klasse elektrodynamischer Erscheinungen, welche, wie ich hier immer voraussetze, von Wechselwirkungen abhängen, die die Elektricitäten *aus der Ferne* auf einander ausüben, und die unter dem AMPÈRE'schen Gesetze nicht mit enthalten sind und nicht daraus erklärt werden können, nämlich die von FARADAY entdeckten Erscheinungen der *Volta-Induktion*, d. h. die *Entstehung eines Stroms* in einem Leitungsdrahte durch Einwirkung eines vorhandenen Stroms, welchem er genähert wird; oder die *Entstehung eines Stroms* in einem Leitungsdrahte, wenn die Intensität des Stroms in einem anderen benachbarten Leitungsdrahte zu- oder abnimmt.

Das AMPÈRE'sche Gesetz lässt nichts zu wünschen übrig, sobald es sich um die Wechselwirkungen von Leitungsdrähten handelt, deren Ströme eine *unveränderliche Intensität* besitzen, und die selbst *in ihrer Lage* gegen einander *beharren;* sobald aber Aenderungen von Stromintensitäten eintreten, oder die Leitungsdrähte gegen einander bewegt werden, giebt das AMPÈRE'sche Gesetz von den Erscheinungen keine vollständige und genügende Rechenschaft; es lehrt dann nämlich blos die Wirkungen kennen, welche auf das *ponderable* Drahtelement, nicht aber die Wirkungen, welche auf die darin enthaltene *imponderable* Elektricität Statt finden. Es geht also hieraus hervor, dass dieses Gesetz nur als ein Partikulargesetz Gültigkeit besitzt, und nur provisorisch für ein Grundgesetz genommen werden darf, welches durch ein wirklich allgemein gültiges, auf alle elektrodynamischen Erscheinungen anwendbares definitives Grundgesetz noch zu ersetzen ist.

Nun ist man zwar im Stande, auch die Erscheinungen der *Volta-Induktion* zum Theil voraus zu bestimmen; diese Bestimmung beruht aber nicht auf dem AMPÈRE'schen Fundamentalgesetze, sondern auf dem Fundamentalgesetze der *Magneto-Induktion*, welches unmittelbar aus der Erfahrung abgeleitet werden konnte, und welches bis jetzt noch ohne einen inneren Zusammenhang mit dem AMPÈRE'schen Fundamentalgesetze besteht. Und zwar kann jene Vorausbestimmung der Volta-Induktion aus den Gesetzen der Magneto-Induktion nicht durch eine strenge Schlussfolge, sondern nach einer blossen Analogie geschehen.

Da nun eine solche Analogie zwar einen vortrefflichen Leitfaden für wissenschaftliche Untersuchungen geben kann, aber selbst zu einer theoretischen Erklärung der Erscheinungen ungenügend erachtet werden muss, so ergiebt sich hieraus, dass die Erscheinungen der Volta-Induktion überhaupt noch der Erklärung aus einer Theorie entbehren, und insbesondere keine solche Erklärung aus dem Ampère'schen Grundgesetz erhalten haben. Hierzu kommt noch, dass jene Vorausbestimmung der Erscheinungen der Volta-Induktion sich blos auf diejenigen Fälle erstreckt, wo die inducirende Wirksamkeit eines Stroms, nach Analogie mit seiner elektrodynamischen Wirksamkeit, durch die Wirksamkeit eines Magneten ersetzt werden kann. Dies setzt aber *geschlossene Ströme* von unveränderlicher Gestalt voraus. Man kann aber an das Fundamentalgesetz der Volta-Induktion, mit gleichem Rechte, wie Ampère bei dem Fundamentalgesetz der Wechselwirkung konstanter Stromelemente gethan hat, die Forderung stellen, dass es alle Fälle enthalte, indem es eine allgemeine Bestimmung für die Wechselwirkung je zweier kleinster Elemente gebe, aus denen alle messbaren Wirkungen zusammengesetzt seien und berechnet werden können.

Wenn man sich also mit dem Zusammenhange der *elektrostatischen* und *elektrodynamischen* Erscheinungen beschäftigt, so braucht man sich nicht blos von dem allgemeineren wissenschaftlichen Interesse leiten zu lassen, welches es hat, in die zwischen den verschiedenen Theilen der Physik existirenden Beziehungen einzudringen, sondern man kann sich dabei ausserdem einen näher bestimmten Zweck vor Augen stellen, welcher die *Maassbestimmungen der Volta-Induktion aus einem allgemeineren Grundgesetz der reinen Elektricitätslehre* betrifft. Diese Maassbestimmungen der Volta-Induktion gehören nun zu den *elektrodynamischen Maassbestimmungen*, welche den Hauptgegenstand dieser Abhandlung bilden, welche, wenn sie vollständig sein sollen, auch die Erscheinungen der *Volta-Induktion* mit umfassen müssen. Es leuchtet aber von selbst ein, dass die Aufstellung solcher Maassbestimmungen mit der Aufstellung der *Gesetze*, denen die betreffenden Erscheinungen unterworfen sind, auf das innigste zusammenhängt, so, dass das eine von dem anderen nicht geschieden werden kann.

19.

Um einen auf Erfahrung beruhenden, möglichst sicheren Leitfaden für diese Untersuchung zu gewinnen, sollen *drei specielle Thatsachen*, die theils mittelbar auf Beobachtung beruhen, theils unmittelbar in dem durch alle Messungen konstatirten Ampère'schen Fundamentalgesetze enthalten sind, zu Grunde gelegt werden.

Die *erste Thatsache* ist, dass zwei Stromelemente, welche in einer

geraden Linie liegen, mit welcher ihre Richtung zusammenfällt, einander *abstossen* oder *anziehen,* je nachdem sie von der Elektricität in *gleichem* oder *entgegengesetztem* Sinne durchflossen werden.

Die *zweite Thatsache* ist, dass zwei parallele Stromelemente, welche mit ihrer Verbindungslinie rechte Winkel bilden, einander *anziehen* oder *abstossen*, je nachdem sie von der Elektricität in *gleichem* oder *entgegengesetztem* Sinne durchflossen werden.

Die *dritte Thatsache* ist, dass ein Stromelement, welches mit einem Drahtelemente in einer geraden Linie liegt, mit welcher die Richtungen beider Elemente zusammenfallen, einen *gleich* oder *entgegengesetzt gerichteten Strom* in dem Drahtelemente inducirt, je nachdem seine eigene Stromintensität *abnimmt* oder *zunimmt.*

Diese drei Thatsachen sind zwar nicht unmittelbar durch die Erfahrung gegeben, weil sich die Wirkung eines *Elements* auf ein anderes unmittelbar nicht beobachten lässt, sie hängen aber mit unmittelbar beobachteten Thatsachen so genau zusammen, dass sie fast gleiche Geltung als sie haben. Die beiden ersten Thatsachen sind schon unter Ampère's elektrodynamischem Fundamentalgesetze mit begriffen; die dritte ist durch Faraday's Entdeckung hinzugekommen.

Die angeführten drei Thatsachen werden als *elektrische* betrachtet, das heisst, man betrachtet die nachgewiesenen Kräfte als *Wirkungen elektrischer Massen auf einander.* Das *elektrische Gesetz* dieser Wechselwirkung ist aber noch unbekannt; denn wenn auch die beiden ersten Thatsachen unter dem Ampère'schen Gesetze mit begriffen sind, so ist doch, auch abgesehen von der dritten nicht darunter begriffenen Thatsache, das Ampère'sche Gesetz selbst in strengem Sinne *kein elektrisches Gesetz*, weil dadurch *keine elektrische Kraft* bestimmt wird, welche eine elektrische Masse auf die andere ausübe. Durch das Ampère'sche Gesetz wird blos eine auf die *ponderable Masse des Stromträgers* wirkende Kraft bestimmt. Mit den *elektrischen Kräften*, welche die durch die Stromträger strömenden *elektrischen Fluida* selbst auf einander ausüben, hat sich Ampère nicht beschäftigt, wenn er gleich wiederholt die Hoffnung ausgesprochen hat, dass die durch sein Fundamentalgesetz bestimmte Wechselwirkung der *ponderablen Stromträger* aus den Wechselwirkungen der in ihnen enthaltenen *elektrischen Fluida* sich werde erklären lassen.

Richten wir nun unsere Aufmerksamkeit auf die *elektrischen Fluida* in den beiden Stromelementen selbst, so haben wir in denselben gleiche Mengen positiver und negativer Elektricität, welche sich in jedem Elemente in entgegengesetztem Sinne bewegen. Diese gleichzeitige entgegengesetzte Bewegung positiver und negativer Elektricität, wie man sie in allen Theilen eines linearen Leitungsdrahts anzunehmen pflegt, kann in der Wirklichkeit zwar nicht existiren, kann aber für unseren

Zweck als eine *ideale* Bewegung angesehen werden, welche in den von uns betrachteten Fällen, wo es sich blos um Wirkungen *in der Ferne* handelt, die wirklich vorhandenen Bewegungen in Beziehung auf alle in Betracht zu ziehenden Wirkungen *vertritt,* und dabei den Vorzug hat, sich besser der Rechnung unterwerfen zu lassen. Die wirklich vorhandenen *Seitenbewegungen*, durch welche die sich begegnenden Theilchen in dem, *keine mathematische Linie* bildenden, Leitungsdrahte einander *ausweichen,* dürfen als ohne Einfluss auf die Wirkungen *in die Ferne* betrachtet werden, daher es für unseren Zweck zulässig erscheint, an obige einfache Ansicht der Sache uns zu halten (siehe Art. 31).

Alsdann haben wir in den *zwei* Stromelementen, die wir betrachten, *vier Wechselwirkungen* elektrischer Massen zu betrachten, *zwei abstossende*, zwischen den beiden positiven und zwischen den beiden negativen Massen in den Stromelementen, und *zwei anziehende*, zwischen der positiven Masse in dem ersten und der negativen Masse in dem zweiten, und zwischen der negativen Masse in dem ersten und der positiven Masse in dem zweiten.

Jene beiden *abstossenden* Kräfte müssten, wenn die bekannten *elektrostatischen* Gesetze eine *unbedingte Anwendung auf unseren Fall* fänden, diesen beiden *anziehenden* Kräften *gleich* sein, weil die gleichartigen, sich abstossenden Massen den ungleichartigen, sich anziehenden Massen gleich sind und aus gleicher Entfernung auf einander wirken. Ob aber jene bekannten *elektrostatischen* Gesetze auf unseren Fall eine *unbedingte Anwendung* finden, lässt sich *a priori* nicht entscheiden, weil diese Gesetze sich zunächst nur auf solche elektrische Massen beziehen, die sich gegen einander im *Gleichgewicht* und in *Ruhe* befinden, während unsere elektrischen Massen sich gegen einander *bewegen.* Folglich kann nur die *Erfahrung* entscheiden, ob jene elektrostatischen Gesetze eine solche *Anwendung in weiterem Kreise* auch auf unseren Fall gestatten oder nicht.

Die beiden ersten der oben angeführten *Thatsachen* beziehen sich nun zwar zunächst auf Kräfte, welche auf die *ponderablen Stromträger* wirken; es lassen sich diese Kräfte aber als die *Resultanten* derjenigen Kräfte betrachten, welche auf die in den ponderablen Trägern enthaltenen *elektrischen Massen* wirken. Streng genommen ist diese Betrachtung zwar nur dann zulässig, wenn diese elektrischen Massen an ihrem gemeinschaftlichen ponderablen Träger so gebunden sind, dass sie nicht ohne ihn bewegt werden können, und weil dies in der galvanischen Kette nicht der Fall ist, sondern die elektrischen Massen sich hier auch dann bewegen, wenn ihr Träger ruht, so hat Ampère, wie in der Einleitung S. 29 angeführt worden ist, auf diesen Umstand besonders aufmerksam gemacht, in Betracht, dass dadurch die auf den ponderablen Träger wirkende Kraft wesentlich modificirt werden könne.

Wenn aber auch die elektrischen Massen in der Richtung des Leitungsdrahts verschiebbar sind, so sind sie doch keineswegs in dieser Richtung *frei beweglich*, sonst würden sie in der ihnen nach dieser Richtung einmal mitgetheilten Bewegung ohne neuen Antrieb (d. i. ohne fortwirkende *elektromotorische Kraft*) *beharren* müssen, was nicht der Fall ist; denn kein galvanischer Strom dauert auch bei fortdauerndem Schluss der Kette *von selbst* fort, vielmehr entspricht seine Intensität in jedem Augenblicke nur der eben vorhandenen *elektromotorischen Kraft*, wie das Ohm'sche Gesetz es bestimmt, hört also von selbst auf, sobald diese Kraft verschwindet. Hieraus folgt, dass nicht blos diejenigen Kräfte, welche auf die elektrischen Massen in solchen Richtungen (senkrecht auf den Leitungsdraht) wirken, in denen sie nur mit dem ponderablen Träger zugleich bewegt werden können, auf den letzteren übertragen werden müssen, sondern, dass das nämliche auch von solchen Kräften gelte, welche in der Richtung des Leitungsdrahts wirken und die elektrischen Massen im Träger bewegen, nur mit dem Unterschiede, dass die letztere Uebertragung eine, wenn auch sehr kurze, Zeit erfordert, was bei der ersteren nicht der Fall ist. Die *unmittelbare* Wirkung der dem Leitungsdrahte parallelen Kräfte besteht zwar blos in einer Bewegung der elektrischen Massen nach dieser Richtung; die Wirkung dieser Bewegung ist aber ein *Widerstand* des ponderablen Trägers, durch welchen sie in unmessbar kurzer Zeit wieder aufgehoben wird. Durch diesen *Widerstand* werden *mittelbar*, während der Zeit, wo diese Bewegung aufgehoben wird, alle Kräfte, welche zuvor diese Bewegung hervorgebracht hatten, an den, Widerstand leistenden, ponderablen Körper übertragen. Endlich, da es sich hier um Wirkungen der Kräfte handelt, welche dem *ponderablen* Träger selbst eine *messbare* Geschwindigkeit zu ertheilen vermögen, so können dagegen diejenigen Wirkungen der Kräfte, welche nur momentan die *imponderablen* Massen ein wenig verrücken, mit gleichem Rechte vernachlässigt werden, mit welchem man die *Masse der Elektricität* gegen die *Masse ihres ponderablen Trägers* vernachlässigt. Hieraus ergiebt sich aber, dass die Kraft, welche auf den *Stromträger* wirkt, wie oben angegeben worden ist, als die *Resultante* aller Kräfte betrachtet werden darf, welche auf die im Stromträger enthaltenen *elektrischen Massen* wirken.

Dies vorausgesetzt, so lehren die *beiden ersten oben angeführten Thatsachen*, dass die *Resultante* jener vier Wechselwirkungen der in den beiden betrachteten Stromelementen enthaltenen elektrischen Massen, welche nach dem *elektrostatischen* Gesetze Null sein sollte, von Null desto mehr *verschieden* ist, je grösser die *Geschwindigkeit* ist, mit welcher die elektrischen Massen durch beide Stromelemente fliessen, d. i. je grösser die Stromintensitäten sind.

Es folgt also hieraus, dass die *elektrostatischen* Gesetze auf elektrische Massen, welche gegen einander *bewegt* werden, *keine unbedingte Anwendung* finden, sondern dass sie für die Kräfte, welche diese Massen wechselseitig auf einander ausüben, blos einen *Grenzwerth* geben, dem sich der *wahre Werth* dieser Kräfte desto mehr nähert, je geringer die gegenseitigen Bewegungen der Massen sind, von dem sich dagegen der *wahre Werth* desto mehr entfernt, je grösser die gegenseitigen Bewegungen sind. Zu dem Werthe, welchen die *elektrostatischen* Gesetze für die Kraft geben, welche *zwei elektrische Massen* auf einander ausüben, muss also noch eine *von ihrer gegenseitigen Bewegung abhängige Ergänzung* hinzukommen, wenn diese Kraft nicht blos für den Fall der gegenseitigen Ruhe und des Gleichgewichts, sondern allgemein auch für jede beliebige *Bewegung* beider Massen gegen einander richtig bestimmt werden soll. Diese *Ergänzung*, welche dem elektrostatischen Gesetze eine allgemeinere Anwendbarkeit, als es gegenwärtig besitzt, ertheilen soll, wird nun gesucht.

Die oben angeführte *erste Thatsache* lehrt ferner nun nicht blos, dass die Summe der abstossenden Kräfte der gleichartigen elektrischen Massen in den betrachteten Stromelementen von der Summe der anziehenden Kräfte der ungleichartigen Massen *verschieden* sei, sondern lehrt zugleich auch, wann die erstere Summe *grösser* und wann sie *kleiner* als die letztere sei, und es lassen sich alle daraus sich ergebenden Bestimmungen in dem einfachen Ausspruche vereinigen,

> *dass die elektrischen Massen, welche in entgegengesetztem Sinne bewegt werden, schwächer auf einander wirken, als diejenigen, welche in gleichem Sinne bewegt werden.*

Denn 1. wenn die Stromrichtung in den beiden Elementen *dieselbe* ist, so findet *Abstossung* Statt, folglich müssen die *Anziehungskräfte der ungleichartigen Massen schwächer sein*, als die Abstossungskräfte der gleichartigen Massen. Es sind aber in diesem Falle die ungleichartigen Massen, welche *in entgegengesetztem Sinne* bewegt werden. Ist aber 2. die Stromrichtung in den beiden Elementen *entgegengesetzt*, so findet *Anziehung* Statt; folglich müssen die *Abstossungskräfte der gleichartigen Massen schwächer sein*, als die Anziehungskräfte der ungleichartigen Massen. Es sind aber in diesem Falle die gleichartigen Massen, welche *in entgegengesetztem Sinne* bewegt werden. In beiden Fällen sind es also die *in entgegengesetztem Sinne* bewegten Massen, welche *schwächer* auf einander wirken, wodurch der obige Ausspruch bestätigt wird.

Die *erste Thatsache*, auf welche obiger Ausspruch zu beziehen war, gestattet ferner noch folgende genauere Bestimmung beizufügen,

> *dass zwei elektrische Massen desto schwächer (abstossend oder anziehend, je nachdem sie gleichartig oder ungleichartig sind) auf*

einander wirken, je grösser das Quadrat ihrer relativen Geschwindigkeit sei.

Die *relative Geschwindigkeit* zweier elektrischen Massen kann, wenn r den Abstand beider Massen bezeichnet, durch dr/dt ausgedrückt werden, und ist positiv oder negativ, je nachdem dadurch eine gegenseitige Entfernung oder Annäherung beider Massen bewirkt wird; da aber dieser Unterschied der Annäherung und Entfernung, oder kurz, der Unterschied des Vorzeichens von dr/dt, keinen Einfluss auf die Grösse der Kraft hat, so war es nöthig, in der eben ausgesprochenen Regel statt der relativen Geschwindigkeit selbst, ihr *Quadrat* einzuführen.

Bezeichnen e und e' die positiven elektrischen Massen in beiden Elementen, und u und u' die zugehörigen *absoluten* Geschwindigkeiten, die je nach der Richtung des Stroms einen positiven oder negativen Werth haben, so werden $-e$ und $-e'$ die negativen Massen, und $-u$ und $-u'$ die ihnen zugehörigen *absoluten* Geschwindigkeiten sein. In den unter der *ersten Thatsache* enthaltenen Fällen, wo alle elektrischen Massen *in einer und derselben geraden Linie* sich bewegen, ergeben sich aber die *relativen* Geschwindigkeiten aus den *absoluten* durch blosse Subtraktion, nämlich für die *gleichartigen* Massen:

$+e$ und $+e'$ die relative Geschwindigkeit $\frac{dr}{dt} = u - u'$,

$-e$ und $-e'$ die relative Geschwindigkeit $\frac{dr}{dt} = -u + u'$;

für die ungleichartigen Massen:

$+e$ und $-e'$ die relative Geschwindigkeit $\frac{dr}{dt} = u + u'$,

$-e$ und $+e'$ die relative Geschwindigkeit $\frac{dr}{dt} = -u - u'$.

Hieraus ergiebt sich nach obigem Satze für die Wechselwirkung *gleichartiger* (sowohl der beiden positiven, als der beiden negativen) Massen eine von

$$\frac{dr^2}{dt^2} = (u - u')^2$$

abhängige Schwächung, im Vergleich mit der in der Elektrostatik für den Fall der Ruhe und des Gleichgewichts betrachteten Kraft; für die Wechselwirkung *ungleichartiger* Massen dagegen eine von

$$\frac{dr^2}{dt^2} = (u + u')^2$$

abhängige Schwächung. Die einfachste Form, welche das Gesetz dieser Schwächung haben kann, ist die, wonach der Werth der Kraft für den Fall der Ruhe und des Gleichgewichts mit dem Faktor

$$\left(1 - a^2 \frac{dr^2}{dt^2}\right)$$

multiplicirt wird, wonach also folgender Ausdruck zur *vollständigeren Bestimmung der Kraft* dienen würde:

$$\frac{ee'}{r^2}\left(1 - a^2 \frac{\mathrm{d}r^2}{\mathrm{d}t^2}\right),$$

worin e und e' positive oder negative Werthe haben, je nachdem die elektrischen Massen, welche sie bezeichnen, dem positiven oder dem negativen Fluidum angehören. a^2 ist eine Konstante.

Für unseren Fall ergäben sich, wenn man von dieser einfachsten Form Anwendung zu machen versuchte, folgende vier Wechselwirkungen zwischen den elektrischen Massen in den beiden Stromelementen:

1. zwischen $+ e$ und $+ e'$ die Kraft $+ \frac{ee'}{r^2}(1 - a^2 (u - u')^2)$,

2. zwischen $- e$ und $- e'$ die Kraft $+ \frac{ee'}{r^2}(1 - a^2 (u - u')^2)$,

3. zwischen $+ e$ und $- e'$ die Kraft $- \frac{ee'}{r^2}(1 - a^2 (u + u')^2)$,

4. zwischen $- e$ und $+ e'$ die Kraft $- \frac{ee'}{r^2}(1 - a^2 (u + u')^2)$.

Die Summe der beiden ersten Kräfte, d. i. die Summe der *Abstossungen gleichartiger Massen*, ist also

$$= + 2 \frac{ee'}{r^2}(1 - a^2 (u - u')^2);$$

die Summe der beiden letzteren Kräfte, d. i. die Summe der *Anziehungen ungleichartiger Massen*, ist

$$= - 2 \frac{ee'}{r^2}(1 - a^2 (u + u')^2).$$

Diese beiden Summen sind also, abgesehen von ihren (Abstossung und Anziehung unterscheidenden) Vorzeichen, ihrer Grösse nach verschieden. Ihre algebraische Summe, welche *die Resultante* aller vier Wechselwirkungen, folglich die Kraft giebt, welche von den elektrischen Massen auf den *Stromträger* selbst übertragen wird, und auf welche sich das Ampère'sche Fundamentalgesetz bezieht, ist hiernach

$$= + 8 \frac{ee'}{r^2} a^2 . uu',$$

d. h. diese Kraft ergiebt sich hiernach, ganz in Uebereinstimmung mit dem Ampère'schen Fundamentalgesetze, direkt proportional den Stromintensitäten in beiden Stromelementen und umgekehrt proportional dem Quadrate des Abstandes beider Stromelemente.

Ferner ersieht man, dass obiger Ausdruck *positiv* ist, folglich eine *Abstossung der Stromelemente* bezeichnet, wenn u und u' *beide zugleich*

entweder positive oder negative Werthe haben, d. h. wenn die beiden Stromelemente von der Elektricität in gleichem Sinne durchflossen werden; dass aber, wenn von beiden nur *der eine positiv, der andere negativ* ist, obiger Ausdruck *negativ* werde, was eine *Anziehung der Stromelemente* bezeichnet, wenn dieselben von der Elektricität in *entgegengesetztem* Sinne durchflossen werden. Alle diese Folgerungen entsprechen genau der oben angeführten *ersten Thatsache.*

Gehen wir nun zu der *zweiten oben angeführten Thatsache* über, so leuchtet ein, dass die eben gegebene Ergänzung des elektrostatischen Gesetzes hier nicht mehr ausreicht, denn es ergiebt sich für alle unter dieser zweiten Thatsache enthaltenen Fälle der Werth der relativen Geschwindigkeiten der elektrischen Massen

$$\frac{dr}{dt} = 0.$$

Verfolgt man nämlich zwei elektrische Theilchen in ihren Bahnen, so ergiebt sich, dass ihre relative Entfernung bis zu dem betrachteten Augenblicke abnimmt, und von dann an wieder zunimmt, in dem betrachteten Augenblicke selbst also weder Zunahme noch Abnahme der Entfernung Statt findet; folglich würde darnach für alle diese Fälle zur Bestimmung der vier Wechselwirkungen der elektrischen Massen in beiden Stromelementen das elektrostatische Gesetz selbst, ohne eine Ergänzung, in Anwendung zu bringen sein, wonach also die beiden Stromelemente gar keine Wirkung auf einander haben sollten, was nicht der Fall ist.

Es lässt sich aber leicht nachweisen, dass für diese *zweite* Klasse von Fällen, wo der Werth der relativen Geschwindigkeit dr/dt verschwindet, der Werth der *relativen Beschleunigung* d^2r/dt^2 desto bedeutender hervortritt, während für die *erste* Klasse, wo der letztere Werth d^2r/dt^2 verschwand, der erstere dr/dt desto bedeutender hervortrat.

Nimmt man also an, dass die Grösse der Wechselwirkung bewegter elektrischer Massen, wie sie durch das elektrostatische Gesetz bestimmt wird, einer Ergänzung bedarf, die aber nicht blos von dem *Quadrate der relativen Geschwindigkeit* beider Massen $= dr^2/dt^2$, sondern auch von ihrer *relativen Beschleunigung* $= d^2r/dt^2$ abhängt, so ist die einfachste Form, welche das allgemeine Gesetz der Wechselwirkung zweier elektrischer Massen haben kann, diejenige, wonach der Werth der Kraft für den Fall der Ruhe und des Gleichgewichts, mit dem Faktor

$$\left(1 - a^2 \frac{dr^2}{dt^2} + b \frac{d^2r}{dt^2}\right)$$

multiplicirt wird, wonach also folgender Ausdruck zur vollständigen Bestimmung der Kraft dienen würde:

$$\frac{ee'}{r^2}\left(1 - a^2\frac{\mathrm{d}r^2}{\mathrm{d}t^2} + b\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2}\right),$$

worin e und e' positive und negative Werthe haben, je nachdem die elektrischen Massen, welche sie bezeichnen, dem positiven oder negativen elektrischen Fluidum angehören. a^2 ist dieselbe Konstante wie früher, b ist eine andere von der Geschwindigkeit und Beschleunigung unabhängige Grösse, deren Werth und Vorzeichen näher zu bestimmen bleibt.

Bezeichnen nun, wie früher, e und e' die positiv elektrischen Massen in beiden Stromelementen, u und u' die zugehörigen *absoluten* Geschwindigkeiten, folglich $-e$ und $-e'$ die negativen Massen, und $-u$ und $-u'$ deren *absolute* Geschwindigkeiten, und bezeichnet R den Abstand der Stromelemente, r den Abstand der beiden *positiven* elektrischen Massen, so ist zwar für den ersten Augenblick $r = R$, aber weil die elektrischen Massen sich bewegen, ändert sich bald r, während R unverändert bleibt, und es ergiebt sich nach Verlauf des Zeitraums t, von jenem Augenblicke an gerechnet, zur Bestimmung des Werths von r folgende Gleichung:

$$r^2 = R^2 + (u - u')^2 t^2,$$

folglich, weil R, u und u' konstant sind,

$$r\,\mathrm{d}r = (u - u')^2 t\,\mathrm{d}t$$

und

$$r\,\mathrm{d}^2 r + \mathrm{d}r^2 = (u - u')^2\,\mathrm{d}t^2,$$

woraus sich die Werthe der *relativen Geschwindigkeit* und *Beschleunigung* am Ende des Zeitraums t ergeben, nämlich:

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \frac{(u - u')^2}{r}\,t$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2} = \frac{(u - u')^2}{r}\left(1 - \frac{(u - u')^2}{r^2}\,t^2\right).$$

Wendet man diese allgemeinen Bestimmungen auf den betrachteten Augenblick an, für welchen $t = 0$ ist, so erhält man die in unserem Ausdruck einzuführenden Werthe der *relativen Geschwindigkeit und Beschleunigung der beiden positiven Massen:*

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2} = \frac{(u - u')^2}{r},$$

folglich erhält man für die erste der vier Wechselwirkungen, nämlich:

1. zwischen $+e$ und $+e'$ die Kraft $+\frac{ee'}{r^2}\left(1 + \frac{b}{r}(u - u')^2\right)$.

Es leuchtet von selbst ein, dass die übrigen Wechselwirkungen aus dieser ersten abgeleitet werden können, durch Substitution der entsprechenden Massen und Geschwindigkeiten; man erhält dann

2. zwischen $-e$ und $-e'$ die Kraft $+\frac{ee'}{r^2}\left(1+\frac{b}{r}(u-u')^2\right)$,

3. zwischen $+e$ und $-e'$ die Kraft $-\frac{ee'}{r^2}\left(1+\frac{b}{r}(u+u')^2\right)$,

4. zwischen $-e$ und $+e'$ die Kraft $-\frac{ee'}{r^2}\left(1+\frac{b}{r}(u+u')^2\right)$.

Die Summe der beiden ersteren Kräfte, d. i. die Summe der *Abstossungen gleichartiger Massen* ist also

$$=+2\frac{ee'}{r^2}\left(1+\frac{b}{r}(u-u')^2\right).$$

Die Summe der beiden letzteren Kräfte, d. i. die Summe der *Anziehungen ungleichartiger Massen* aber ist

$$=-2\frac{ee'}{r^2}\left(1+\frac{b}{r}(u+u')^2\right).$$

Diese beiden Summen sind also, abgesehen von ihren (Abstossung und Anziehung unterscheidenden) Vorzeichen, ihrer Grösse nach *verschieden*. Ihre algebraische Summe, welche *die Resultante* aller vier Kräfte, folglich die Kraft giebt, welche von den elektrischen Massen auf den *Stromträger* selbst übertragen wird, und auf welche sich das Ampère'sche Fundamentalgesetz bezieht, ist hiernach

$$=-8\frac{ee'}{r^2}\cdot\frac{b}{r}\cdot uu',$$

d. h. diese Kraft ergiebt sich hiernach, ganz in Uebereinstimmung mit dem Ampère'schen Fundamentalgesetze, direkt proportional den Stromintensitäten in beiden Stromelementen, und umgekehrt proportional dem Quadrate des Abstands beider Stromelemente.

Ferner ersieht man, falls b positiv ist, dass obiger Ausdruck *negativ* sei, folglich eine *Anziehung der Stromelemente* bezeichne, wenn u und u' beide zugleich entweder positive oder negative Werthe haben, d. h. wenn die beiden Stromelemente von der Elektricität in *gleichem* Sinne durchflossen werden; ist aber von beiden nur der eine positiv, der andere negativ, so wird obiger Ausdruck *positiv*, was eine *Abstossung* der Stromelemente bezeichnet, wenn dieselben von der Elektricität in *entgegengesetztem* Sinne durchflossen werden. Alle diese Folgerungen entsprechen genau der oben angeführten *zweiten Thatsache*.

Gehen wir endlich noch auf die AMPÈRE'sche Formel selbst zurück, welche beide Thatsachen als specielle Fälle umfasst, wonach die Abstossung zweier Stromelemente folgende ist:

$$\frac{ii'}{r^2}(\cos\varepsilon - \tfrac{3}{2}\cos\vartheta\cos\vartheta')\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}s',$$

worin die Buchstaben die S. 70 angegebene Bedeutung haben, so ergiebt sich, dass für die unter der *ersten Thatsache* enthaltenen Fälle

$$\varepsilon = 0 \text{ oder } = 180^0$$

sei, je nachdem ϑ und ϑ' *beide zugleich*

$$= 0^0 \text{ oder } = 180^0$$

sind, oder nur der *eine* von beiden

$$= 0^0, \text{ der } \textit{andere} = 180^0 \text{ ist.}$$

Folglich ist der gesuchte Werth der Kraft für die unter der *ersten Thatsache* enthaltenen Fälle nach dem AMPÈRE'schen Gesetze

$$= \mp \frac{1}{2} \cdot \frac{ii'}{r^2}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}s'.$$

Für die unter der *zweiten Thatsache* enthaltenen Fälle ist

$$\varepsilon = 0^0 \text{ oder } 180^0,$$

je nachdem ϑ und ϑ' *beide zugleich*

$$= 90^0 \text{ oder } = 270^0$$

sind, oder nur der *eine* von beiden

$$= 90^0, \text{ der } \textit{andere} = 270^0 \text{ ist.}$$

Folglich ist der gesuchte Werth der Kraft für die unter der *zweiten Thatsache* enthaltenen Fälle nach dem AMPÈRE'schen Gesetze

$$= \pm \frac{ii'}{r^2}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}s'.$$

Nach dem AMPÈRE'schen Fundamentalgesetz erhält man also (abgesehen vom Vorzeichen) für die letzteren Fälle den doppelten Werth, wie für die ersteren.

Dies ergiebt sich auch aus unseren Bestimmungen, wenn man

$$a^2 = \frac{1}{2}\frac{b}{r}$$

setzt, wodurch also der Werth und das Vorzeichen von b näher bestimmt sind, nämlich:

$$b = 2ra^2.$$

Substituirt man diesen Werth von b in unserem allgemeinen Ausdruck für die Wechselwirkung zweier elektrischer Massen, so ergiebt sich ihre *Abstossungskraft*

$$= \frac{ee'}{r^2}\left(1 - a^2\frac{\mathrm{d}r^2}{\mathrm{d}t^2} + 2a^2 \,.\, r\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2}\right).$$

Die *dritte oben angeführte Thatsache* bezieht sich endlich nicht, wie die beiden vorhergehenden, auf Kräfte, welche blos auf den *Stromträger* wirken, sondern vielmehr auf Kräfte, welche auf die *elektrischen Massen* selbst wirken und sie in ihrem Träger bewegen, indem sie ungleichartige Massen zu scheiden streben, d. i. auf *elektromotorische* Kräfte, welche von bewegten elektrischen Massen in einem galvanischen Leiter auf ruhende Elektricitäten in einem anderen Leiter ausgeübt werden. Diese Kräfte werden aber nicht allein durch das *elektrostatische* Grundgesetz, sondern auch durch das Ampère'sche *elektrodynamische* Grundgesetz *nicht bestimmt*, weil *letzteres* blos auf die an die Stromträger übertragenen Kräfte Beziehung hat, *ersteres*, wenn es Anwendung fände, den Werth der elektromotorischen Kraft = 0 ergäbe. Es bilden also diese Kräfte eine wesentlich *neue Klasse*, die man erst durch Faraday's *Entdeckung* hat kennen lernen.

Betrachten wir auch hier wieder blos die *elektrischen Massen* sowohl in dem Stromelemente, als auch in dem stromlosen Elemente, so haben wir in jedem derselben wiederum gleiche Massen positiver und negativer Elektricität, und zwar bewegen sich jederzeit in dem Stromelemente diese beiden Massen mit gleich grosser Geschwindigkeit in entgegengesetztem Sinne, und diese Geschwindigkeiten nehmen auch gleichzeitig um gleich viel zu oder ab; in dem stromlosen Elemente sind dagegen beide Massen noch in Ruhe und Gleichgewicht. Zwischen diesen vier Massen sind nun ferner auch wieder vier Wechselwirkungen zu unterscheiden, nämlich zwei abstossende und zwei anziehende, jene zwischen den *gleichartigen* Massen, diese zwischen den *ungleichartigen.*

Aus dem *Faktum* nun, dass ein Strom in dem Elemente *entsteht,* in welchem bisher kein Strom vorhanden war, müssen wir schliessen, dass auf die *positive* elektrische Masse in diesem Elemente nach der Richtung des letzteren *eine andere Kraft* wirken müsse, als auf die *negative* Masse, weil jene Massen nur durch eine solche *Differenz* der auf sie wirkenden Kräfte diejenige *entgegengesetzte* Bewegung erhalten können, in welcher der zur Erscheinung kommende Strom wesentlich besteht. Wir sprechen hiernach das Faktum zunächst so aus,

> *dass die Summe der beiden Kräfte, welche von der positiven und negativen elektrischen Masse in dem Stromelemente auf die ruhende positive Masse in dem stromlosen Elemente nach der Richtung des letzteren ausgeübt werden, verschieden sei von der Summe derjenigen beiden Kräfte, welche dieselben Massen in dem erwähnten Stromelemente auf die ruhende negative Masse in dem stromlosen Elemente nach der Richtung des letzteren ausüben; dass aber die Differenz beider Summen, d. i. die elektromotorische Kraft selbst, abhängig sei von der Geschwindigkeitsänderung der beiden elektrischen Massen*

in dem gegebenen Stromelemente und mit dieser Aenderung zugleich wachse oder abnehme und verschwinde.

Auch diese *dritte Thatsache* führt also darauf, den durch das *elektrostatische* Gesetz bestimmten elektrischen Kräften noch *eine von ihrer Bewegung abhängige Ergänzung* beizufügen, und es fragt sich nur, ob hieraus gerade diejenige Ergänzung gerechtfertigt werde, welche auf die beiden ersten Thatsachen gegründet worden ist. Diese *dritte Thatsache* giebt also einen *Prüfstein* für die schon gefundenen Resultate und ist zu deren Verwerfung oder festeren Begründung besonders geeignet.

Bezeichnen nun, wie früher, e und e' die positiven elektrischen Massen in beiden Drahtelementen, u und 0 die zugehörigen *absoluten* Geschwindigkeiten, folglich $-e$ und $-e'$ die negativen Massen, und $-u$ und 0 deren *absolute* Geschwindigkeiten, und bezeichnet R den Abstand der Drahtelemente, r den Abstand der beiden positiven elektrischen Massen: so ist zwar für den ersten Augenblick $r = R$, aber weil die Masse e sich mit veränderlicher Geschwindigkeit u von der ruhenden Masse e' entfernt, oder ihr nähert, so ändert sich bald r, während R unverändert bleibt, und es ergiebt sich nach Verlauf des Zeitraums t, von jenem Augenblicke an gerechnet, zur Bestimmung des Werths von r,

$$r = R \pm \int_0^t u \mathrm{d}t,$$

wo das *obere* Vorzeichen gilt, wenn die Masse e auf der positiven Seite von der Masse e' liegt, und folglich durch eine positive Geschwindigkeit noch weiter von ihr entfernt wird; dagegen wenn die Masse e auf der negativen Seite von der Masse e' liegt, und folglich durch eine positive Geschwindigkeit ihr genähert wird, das untere Vorzeichen gilt.

Durch Differentiation erhält man hieraus:

$$\mathrm{d}r = \pm u \mathrm{d}t$$

$$\mathrm{d}^2 r = \pm \mathrm{d}u \mathrm{d}t.$$

Hiernach sind also die Werthe der *relativen Geschwindigkeit* und *Beschleunigung* beider Massen am Ende des Zeitraums t:

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \pm u$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2} = \pm \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t};$$

worin u und $\mathrm{d}u$ Funktionen von t sind. Wendet man nun diese allgemeinen Bestimmungen auf den betrachteten Augenblick an, und bezeichnet man die Werthe, welche u und $\mathrm{d}u$ annehmen, wenn $t = 0$

gesetzt wird, mit u_0 und $\mathrm{d}u_0$, so ergiebt sich nach dem allgemeinen Gesetze der Wechselwirkung zweier elektrischer Massen, zu welchem die *beiden ersten Thatsachen* geführt haben, als erste der vier Wechselwirkungen:

1. zwischen $+e$ und $+e'$ die Kraft $+\frac{ee'}{r^2}\left(1-a^2u_0^2\pm 2a^2r\frac{\mathrm{d}u_0}{\mathrm{d}t}\right)$.

Es leuchtet auch ein, dass die übrigen Wechselwirkungen aus dieser ersten abgeleitet werden können durch Substitution der entsprechenden Massen, Geschwindigkeiten und Beschleunigungen; man erhält dann:

2. zwischen $-e$ und $+e'$ die Kraft $-\frac{ee'}{r^2}\left(1-a^2u_0^2\mp 2a^2r\frac{\mathrm{d}u_0}{\mathrm{d}t}\right)$,

3. zwischen $+e$ und $-e'$ die Kraft $-\frac{ee'}{r^2}\left(1-a^2u_0^2\pm 2a^2r\frac{\mathrm{d}u_0}{\mathrm{d}t}\right)$,

4. zwischen $-e$ und $-e'$ die Kraft $+\frac{ee'}{r^2}\left(1-a^2u_0^2\mp 2a^2r\frac{\mathrm{d}u_0}{\mathrm{d}t}\right)$.

Die Summe der beiden ersteren Kräfte, d. i. die Summe der auf die *positive Masse* $+e'$ in *dem stromlosen Elemente* wirkenden Kräfte, ist also

$$=\pm 4\frac{ee'}{r}a^2\frac{\mathrm{d}u_0}{\mathrm{d}t}.$$

Die Summe der beiden letzteren Kräfte, d. i. die Summe der auf die *negative Masse* $-e'$ *in dem stromlosen Elemente* wirkenden Kräfte aber

$$=\mp 4\frac{ee'}{r}a^2\frac{\mathrm{d}u_0}{\mathrm{d}t}.$$

Diese beiden Summen sind dadurch verschieden, dass sie *entgegengesetzte* (Abstossung und Anziehung unterscheidende) *Vorzeichen* haben. Ihre *Differenz* giebt die *elektromotorische Kraft*, welche die positive und negative Masse in dem stromlosen Elemente zu scheiden sucht,

$$=\pm 8\frac{ee'}{r}a^2\frac{\mathrm{d}u_0}{\mathrm{d}t},$$

d. h. die *elektromotorische Kraft* ist direkt proportional der im betrachteten Augenblicke selbst eintretenden Aenderung der Stromgeschwindigkeit und umgekehrt proportional dem Abstande des Stromelements von dem stromlosen Elemente.

Ferner was die doppelten Vorzeichen unseres Ausdrucks für die *elektromotorische Kraft* betrifft, so können diese dadurch beseitigt werden, dass man sie auf den Abstand r bezieht und also diesem selbst positive und negative Werthe beilegt, indem man r von der Stelle der ruhenden Masse e' als Anfangspunkt aus rechnet, und zwar als positive Grösse, wenn die Masse e von diesem Anfangspunkte aus gerechnet auf der positiven Seite (nach welcher die positiven Geschwindigkeiten gerichtet

sind) liegt, als negative Grösse, wenn die Masse e von diesem Anfangspunkte aus auf der negativen Seite liegt. Bezeichnet z. B. Fig. 15 A die Stelle der ruhenden Masse e', ist BAC die gegebene Richtungslinie und

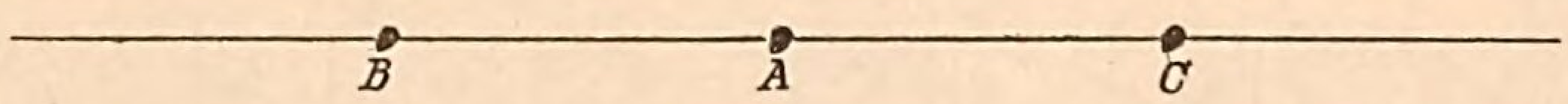


Fig. 15.

wird die Seite, auf welcher C liegt, als die positive Seite zum Grunde gelegt, so ist r positiv, wenn die Masse e im Punkte C, negativ, wenn die Masse e im Punkte B sich befindet.

Wenn also in B und C zwei gleiche Stromelemente sich befinden, welche von der Elektricität *in gleichem Sinne* durchflossen werden, und deren Stromintensität gleichzeitig um gleich viel wächst oder abnimmt, so werden diese beiden Stromelemente von entgegengesetzten Seiten auf die ruhenden elektrischen Massen in A entgegengesetzte elektrische Kräfte in der Art ausüben, dass diejenige Masse, welche von C aus abgestossen wird, von B aus angezogen wird und umgekehrt; die Kraft, welche die ruhende positive und negative elektrische Masse in A zu scheiden sucht, wird also durch Zusammenwirken der beiden Stromelemente in B und C *verdoppelt.*

Endlich, wenn r positiv ist, wenn z. B. das Stromelement in C sich befindet, und wenn ferner u und du beide zugleich entweder positive oder negative Werthe haben, d. h. wenn die absolute Stromgeschwindigkeit in C, abgesehen von der Richtung, welche sie hat, zunimmt, so hat obiger Ausdruck einen positiven oder negativen Werth, je nachdem u einen positiven oder negativen Werth hat, d. h. also, bei *wachsender* Stromintensität wirkt von C aus eine *elektromotorische Kraft* auf die positive elektrische Masse in A abstossend oder anziehend, je nachdem der Strom in C selbst nach vorwärts oder rückwärts gerichtet ist, und erregt also in A einen Strom *in entgegengesetztem Sinne* als den in C vorhandenen. Das entgegengesetzte findet Statt, wenn von u und du nur der eine Werth positiv, der andere negativ ist, d. h. wenn die Stromintensität in C, abgesehen von der Richtung des Stroms, *abnimmt,* wo dann in A ein Strom *in gleichem Sinne* als der in C vorhandene, erregt wird, ganz entsprechend den in der oben angeführten *dritten Thatsache* enthaltenen Bestimmungen.

Es geht hieraus also hervor, dass diese *dritte Thatsache* das aus den beiden ersten abgeleitete Resultat bestätige, indem *dieselbe Ergänzung* des elektrostatischen Gesetzes zu einem allgemeinen Gesetze, welche zur Erklärung der beiden ersten Thatsachen diente, auch zur Erklärung der dritten genügt.

20.

Dem Leitfaden der Erfahrung folgend haben wir in dem vorigen Artikel den elektrostatischen Ausdruck für die abstossende oder anziehende Kraft, mit welcher zwei gleichartige oder ungleichartige elektrische Massen aus der Ferne auf einander wirken, so zu ergänzen gesucht, dass derselbe nicht blos dann, wenn beide Massen gegen einander ruhen, sondern auch wenn sie gegen einander bewegt sind, Anwendung finde. Wir haben diese Ergänzung an einzelnen Thatsachen geprüft und bestätigt gefunden und werden in den folgenden Artikeln diese Prüfung in grösserer Allgemeinheit ausführen.

Die Richtigkeit des Resultats, zu dem wir gelangt sind, vorausgesetzt, ergäbe sich hier ein Fall, wo die Kraft, mit welcher zwei Massen auf einander wirken, nicht blos von *der Grösse der Massen und ihrer Entfernung* von einander abhinge, sondern auch von ihrer *relativen Geschwindigkeit und Beschleunigung.* Die Berechnung dieser Kräfte wird dadurch in vielen Fällen auf grössere mathematische Schwierigkeiten stossen, als die Berechnung solcher Kräfte, welche blos von der Grösse der Massen und deren Entfernungen abhängen. Auch dürfte wohl erwartet werden, wenn diese Abhängigkeit der elektrischen Kräfte, nicht blos von der Grösse der elektrischen Massen und ihren Entfernungen, sondern auch von ihren relativen Geschwindigkeiten und Beschleunigungen, fest begründet wäre, dass die nämliche Abhängigkeit, wenn auch in geringerem Maasse, sich bei anderen Kräften nach genauerer Untersuchung finden würde.

Es würde dadurch in die Abhängigkeit der Kräfte von gegebenen physischen Verhältnissen ein ganz neues Element eingeführt, und das Bereich der Kräfte, zu deren Bestimmung dies neue Element in Rechnung gezogen werden müsste, würde eine eigenthümliche Klasse bilden, die eine besondere Untersuchung erforderte.

Wenn es aber auch zum Zweck der Vereinfachung und Erleichterung unserer Untersuchungen sehr wünschenswerth erscheinen dürfte, dass das Bereich derjenigen Kräfte, welche blos von der Grösse der Massen und deren Entfernungen abhängen, möglichst weit ausgedehnt wäre, so kann doch *nur die Erfahrung* entscheiden, ob andere Kräfte, welche ausserdem auch von den gegenseitigen Geschwindigkeiten und Beschleunigungen der Massen abhängig seien, als vorhanden angenommen werden müssen, oder nicht. *A priori* lässt sich diese Frage nicht entscheiden, weil formell in der Annahme solcher Kräfte weder ein Widerspruch, noch irgend etwas Unklares oder Unbestimmtes enthalten ist.

Man nennt die Gesetze der Abhängigkeit der Kräfte von gegebenen physischen Verhältnissen *physische Fundamentalgesetze*, und dieselben

sollen, dem Zwecke der Physik gemäss, nicht dazu dienen, eine *Erklärung* von den Kräften aus ihren wahren Gründen zu geben, sondern nur eine deutlich dargelegte und brauchbare allgemeine Methode zur *quantitativen* Bestimmung der Kräfte nach den in der Physik für Raum und Zeit festgesetzten Grundmaassen. Daher kann man vom physikalischen Standpunkte aus daran keinen Anstoss nehmen, dass eine Kraft zur Funktion *eines von der Zeit abhängigen Verhältnisses* gemacht wird, eben so wenig, wie dass sie zur Funktion einer *Entfernung* gemacht wird, weil ein von der Zeit abhängiges Verhältniss eine eben so messbare Grösse ist, wie eine Entfernung: beide also ihrer Natur nach zu scharfer *quantitativer* Bestimmung geeignet, wenn auch ungeeignet, den *inneren Grund* einer Kraft darin zu suchen.

Es lässt sich hiernach gegen die Einführung eines von der Zeit abhängigen Verhältnisses in dem allgemeinen Ausdrucke einer Kraft höchstens die *Analogie anderer Fundamentalgesetze* der Physik, z. B. des Gravitationsgesetzes, geltend machen, wo dies nicht geschieht. Jedoch kann eine solche Analogie nur dann als bindend angesehen werden, wenn sie Mittel und Wege darbietet, zum Ziele zu gelangen, wo aber die Analogie bekannter Fälle nicht ausreicht, müssen der Natur der Sache nach neue Wege versucht werden.

Wenn also die Einführung solcher *von der Zeit abhängiger Verhältnisse* in dem allgemeinen Ausdrucke einer Kraft überhaupt nicht verworfen werden kann, so dürfte dies um so weniger dann der Fall sein, wenn jene Verhältnisse zur vollständigen Bestimmung des *vorhandenen Zustands* der auf einander wirkenden Massen wesentlich gehören, da doch jedenfalls die Kraft, welche zwei Massen auf einander ausüben, da sie *nicht immer* dieselbe bleibt, von dem *zur Zeit vorhandenen Zustande* beider Massen abhängig gedacht werden muss. Zur vollständigen Bestimmung des gegenwärtigen Zustands zweier Massen gehört aber wesentlich ausser der Bestimmung ihrer *relativen Lage* durch ihre gegenseitige Entfernung r, auch die Bestimmung ihrer *relativen Bewegung* durch ihre relative Geschwindigkeit dr/dt. Denn schon nach dem Principe der Beharrung kann man nicht umhin, die Geschwindigkeit eines Körpers wesentlich zu seinem gegenwärtigen Zustande zu rechnen, weil der Grund der Beharrung nach jenem Principe in dem Körper selbst liegt, und folglich dem Beharren in *verschiedener* Bewegung *verschiedene* innere Zustände des Körpers entsprechen müssen, die, unserer Beobachtung selbst unzugänglich, nur durch ihre mit der Zeit hervortretenden Wirkungen unterschieden werden können.

21.

Transformation des Ampère'*schen Gesetzes.*

Was in den vorhergehenden Artikeln an einigen speciellen Thatsachen, soll nun allgemeiner und genauer an allen unter dem Ampère'schen Gesetze enthaltenen Thatsachen nachgewiesen werden. Das Ampère'sche Gesetz bestimmt die *Totalwirkung*, welche ein Stromelement auf das andere ausübt, in ihrer Abhängigkeit von dem *Abstande* beider Elemente von einander, von ihren beiden *Stromintensitäten* und von den 3 *Winkeln* ihrer beiden Stromrichtungen unter einander und mit der beide Elemente verbindenden Geraden. Soll nun eine Zurückführung dieser so bestimmten *Totalwirkung* auf *elektrische Elementarkräfte* möglich sein, so muss *erstens* die Ampère'sche Formel sich in mehrere Theile zerlegen lassen, welche den Wirkungen *je zweier elektrischer Massen* in beiden Stromelementen entsprechen, im Einzelnen nämlich der Wirkung der positiven Masse des einen Elements auf die positive des anderen, der negativen Masse des einen Elements auf die negative des anderen, der positiven Masse des ersteren auf die negative des letzteren, und endlich der negativen Masse des ersteren auf die positive des letzteren. *Zweitens* muss jeder dieser Theile, als *elektrische Elementarkraft*, ganz von solchen Grössen abhängig sein, welche ausschliesslich dem Wesen und den gegenseitigen Verhältnissen der beiden elektrischen Massen, auf die er bezogen wird, angehören und dadurch vollständig und unabhängig von anderen Umständen bestimmt sind. *Drittens* endlich müssten alle diese *elektrischen Elementarkräfte* unter ein *allgemeines Gesetz* gebracht werden können. Es ist aber nicht nöthig, über dieses allgemeine Gesetz im Voraus irgend eine Hypothese zu machen, vielmehr müsste das Ampère'sche Gesetz nach solcher Umgestaltung unmittelbar zum Ausspruch dieses allgemeinen Gesetzes führen und über Zulässigkeit oder Unzulässigkeit einer jeden darüber im Voraus aufgestellten Hypothese entscheiden. Es soll zunächst folgende Frage beantwortet werden:

> ob die Ampère'sche Formel eine solche Transformation gestatte, dass die darin enthaltenen Stromintensitäten i und i', und die Winkel ε, ϑ und ϑ', welche die beiden Stromelemente unter sich und mit der beide Elemente verbindenden Geraden einschliessen, daraus verschwinden, und statt derselben nur solche neue Grössen eingeführt werden, welche sich ganz und ausschliesslich auf die elektrischen Massen selbst und deren gegenseitige Verhältnisse beziehen.

Diese Transformation wird hier nun wirklich ausgeführt und sodann geprüft werden, ob der auf solche Weise transformirte Ausdruck der elektrodynamischen Kraft die verlangte Zerlegung in vier Theile, welche

vier partiellen Wirkungen entsprächen, aus denen die Totalwirkung zusammen gesetzt wäre, gestatte.

Die Ampère'sche Formel für die abstossende Kraft zweier Stromelemente ist folgende:

$$-\frac{ii'}{r^2}(\cos\varepsilon - \tfrac{3}{2}\cos\vartheta\cos\vartheta') \,.\, \mathrm{d}s\,\mathrm{d}s',$$

worin die Buchstaben die Art. 8, S. 70 angegebene Bedeutung haben.

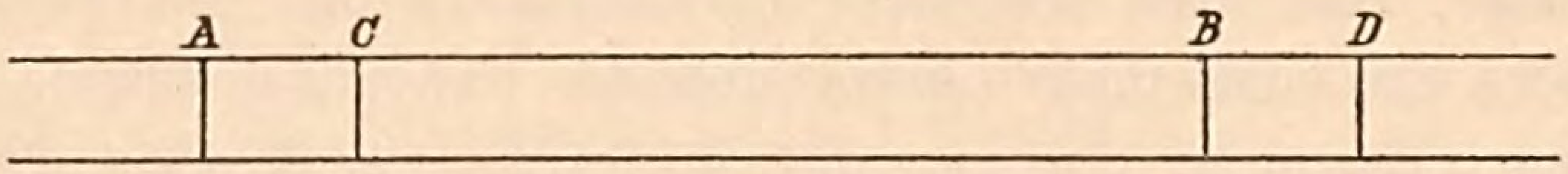


Fig. 16.

AB Fig. 16 sei ein Stück des einen Leitungsdrahts von der Länge $= 1$, und die Menge der darin gleichförmig vertheilten positiven Elektricität werde mit e bezeichnet, so dass $e\mathrm{d}s$ die Masse der positiven Elektricität ist, welche das Stromelement enthält, dessen Länge $= \mathrm{d}s$ ist.

Mit der konstanten Geschwindigkeit u, welche alle positiven Elektricitätstheile im Leitungsdrahte AB beim Durchgang eines konstanten Stroms besitzen, legen in einer Sekunde die vordersten den Weg BD, die hintersten den Weg AC zurück, und die elektrische Masse e, welche im Anfang der Sekunde im Stücke $AB = 1$ gleichförmig vertheilt war, befindet sich am Ende der Sekunde im Stücke $CD = 1$ gleichförmig vertheilt. Durch den Querschnitt des Leitungsdrahts bei B ist folglich während der Sekunde alle Elektricität durchgegangen, welche am Ende der Sekunde auf der anderen Seite von B das Stück $BD = u$ des Leitungsdrahts erfüllt. Es kann nun diese Elektricität, der im Anfang von Art. 2 gegebenen Definition von der Stromintensität i gemäss (wonach dieselbe der Menge Elektricität proportional ist, welche während einer Sekunde durch einen Querschnitt der Kette geht), $= i/a$ gesetzt werden, wo a eine Konstante bezeichnet. Es ergiebt sich dann

$$\frac{i}{a} : e = u : 1,$$

folglich $i = aeu$. Der Werth von a ist ein anderer als Art. 19.

Ebenso ergiebt sich, wenn u' die Strömungsgeschwindigkeit der Elektricität im anderen Leitungsdrahte bezeichnet,

$$i' = a e' u'.$$

Substituirt man diese Werthe in der Ampère'schen Formel, so wird dieselbe

$$-\frac{e\mathrm{d}s \,.\, e'\mathrm{d}s'}{r^2}\, a^2 u u' (\cos\varepsilon - \tfrac{3}{2}\cos\vartheta\cos\vartheta'),$$

wo also der erste Faktor $e\mathrm{d}s \,.\, e'\mathrm{d}s'/r^2$ das Produkt zweier auf einander wirkender *elektrischer Massen* in den beiden Stromelementen dividirt durch das Quadrat ihrer *Entfernung* bezeichnet.

Ferner hat Ampère in seiner Abhandlung S. 207 schon gezeigt, dass

$$\cos\vartheta = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}s}, \quad \cos\vartheta' = -\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}s'}$$

und

$$\cos\varepsilon = -r\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}s\,\mathrm{d}s'} - \frac{\mathrm{d}r\,\mathrm{d}r}{\mathrm{d}s\,\mathrm{d}s'}$$

sei. Substituirt man diese Werthe, so erhält die Ampère'sche Formel folgende Gestalt:

$$-\frac{e\mathrm{d}s \,.\, e'\mathrm{d}s'}{r^2} \cdot a^2 uu' \left(\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}r\,\mathrm{d}r}{\mathrm{d}s\,\mathrm{d}s'} - r\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}s\,\mathrm{d}s'}\right).$$

Es liege das Element $\mathrm{d}s$ des Leitungsdrahts ABS Fig. 17 bei B; in A werde der Anfangspunkt des Leitungsdrahts gesetzt, folglich $AB = s$. Das Element $\mathrm{d}s'$ des Leitungsdrahts $A'B'S'$ liege bei B, A' sei der Anfangspunkt dieses Drahts, $A'B' = s'$ und $BB' = r$. Die letzte Grösse r ist, wenn die Leitungsdrähte ABS und $A'B'S'$ gegeben sind, eine Funktion von s und s', und man erhält für $\mathrm{d}r$ und $\mathrm{d}^2 r$ folgende Ausdrücke:

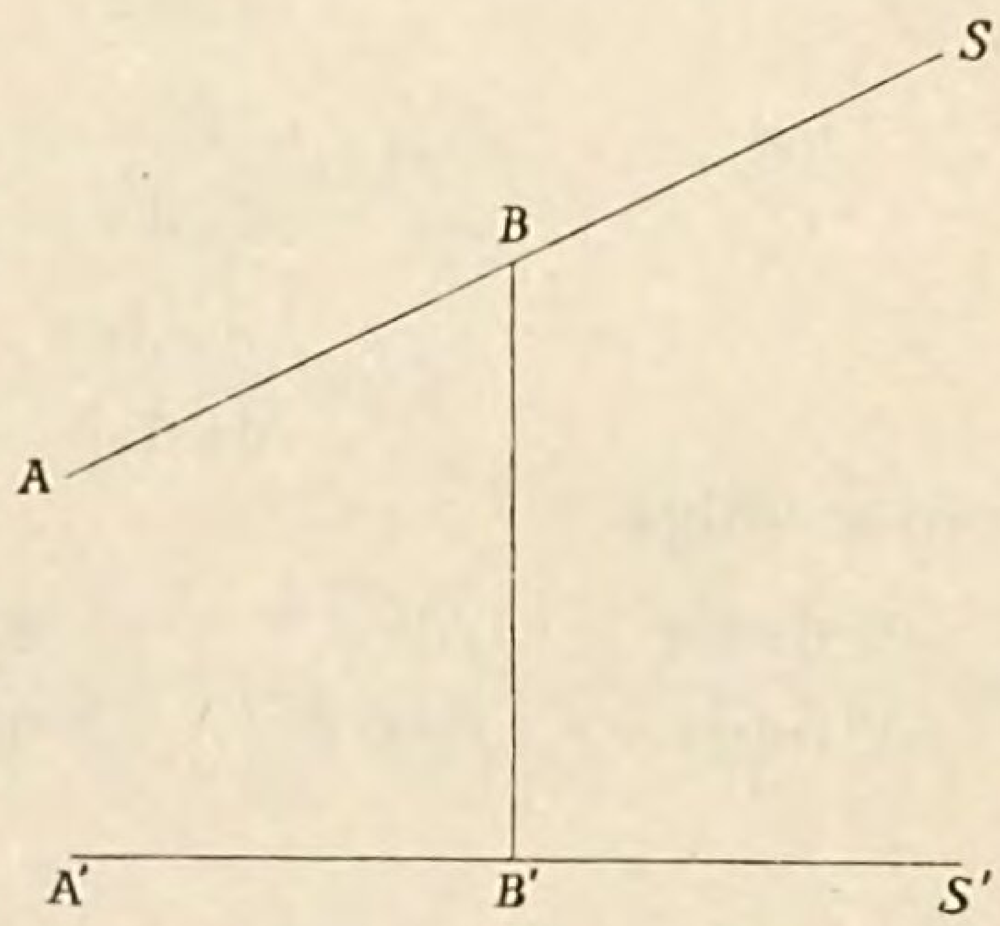


Fig. 17.

$$\mathrm{d}r = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}s}\mathrm{d}s + \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}s'}\mathrm{d}s'$$

$$\mathrm{d}^2 r = \frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}s^2}\mathrm{d}s^2 + 2\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}s\,\mathrm{d}s'}\mathrm{d}s\,\mathrm{d}s' + \frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}s'^2}\mathrm{d}s'^2.$$

Bedeutet nun s und s' die Länge der Leitungsdrähte von ihren Anfangspunkten an bis zu den betrachteten Stromelementen selbst, so haben s und s' für zwei gegebene Stromelemente konstante Werthe. s und s' können aber auch die Länge der Leitungsdrähte von ihren Anfangspunkten an bis zu den in den betrachteten Stromelementen gerade jetzt befindlichen, aber durch dieselben weiter strömenden *elektrischen Massen* bedeuten. In dieser letzteren Bedeutung sind s und s' veränderlich mit der Zeit t, und man hat dann

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}s}\cdot\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}s'}\cdot\frac{\mathrm{d}s'}{\mathrm{d}t},$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}s^2}\cdot\frac{\mathrm{d}s^2}{\mathrm{d}t^2} + 2\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}s\,\mathrm{d}s'}\cdot\frac{\mathrm{d}s\,\mathrm{d}s'}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}s'^2}\cdot\frac{\mathrm{d}s'^2}{\mathrm{d}t^2}.$$

Hierin ist ds/dt das Wegelement der elektrischen Masse dividirt durch das Zeitelement, in welchem es durchlaufen wird, d. i. die *Geschwindigkeit* der elektrischen Masse, und es ist also $ds/dt = u$, wenn die *positive* Masse zunächst betrachtet wird. Eben so ist dann $ds'/dt = u'$. Substituirt man diese Werthe, so ist

$$\frac{dr}{dt} = u\frac{dr}{ds} + u'\frac{dr}{ds'},$$

$$\frac{d^2r}{dt^2} = u^2\frac{d^2r}{ds^2} + 2uu'\frac{d^2r}{ds\,ds'} + u'^2\frac{d^2r}{ds'^2}.$$

Aus der letzteren Gleichung und aus der von der ersteren abgeleiteten

$$\frac{dr^2}{dt^2} = u^2\frac{dr^2}{ds^2} + 2uu'\frac{dr\,dr}{ds\,ds'} + u'^2\frac{d^2r}{ds'^2}$$

ergeben sich für $2uu'\frac{d^2r}{ds\,ds'}$, und $2uu'\frac{dr\,dr}{ds\,ds'}$ folgende Werthe:

$$2uu'\frac{d^2r}{ds\,ds'} = \frac{d^2r}{dt^2} - u^2\frac{d^2r}{ds^2} - u'^2\frac{d^2r}{ds'^2},$$

$$2uu'\frac{dr\,dr}{ds\,ds'} = \frac{dr^2}{dt^2} - u^2\frac{dr^2}{ds^2} - u'^2\frac{dr^2}{ds'^2},$$

woraus folgt:

$$uu'\left(\frac{1}{2}\frac{dr\,dr}{ds\,ds'} - r\frac{d^2r}{ds\,ds'}\right) = \left(\frac{1}{4}\frac{dr^2}{dt^2} - \frac{1}{2}r\frac{d^2r}{dt^2}\right) - \left(\frac{1}{4}\frac{dr^2}{ds^2} - \frac{1}{2}r\frac{d^2r}{ds^2}\right)u^2$$
$$- \left(\frac{1}{4}\frac{dr^2}{ds'^2} - \frac{1}{2}r\frac{d^2r}{ds'^2}\right)u'^2.$$

Substituirt man diesen Werth, so erhält die Ampère'sche Formel folgende Gestalt:

$$-\frac{eds.e'ds'}{r^2}a^2\left\{\left(\frac{1}{4}\frac{dr^2}{dt^2} - \frac{1}{2}r\frac{d^2r}{dt^2}\right) - \left(\frac{1}{4}\frac{dr^2}{ds^2} - \frac{1}{2}r\frac{d^2r}{ds^2}\right)u^2 - \left(\frac{1}{4}\frac{dr^2}{ds'^2} - \frac{1}{2}r\frac{d^2r}{ds'}\right)u'^2\right\}.$$

Bei dieser Transformation der Ampère'schen Formel sind zunächst blos die *positiven elektrischen Massen*, welche in ihren Bahnen mit den Geschwindigkeiten u und u' sich bewegten, eingeführt worden. Es leuchtet ein, dass man statt der positiven elektrischen Massen auch die *negativen* einführen könne. Es ergiebt sich dann, wenn dies für beide Stromelemente zugleich geschieht, beide eingeführten Massen also wiederum *gleichartig* sind, ihre Geschwindigkeiten aber, den für galvanische Ströme S. 139 gegebenen Bestimmungen gemäss, beide zugleich die entgegengesetzten Werthe, nämlich $-u$ und $-u'$, erhalten, wiederum der nämliche Ausdruck. Denn bezeichnet r_1, ς und ς' für die *negativen* Massen dasselbe, was r, s und s' für die *positiven*, so erhält man zunächst die Ampère'sche Formel in folgender Gestalt:

$$-\frac{eds.e'ds'}{r_1{}^2}\cdot a^2\left\{\left(\frac{1}{4}\frac{dr_1^2}{dt^2} - \frac{1}{2}r_1\frac{d^2r_1}{dt^2}\right) - \left(\frac{1}{4}\frac{dr_1^2}{d\varsigma^2} - \frac{1}{2}r_1\frac{d^2r_1}{d\varsigma^2}\right)u^2 - \left(\frac{1}{4}\frac{dr_1^2}{d\varsigma'^2} - \frac{1}{2}r_1\frac{d^2r_1}{d\varsigma'^2}\right)u'^2\right\}.$$

Für den betrachteten Augenblick, wo jene *positiven* (auf welche r, s und s' bezogen werden) und diese *negativen* (auf welche r_1, ς und ς' bezogen werden) Massen durch die nämlichen Stromelemente gehen, ist aber

$$r = r_1, \quad s = \varsigma, \quad s' = \varsigma'.$$

Ferner ist auch

$$\frac{\mathrm{d}r_1}{\mathrm{d}\varsigma} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}s}, \quad \frac{\mathrm{d}^2 r_1}{\mathrm{d}\varsigma^2} = \frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}s^2}, \quad \frac{\mathrm{d}r_1}{\mathrm{d}\varsigma'} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}s'}, \quad \frac{\mathrm{d}^2 r_1}{\mathrm{d}\varsigma'^2} = \frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}s'^2},$$

weil alle diese Werthe blos von der Lage der von jenen *positiven* und diesen *negativen* Massen zugleich durchflossenen Stromelementen abhängig, von der Bewegung der Massen in diesen Stromelementen aber unabhängig sind. Endlich ist

$$\frac{\mathrm{d}\varsigma}{\mathrm{d}t} = -u = -\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}, \qquad \frac{\mathrm{d}\varsigma'}{\mathrm{d}t} = -u' = -\frac{\mathrm{d}s'}{\mathrm{d}t},$$

folglich ist

$$\frac{\mathrm{d}r_1}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}r_1}{\mathrm{d}\varsigma} \cdot \frac{\mathrm{d}\varsigma}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}r_1}{\mathrm{d}\varsigma'} \cdot \frac{\mathrm{d}\varsigma'}{\mathrm{d}t} = -\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}s} \cdot \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}s'} \cdot \frac{\mathrm{d}s'}{\mathrm{d}t}\right) = -\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t},$$

woraus sich

$$\frac{\mathrm{d}r_1}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}r^2}{\mathrm{d}t^2}$$

ergiebt. Ebenso findet man

$$\frac{\mathrm{d}^2 r_1}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2}.$$

Durch Substitution dieser Werthe geht der letztere Ausdruck in den früheren über.

Anders verhält es sich aber bei Einführung einer *positiven* und einer *negativen* Masse, d. h. bei *ungleichartigen* Massen. Hält man sich bei dem ersten Stromelemente an die *positive*, bei dem zweiten an die *negative* Masse, und bezeichnet mit r_2 ihren Abstand, so erhält man die Ampère'sche Formel in folgender Gestalt:

$$+\frac{e\,\mathrm{d}s\,.\,e'\mathrm{d}s'}{r_2{}^2} \cdot a^2 \left\{\left(\frac{1}{4}\frac{\mathrm{d}r_2^2}{\mathrm{d}t^2} - \frac{1}{2} r_2 \frac{\mathrm{d}^2 r_2}{\mathrm{d}t_2}\right) - \left(\frac{1}{4}\frac{\mathrm{d}r_2^2}{\mathrm{d}s^2} - \frac{1}{2} r_2 \frac{\mathrm{d}^2 r_2}{\mathrm{d}s^2}\right) u^2 - \left(\frac{1}{4}\frac{\mathrm{d}r_2^2}{\mathrm{d}\varsigma'^2} - \frac{1}{2} r_2 \frac{\mathrm{d}^2 r_2}{\mathrm{d}\varsigma'^2}\right) u'^2 \right\}.$$

Hält man sich dagegen bei dem ersten Stromelemente an die *negative*, bei dem zweiten an die *positive* Masse, und bezeichnet mit r_3 ihren Abstand, so erhält man die Ampère'sche Formel in folgender Gestalt:

$$+\frac{e\,\mathrm{d}s\,.\,e'\mathrm{d}s'}{r_3{}^2} \cdot a^2 \left\{\left(\frac{1}{4}\frac{\mathrm{d}r_3^2}{\mathrm{d}t^2} - \frac{1}{2} r_3 \frac{\mathrm{d}^2 r_3}{\mathrm{d}t^2}\right) - \left(\frac{1}{4}\frac{\mathrm{d}r_3^2}{\mathrm{d}\varsigma^2} - \frac{1}{2} r_3 \frac{\mathrm{d}^2 r_3}{\mathrm{d}\varsigma^2}\right) u^2 - \left(\frac{1}{4}\frac{\mathrm{d}r_3^2}{\mathrm{d}s'^2} - \frac{1}{2} r_3 \frac{\mathrm{d}^2 r_3}{\mathrm{d}s'^2}\right) u'^2 \right\}.$$

Hierin ist nun ebenfalls $r_2 = r_3 = r$,

$$\frac{\mathrm{d}r_2}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}r_3}{\mathrm{d}\varsigma} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}s}, \qquad \frac{\mathrm{d}^2 r_2}{\mathrm{d}s^2} = \frac{\mathrm{d}^2 r_3}{\mathrm{d}\varsigma^2} = \frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}s^2},$$

$$\frac{dr_2}{d\varsigma'}=\frac{dr_3}{ds'}=\frac{dr}{ds'},\qquad \frac{d^2r_2}{ds'^2}=\frac{d^2r_3}{ds'^2}=\frac{d^2r}{ds'^2};$$

es ergiebt sich aber

$$\frac{dr_2}{dt}=\frac{dr_2}{ds}\cdot\frac{ds}{dt}+\frac{dr_2}{d\varsigma'}\cdot\frac{d\varsigma'}{dt}=+\frac{dr}{ds}\cdot\frac{ds}{dt}-\frac{dr}{ds'}\cdot\frac{ds'}{dt},$$

$$\frac{dr_3}{dt}=\frac{dr_3}{d\varsigma}\cdot\frac{d\varsigma}{dt}+\frac{dr_3}{ds'}\cdot\frac{ds'}{dt}=-\frac{dr}{ds}\cdot\frac{ds}{dt}+\frac{dr}{ds'}\cdot\frac{ds'}{dt}=-\frac{dr_2}{dt},$$

folglich ist $dr_2^2/dt^2=dr_3^2/dt^2$, von dr^2/dt^2 verschieden. Eben so findet man $d^2r_2/dt^2=d^2r_3/dt^2$, von d^2r/dt^2 verschieden. Durch Substitution dieser Werthe erhält man, in beiden Fällen wo man *ungleichartige* Massen einführt, den nämlichen Ausdruck für die Ampère'sche Formel, nämlich:

$$+e\,ds\,.\,e'ds'\,.\,a^2\left\{\frac{1}{r_2^{\,2}}\left(\frac{1}{4}\frac{dr_2^2}{dt^2}-\frac{1}{2}r_2\frac{d^2r_2}{dt^2}\right)-\left(\frac{1}{4}\frac{dr^2}{ds^2}-\frac{1}{2}r\frac{d^2r}{ds^2}\right)\frac{u^2}{r^2}-\left(\frac{1}{4}\frac{dr^2}{ds'^2}-\frac{1}{2}r\frac{dr^2}{ds'^2}\right)\frac{u'^2}{r^2}\right\}.$$

Da nun beide Ausdrücke, sowohl der frühere, welcher durch Einführung *gleichartiger*, als dieser letztere, welcher durch Einführung *ungleichartiger* Massen erhalten wurde, die Kraft darstellen, mit welcher zwei Stromelemente auf einander wirken, beide mit der Ampère'schen Formel identisch, so wird man aus ihnen für die nämliche Kraft noch einen dritten, ebenfalls mit der Ampère'schen Formel identischen Ausdruck ableiten, wenn man ihre halbe Summe nimmt, das ist

$$-\frac{a^2}{2}\frac{e\,ds\,.\,e'ds'}{r^2}\left(\frac{1}{4}\frac{dr^2}{dt^2}-\frac{1}{2}r\frac{d^2r}{dt}\right)+\frac{a^2}{2}\cdot\frac{e\,ds\,.\,e'ds'}{r_2^{\,2}}\left(\frac{1}{4}\frac{dr_2^2}{dt^2}-\frac{1}{2}r_2\frac{d^2r_2}{dt^2}\right).$$

Dieser letzte, der Ampère'schen Formel gleiche, Ausdruck ist die gesuchte *Transformation*. Denn es sind dadurch aus der Ampère'schen Formel die Grössen i, i', ε, ϑ und ϑ' eliminirt, und nur solche Grössen statt derselben eingeführt worden, welche theils die *gleichartigen*, theils die *ungleichartigen* elektrischen Massen selbst und ihre gegenseitigen Verhältnisse betreffen.

Dieser *transformirte* Ausdruck der Ampère'schen Formel lässt sich nun auch als eine Summe von vier Theilen darstellen, welche als die *elektrischen Elementarkräfte* betrachtet werden können, nämlich auf folgende Weise:

$$+\frac{e\,ds\,.\,e'ds'}{r^2}\left(1-\frac{a^2}{16}\frac{dr^2}{dt^2}+\frac{a^2}{8}r\frac{d^2r}{dt^2}\right),\ \text{als Wirkung von } +e\,ds \text{ auf } +e'ds';$$

$$+\frac{e\,ds\,.\,e'ds'}{r_1^{\,2}}\left(1-\frac{a^2}{16}\frac{dr_1^2}{dt^2}+\frac{a^2}{8}r_1\frac{d^2r_1}{dt^2}\right),\ \text{als Wirkung von } -e\,ds \text{ auf } -e'ds';$$

$$-\frac{e\,ds\,.\,e'ds'}{r_2^{\,2}}\left(1-\frac{a^2}{16}\frac{dr_2^2}{dt^2}+\frac{a^2}{8}r_2\frac{d^2r_2}{dt^2}\right),\ \text{als Wirkung von } +e\,ds \text{ auf } -e'ds';$$

$$-\frac{e\,\mathrm{d}s\,.\,e'\mathrm{d}s'}{r_3^{\,2}}\left(1-\frac{a^2}{16}\frac{\mathrm{d}r_3^2}{\mathrm{d}t^2}+\frac{a^2}{8}r_3\frac{\mathrm{d}^2r_3}{\mathrm{d}t^2}\right),\text{ als Wirkung von }-e\,\mathrm{d}s\text{ auf }+e'\mathrm{d}s';$$

Jede dieser vier partiellen Wirkungen reducirt sich für den Fall der Ruhe, wo $\mathrm{d}r/\mathrm{d}t=\mathrm{d}r_1/\mathrm{d}t=\mathrm{d}r_2/\mathrm{d}t=\mathrm{d}r_3/\mathrm{d}t=0$ und ebenso $\mathrm{d}^2r/\mathrm{d}t^2=\mathrm{d}^2r_1/\mathrm{d}t^2=\mathrm{d}^2r_2/\mathrm{d}t^2=\mathrm{d}^2r_3/\mathrm{d}t^2=0$ ist, auf den nämlichen Werth, wie er für diesen Fall durch das Fundamentalgesetz der *Elektrostatik* bestimmt wird; jede dieser vier Kräfte wird dann nämlich durch das Produkt der Massen, welche auf einander wirken, dividirt durch das Quadrat ihrer Entfernungen ausgedrückt. Je nachdem jenes Produkt einen positiven oder negativen Werth hat, wirkt die Kraft abstossend oder anziehend.

Bezeichnet man, wie in der Elektrostatik, die elektrischen Massen schlechtweg durch e und e', und legt diesen Massen selbst positive oder negative Werthe bei, je nachdem sie dem positiven oder negativen Fluidum angehören, so können alle jene partiellen Wirkungen unter das *allgemeine Gesetz* gebracht werden, wonach die abstossende Kraft jener Massen dargestellt wird durch

$$\frac{e\,e'}{r^2}\left(1-\frac{a^2}{16}\frac{\mathrm{d}r^2}{\mathrm{d}t^2}+\frac{a^2}{8}r\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2}\right).$$

Es folgt also aus dieser Analyse des AMPÈRE'schen Gesetzes, welches ein präciser Ausdruck einer sehr umfangreichen Klasse von Thatsachen ist, das nämliche *elektrische Grundgesetz*, welches in den vorhergehenden Artikeln blos nach Anleitung einzelner Thatsachen aufgestellt wurde, und es ergiebt sich dieses ohne Hypothese.

22.

Theorie zweier konstanter Stromelemente.

Zu dem im vorigen Artikel ausgesprochenen *elektrischen Grundgesetze* gelangt, können wir es an die Spitze der Elektricitätslehre stellen und daraus synthetisch ein System von Folgerungen ableiten, welches der letzte Zweck eines solchen Gesetzes ist.

Die Folgerungen, welche sich für *ruhende* Elektricität daraus ableiten lassen, findet man in POISSON's klassischer Abhandlung in den *Mémoires de l'academie des sciences de l'institut de France.* Année 1812 entwickelt, denn obiges Grundgesetz ist für den Fall der Ruhe mit demjenigen Gesetze, welches POISSON a. a. O. an die Spitze der Elektrostatik gestellt hat, identisch.

Für *bewegte* Elektricität ist zuerst die *gleichförmige* Bewegung der Elektricität galvanischer Ströme in ruhenden Leitern zu betrachten, auf welche sich das AMPÈRE'sche Gesetz bezieht. Da nun aus AMPÈRE's

Gesetze analytisch das obige elektrische Grundgesetz entwickelt worden ist, so muss aus diesem Grundgesetze wieder synthetisch das AMPÈRE'sche Gesetz folgen. Diese Folgerung soll wirklich hier gegeben werden.

In zwei Stromelementen a und a', welche mit der sie verbindenden Geraden in Ebenen liegen, welche den Winkel ω mit einander machen, sind vier *elektrische Massen* gegeben, nämlich in jedem Stromelemente eine *positive* und eine *gleich grosse negative.*

Für das Element a bezeichne $+ae$ die *positive* Masse, welche mit der konstanten Geschwindigkeit $+u$ in der Richtung des Elements a sich bewegt, welche mit der vom ersten Elemente zum zweiten gerichteten Geraden r den Winkel ϑ einschliesst; für dasselbe Element bezeichne $-ae$ die *negative* Masse, welche in der nämlichen Richtung mit der konstanten Geschwindigkeit $-u$, das heisst rückwärts, sich bewegt.

Die accentuirten Buchstaben $\pm a'e'$, $\pm u'$ und ϑ' bezeichnen dasselbe für das andere Element a', was die nicht accentuirten für das erstere Element a.

Zwischen diesen vier Massen sind folgende vier Wirkungen zu betrachten:

$$\begin{aligned}
&\text{von } +ae \text{ auf } +a'e',\\
&\text{von } -ae \text{ auf } -a'e',\\
&\text{von } +ae \text{ auf } -a'e',\\
&\text{von } -ae \text{ auf } +a'e'.
\end{aligned}$$

Die vier Entfernungen dieser auf einander aus der Ferne wirkenden Massen sind in dem betrachteten Augenblicke, wo alle diese Massen in den beiden gegebenen Elementen a und a' sich befinden, der gegebenen Entfernung dieser beiden Elemente r gleich. Diese vier Entfernungen, weil sie nicht immer gleich bleiben, wegen der verschiedenen Bewegungen der Massen, werden durch r_1, r_2, r_3, r_4 bezeichnet, und es ist also in dem betrachteten Augenblicke

$$r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = r.$$

Die Anwendung des am Ende des vorigen Artikels angegebenen Grundgesetzes giebt dann unmittelbar die Werthe dieser vier partiellen Wirkungen, der Reihe nach,

$$\begin{aligned}
&+\frac{ae.a'e'}{r_1^2}\left(1-\frac{a^2}{16}\frac{\mathrm{d}r_1^2}{\mathrm{d}t^2}+\frac{a^2}{8}r_1\frac{\mathrm{d}^2r_1}{\mathrm{d}t^2}\right),\\
&+\frac{ae.a'e'}{r_2^2}\left(1-\frac{a^2}{16}\frac{\mathrm{d}r_2^2}{\mathrm{d}t^2}+\frac{a^2}{8}r_2\frac{\mathrm{d}^2r_2}{\mathrm{d}t^2}\right),\\
&-\frac{ae.a'e'}{r_3^2}\left(1-\frac{a^2}{16}\frac{\mathrm{d}r_3^2}{\mathrm{d}t^2}+\frac{a^2}{8}r_3\frac{\mathrm{d}^2r_3}{\mathrm{d}t^2}\right),\\
&-\frac{ae.a'e'}{r_4^2}\left(1-\frac{a^2}{16}\frac{\mathrm{d}r_4^2}{\mathrm{d}t^2}+\frac{a^2}{8}r_4\frac{\mathrm{d}^2r_4}{\mathrm{d}t^2}\right).
\end{aligned}$$

Diese vier Kräfte werden von den elektrischen Massen $+ a'e'$ und $- a'e'$, auf welche sie unmittelbar wirken, nach Art. 19, S. 137 an die ponderable Masse des Elements a' übertragen, und setzen sich darin zu einer Resultante zusammen, welche der algebraischen Summe jener Kräfte gleich ist. Diese Summe ist, mit Rücksicht auf die schon erwähnte Gleichheit der Entfernungen,

$$-\frac{a^2}{16}\cdot\frac{ae.a'e'}{r^2}\left\{\left(\frac{dr_1^2}{dt^2}+\frac{dr_2^2}{dt^2}-\frac{dr_3^2}{dt^2}-\frac{dr_4^2}{dt^2}\right)-2r\left(\frac{d^2r_1}{dt^2}+\frac{d^2r_2}{dt^2}-\frac{d^2r_3}{dt^2}-\frac{d^2r_4}{dt^2}\right)\right\}.$$

Rückt nun die Masse $+ae$ in dem Zeitelemente dt mit der Geschwindigkeit $+u$ um das Wegelement $+u\,dt$ in ihrer Bahn fort, welche mit der Geraden r_1 den Winkel ϑ einschliesst, während die Masse $+a'e'$ in demselben Zeitelemente dt mit der Geschwindigkeit $+u'$ um das Wegelement $+u'dt$ in ihrer Bahn fortrückt, welche mit der verlängerten Geraden r_1 den Winkel ϑ' einschliesst, und projicirt man diese kleinen Verschiebungen auf die Richtung r_1, so ist

$$r_1 + dr_1 = r_1 - u\,dt\,.\cos\vartheta + u'dt\,.\cos\vartheta',$$

worin dr_1 die Längenänderung der die beiden positiven Massen verbindenden Geraden während des Zeitelements dt bezeichnet. Hieraus folgt

$$\frac{dr_1}{dt} = - u\cos\vartheta + u'\cos\vartheta'.$$

Ebenso ergiebt sich für die beiden negativen Massen $-ae$ und $-a'e'$:

$$\frac{dr_2}{dt} = + u\cos\vartheta - u'\cos\vartheta';$$

ferner für die positive $+ae$ und für die negative $-a'e'$:

$$\frac{dr_3}{dt} = - u\cos\vartheta - u'\cos\vartheta';$$

endlich für die negative $-ae$ und für die positive $+a'e'$:

$$\frac{dr_4}{dt} = + u\cos\vartheta + u'\cos\vartheta'.$$

Es ist folglich

$$\left(\frac{dr_1^2}{dt^2}+\frac{dr_2^2}{dt^2}-\frac{dr_3^2}{dt^2}-\frac{dr_4^2}{dt^2}\right) = -8uu'\cos\vartheta\cos\vartheta'.$$

Da nun ferner die Geschwindigkeiten u und u' konstant sind, so ergiebt sich, wenn man die *Aenderungen* der Winkel ϑ und ϑ' (die selbst zwar in dem betrachteten Augenblicke für alle vier Massenpaare gleichen Werth haben, der sich aber mit der Zeit ändert und ungleich wird) während des Zeitelements dt

für das erste Massenpaar mit $d\vartheta_1$ und $d\vartheta'_1$
für das zweite Massenpaar mit $d\vartheta_2$ und $d\vartheta'_2$

für das dritte Massenpaar mit $d\vartheta_3$ und $d\vartheta'_3$
für das vierte Massenpaar mit $d\vartheta_4$ und $d\vartheta'_4$

bezeichnet, durch Differentiation der ersten Differentialkoefficienten:

$$\frac{d^2 r_1}{dt^2} = + u \sin\vartheta \cdot \frac{d\vartheta_1}{dt} - u' \sin\vartheta' \cdot \frac{d\vartheta'_1}{dt},$$

$$\frac{d^2 r_2}{dt^2} = - u \sin\vartheta \cdot \frac{d\vartheta_2}{dt} + u' \sin\vartheta' \cdot \frac{d\vartheta'_2}{dt},$$

$$\frac{d^2 r_3}{dt^2} = + u \sin\vartheta \cdot \frac{d\vartheta_3}{dt} + u' \sin\vartheta' \cdot \frac{d\vartheta'_3}{dt},$$

$$\frac{d^2 r_4}{dt^2} = - u \sin\vartheta \cdot \frac{d\vartheta_4}{dt} - u' \sin\vartheta' \cdot \frac{d\vartheta'_4}{dt}.$$

Es ist folglich

$$\left(\frac{d^2 r_1}{dt^2} + \frac{d^2 r_2}{dt^2} - \frac{d^2 r_3}{dt^2} - \frac{d^2 r_4}{dt^2}\right) = + u \sin\vartheta \left(\frac{d\vartheta_1}{dt} - \frac{d\vartheta_2}{dt} - \frac{d\vartheta_3}{dt} + \frac{d\vartheta_4}{dt}\right)$$
$$- u' \sin\vartheta' \left(\frac{d\vartheta'_1}{dt} - \frac{d\vartheta'_2}{dt} + \frac{d\vartheta'_3}{dt} - \frac{d\vartheta'_4}{dt}\right).$$

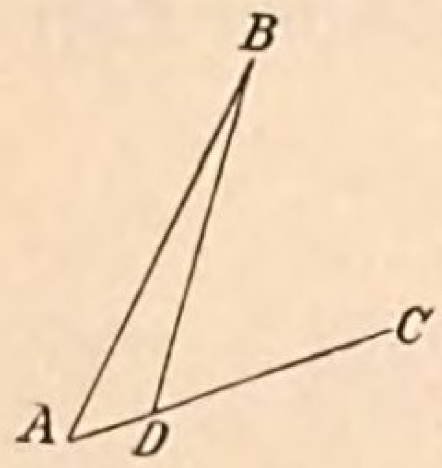


Fig. 18.

Nun stelle AB Fig. 18 die Linie r dar. In A befinde sich die Masse $+ ae$ und bewege sich in der Richtung AC mit der Geschwindigkeit $+ u$ während des Zeitelements dt durch $AD = + u dt$. Der Winkel, welchen die Stromrichtung AC mit AB bildet, ist $BAC = \vartheta$. In Folge der Bewegung von A nach D geht der Winkel BAC in BDC über, und es ist

$$BDC = BAC + ABD = \vartheta + \frac{u dt}{r} \sin\vartheta.$$

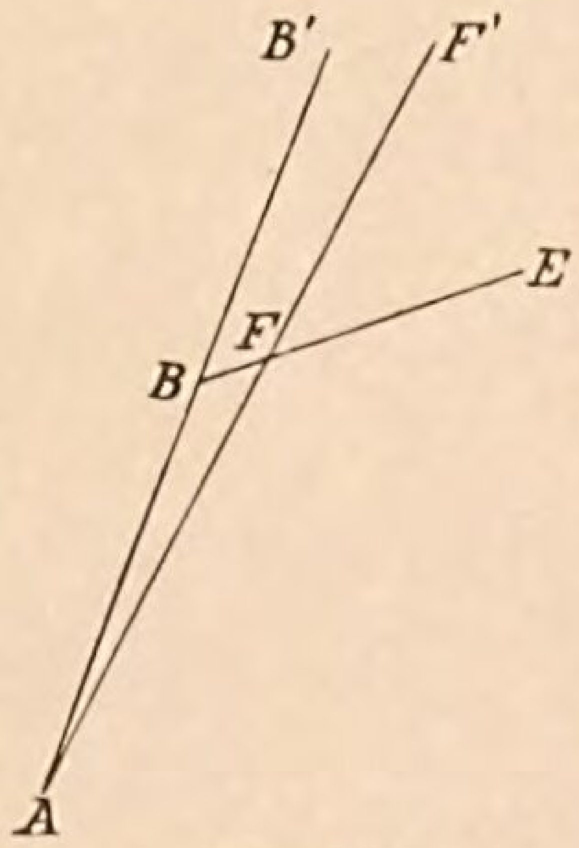


Fig. 19.

Die Linie AB Fig. 19, welche wiederum r darstellt, werde nach B' verlängert. In B befinde sich die Masse $+ a'e'$, und bewege sich in der Richtung BE mit der Geschwindigkeit $+ u'$ während des Zeitelements dt durch $BF = + u' dt$. Der Winkel, welchen die Stromrichtung BE mit BB' bildet, ist $B'BE = \vartheta'$. In Folge der Bewegung von B nach F geht der Winkel $B'BE$ in $F'FE$ über, und es ist

$$\vartheta' = B'BE = AFB + BAF = F'FE + \frac{u' dt}{r} \sin\vartheta',$$

folglich ist

$$F'FE = \vartheta' - \frac{u' dt}{r} \sin\vartheta'.$$

Zieht man endlich mit der Richtung AB und mit den beiden Stromrichtungen AC und BE Fig. 18, 19 Parallellinien durch den Mittel-

punkt einer Kugel, welche die Oberfläche in R, U und U' Fig. 20 schneiden, und verbindet R mit U und U' durch grösste Kreisbögen, so ist die Ebene des Kreisbogens $UR = \vartheta$ der Ebene BAC Fig. 18, die Ebene des Kreisbogens $U'R = \vartheta'$ der Ebene $B'BE$ Fig. 19 parallel, und es ist der von beiden Ebenen eingeschlossene Winkel bei R der mit ω bezeichnete Winkel.

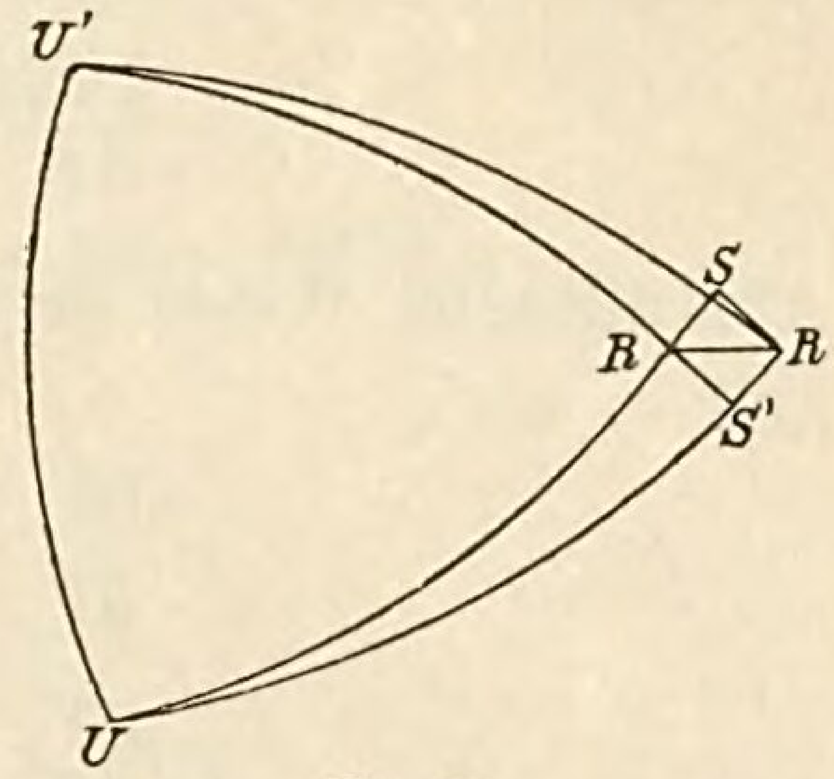


Fig. 20.

Man verlängere die Kreisbögen UR nach S, $U'R$ nach S', und mache

$$RS = +\frac{u\,dt}{r}\sin\vartheta', \quad RS' = -\frac{u'dt}{r}\sin\vartheta'.$$

Dann ist US der Bogen des Winkels BDC Fig. 18 und $U'S'$ der Bogen des Winkels $F'FE$ Fig. 19. Das Element der Kugeloberfläche, worin R, S und S' liegen, kann auch als ein Element der die Kugeloberfläche bei R berührenden Ebene, und die Bogenelemente RS und RS' als gerade Linien in dieser Ebene betrachtet werden. Vollendet man in dieser Ebene das Parallelogramm $RSR'S'$, so geht eine durch den Mittelpunkt der Kugel gezogene Parallele mit der Geraden, welche beide Massen am Ende des Zeitelements dt verbindet, durch den Punkt R'. Es ergiebt sich dies daraus, dass die Richtung dieser Geraden durch die gleichzeitige Bewegung beider Massen sich eben so ändert, wie sie sich ändern würde, wenn die eine Masse ruhete und ihre Bewegung, entgegengesetzt genommen, der anderen Masse beigelegt würde. Es lassen sich dann beide Bewegungen, so auf einen Punkt übertragen, nach dem Gesetze des Parallelogramms zusammen setzen und es ergiebt sich daraus das angeführte Resultat.

Verbindet man endlich R' mit U und U' durch grösste Kreisbögen, so ist

$$UR' = \vartheta + d\vartheta_1 = UR + d\vartheta_1$$
$$U'R' = \vartheta' + d\vartheta'_1 = U'R + d\vartheta'_1.$$

Hieraus folgt:

$$d\vartheta_1 = UR' - UR = RS + RS'\cos\omega$$
$$d\vartheta'_1 = U'R' - U'R = RS' + RS\cos\omega.$$

Da nun $RS = +\frac{u\,dt}{r}\sin\vartheta$, $RS' = -\frac{u'dt}{r}\sin\vartheta'$ war, so ergiebt sich:

$$d\vartheta_1 = +\frac{u\,dt}{r}\sin\vartheta - \frac{u'dt}{r}\sin\vartheta'\cos\omega$$

$$d\vartheta'_1 = -\frac{u'dt}{r}\sin\vartheta' + \frac{u\,dt}{r}\sin\vartheta\cos\omega.$$

Es ist hiernach

$$r\frac{d\vartheta_1}{dt} = + u \sin\vartheta - u' \sin\vartheta' \cos\omega$$

$$r\frac{d\vartheta'_1}{dt} = - u' \sin\vartheta' + u \sin\vartheta \cos\omega.$$

Auf dieselbe Weise ergiebt sich für die beiden *negativen* Massen $-ae$ und $-a'e'$:

$$r\frac{d\vartheta_2}{dt} = - u \sin\vartheta + u' \sin\vartheta' \cos\omega$$

$$r\frac{d\vartheta'_2}{dt} = + u' \sin\vartheta' - u \sin\vartheta \cos\omega,$$

ferner für die positive $+ae$ und für die negative $-a'e'$:

$$r\frac{d\vartheta_3}{dt} = + u \sin\vartheta + u' \sin\vartheta' \cos\omega$$

$$r\frac{d\vartheta'_3}{dt} = + u' \sin\vartheta' + u \sin\vartheta \cos\omega,$$

endlich für die negative $-ae$ und für die positive $+a'e'$:

$$r\frac{d\vartheta_4}{dt} = - u \sin\vartheta - u' \sin\vartheta' \cos\omega$$

$$r\frac{d\vartheta'_4}{dt} = - u' \sin\vartheta' - u \sin\vartheta \cos\omega.$$

Substituirt man nun diese Werthe, so erhält man folgende Gleichung:

$$r\left(\frac{d^2r_1}{dt^2} + \frac{d^2r_2}{dt^2} - \frac{d^2r_3}{dt^2} - \frac{d^2r_4}{dt^2}\right) = - 8\, uu' \sin\vartheta \sin\vartheta' \cos\omega.$$ [1])

[1]) Diese Gleichung kann auch aus den Gleichungen der Bewegung der vier elektrischen Massen abgeleitet werden. Man lege durch das Element α eine mit α' parallele Ebene. O sei derjenige Punkt dieser Ebene, in welchem die auf diese Ebene projicirte Richtung α' die Richtung α schneidet. Man nehme O zum Anfangspunkt der Koordinaten, die Richtung α zur Axe der x, die Axe der z senkrecht auf die erwähnte Ebene. Ferner denke man sich, dass beide Massen sich immer in den nämlichen Richtungen gleichförmig fortbewegten, und wähle denjenigen Augenblick zum Anfangspunkt der Zeit t, für welchen die Koordinaten der später in α' betrachteten Masse

$$x' = 0,\quad y' = 0,\quad z' = c$$

sind. Bezeichnet dann ε den Winkel, welchen die Richtungen α und α' mit einander bilden, x, y, z die Koordinaten der später in α betrachteten Masse, und u und u' die Geschwindigkeiten beider Massen, so sind die Gleichungen der Bewegung

der einen Masse:	der anderen Masse:
$x = b + ut$	$x' = u't \,.\, \cos\varepsilon$
$y = 0$	$y' = u't \,.\, \sin\varepsilon$
$z = 0$	$z' = c$

Substituirt man diesen Werth und den für $\left(\frac{dr_1^2}{dt^2} + \frac{dr_2^2}{dt^2} - \frac{dr_3^2}{dt^2} - \frac{dr_4^2}{dt^2}\right)$ gefundenen in obigem Ausdrucke für die Resultante der vier partiellen Wirkungen, so erhält man dafür folgenden Werth:

$$-\frac{aa'}{r^2} \cdot aeu \,.\, ae'u' (\sin\vartheta \sin\vartheta' \cos\omega - \tfrac{1}{2}\cos\vartheta\cos\vartheta').$$

b und c sind gegebene Konstante. Hiernach ist:

$$x' - x = (u'\cos\varepsilon - u)\,.\,t - b$$
$$y' - y = u't\,.\,\sin\varepsilon$$
$$z' - z = c$$

und, da $r_1^2 = (x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2$ ist,

$$r_1^2 = [(u'\cos\varepsilon - u)\,.\,t - b]^2 + u'^2 t^2\,.\,\sin\varepsilon^2 + c^2.$$

Differentiirt man diese Gleichung nach r_1 und t, so erhält man:

$$\frac{dr_1}{dt} = \frac{1}{r_1} \cdot [(u'\cos\varepsilon - u)\,t - b)\,(u'\cos\varepsilon - u) + u'^2 t\,.\,\sin\varepsilon^2],$$

und durch wiederholte Differention,

$$r_1 \frac{d^2 r_1}{dt^2} + \frac{dr_1^2}{dt^2} = u^2 + u'^2 - 2uu'\cos\varepsilon.$$

Für den Augenblick nun, wo die beiden Massen nach a und a' gelangen, ist, wenn ϑ den Winkel bezeichnet, welchen die Richtung von a nach a' mit der *ersten* Koordinatenaxe bildet,

$$x' - x = r_1\cos\vartheta.$$

Zieht man mit den drei Koordinatenaxen, ferner mit der Richtung von a nach a' und endlich mit der Richtung a' selbst Parallellinien durch den Mittelpunkt einer Kugel, welche die Oberfläche in

$$X,\ Y,\ Z,\ R \text{ und } P$$

schneiden, so ist RY der Bogen des Winkels, welchen die Richtung von a nach a' mit der *zweiten* Koordinatenaxe bildet, folglich für den Augenblick, wo die beiden Massen nach a und a' gelangen,

$$y' - y = r_1\cos RY.$$

Nun ist aber in den sphärischen Dreiecken PRX und PRY, weil der Radius P (welcher der Richtung a' parallel ist) mit den Radien X und Y (welche der Ebene der Koordinatenaxen x und y parallel sind) in demselben grössten Kreise liegt,

$$\cos RX \sin PY + \cos RY \sin PX = \cos PR \sin XY,$$

und es ist ferner

$$XY = 90^0,\quad PX = \varepsilon,\quad RX = \vartheta,\quad PR = \vartheta',$$

wo ϑ' den Winkel bezeichnet, welchen die Richtung von a nach a' mit der Richtung von a' selbst bildet. Substituirt man diese Werthe, so ergiebt sich:

$$\cos RY = \frac{\cos\vartheta' - \cos\vartheta\cos\varepsilon}{\sin\varepsilon},$$

folglich

$$y' - y = r_1 \cdot \frac{\cos\vartheta' - \cos\vartheta\cos\varepsilon}{\sin\varepsilon}.$$

Setzt man hierin nach S. 152

$$aeu = i, \quad ae'u' = i',$$

so ergiebt sich nach dieser Ableitung aus dem aufgestellten elektrischen Grundgesetze, für die abstossende Kraft zweier Stromelemente derselbe Werth wie nach dem Ampère'schen Gesetze, nämlich:

$$-\frac{aa'}{r^2}\, ii'\,(\sin\vartheta\;\sin\vartheta'\;\cos\omega - \tfrac{1}{2}\cos\vartheta\;\cos\vartheta'),$$

oder, wenn man den Winkel, welchen die beiden Elemente a und a' selbst machen, ε nennt, wo dann $\cos\varepsilon = \sin\vartheta\;\sin\vartheta'\;\cos\omega + \cos\vartheta\;\cos\vartheta'$ ist,

$$-\frac{aa'}{r^2}\, ii'\;(\cos\varepsilon - \tfrac{3}{2}\cos\vartheta\;\cos\vartheta').$$

Hierdurch sind die Wirkungen *gleichförmiger* elektrischer Strömungen in *ruhenden* Leitungsdrähten in der Ferne vollständig bestimmt. Die bisherigen Folgerungen des aufgestellten Grundgesetzes sind sämmtlich durch die Erfahrung bestätigt.

Bezeichnet nun t in den obigen Gleichungen für $x' - x$ und $y' - y$ denjenigen Werth, welcher dem Augenblicke entspricht, in welchem die beiden Massen nach a und a' gelangen, so sind die obigen Werthe von $x' - x$ und $y' - y$ den eben gefundenen gleichzusetzen, oder es ist:

$$(u'\cos\varepsilon - u)\,t - b = r_1\cos\vartheta$$

$$u'\,t\,.\sin\varepsilon = r_1 \cdot \frac{\cos\vartheta' - \cos\vartheta\cos\varepsilon}{\sin\varepsilon}\,.$$

Substituirt man diese Werthe in dem Ausdrucke für $\frac{dr_1}{dt}$, so erhält man:

$$\frac{dr_1}{dt} = + u'\cos\vartheta' - u\cos\vartheta.$$

Subtrahirt man das Quadrat hiervon von dem gefundenen Werthe von $r_1\frac{d^2 r_1}{dt^2} + \frac{dr_1^2}{dt^2}$, so bleibt:

$$r_1\frac{d^2 r_1}{dt^2} = u^2\sin\vartheta^2 + u'^2\sin\vartheta'^2 - 2uu'(\cos\varepsilon - \cos\vartheta\cos\vartheta')$$

oder,

wenn man den Winkel ω, nach der Gleichung $\cos\varepsilon = \sin\vartheta\;\sin\vartheta'\cos\omega + \cos\vartheta\;\cos\vartheta'$, einführt,

$$r_1\frac{d^2 r_1}{dt^2} = u^2\sin\vartheta^2 + u'^2\sin\vartheta'^2 - 2uu'\sin\vartheta\sin\vartheta'\cos\omega.$$

Auf dieselbe Weise findet man die den anderen Massenpaaren entsprechenden Differentialkoefficienten, die dann zusammen obige Gleichung geben.

Theorie der Volta-Induktion.

23.

Es bleibt noch übrig, aus dem aufgestellten elektrischen Grundgesetze die Wirkungen *ungleichförmiger* elektrischer Strömungen in *bewegten* Leitern zu entwickeln, welche Entwickelung die *Theorie der Volta-Induktion* umfasst.

Die *Volta-Induktion* unterscheidet sich von Ampère's *Elektrodynamik* dadurch, dass sie die *Entstehung* von Strömen betrifft, welche von letzterer ganz ausgeschlossen ist.

Aus der *Erfahrung* ist über die *Volta-Induktion* folgendes bekannt. Wir wissen *erstens*, dass sie auf zwei wesentlich verschiedene Arten hervorgebracht werden kann; es können nämlich Ströme inducirt werden durch *konstante* Ströme und durch *veränderliche*. Durch *konstante* Ströme wird inducirt, entweder wenn der Leitungsdraht, durch welchen der konstante Strom geht, dem Leitungsdrahte, in welchem ein Strom inducirt werden soll, genähert oder davon entfernt wird, oder wenn umgekehrt der letztere dem ersteren genähert oder von ihm entfernt wird. Für die Wirkung scheint es gleichgültig, ob nur der eine, oder nur der andere Draht, oder beide zugleich bewegt werden, vorausgesetzt, dass ihre *relative* Bewegung die nämliche ist. Sind die beiden Drähte einander parallel, so wird durch Annäherung ein entgegengesetzt gerichteter, durch Entfernung ein gleich gerichteter Strom inducirt. Durch *veränderliche* Ströme wird inducirt, auch wenn der Leitungsdraht, durch welchen der veränderliche Strom geht, gegen denjenigen Draht, in welchem ein Strom inducirt werden soll, unverrückt bleibt. Sind die beiden Drähte einander parallel, so wird durch wachsende Stromintensität ein entgegengesetzt gerichteter, durch abnehmende Intensität ein gleich gerichteter Strom inducirt.

Wir wissen *zweitens* aus der Erfahrung, dass die Induktion eines konstanten Stroms auf einen gegen ihn bewegten Leitungsdraht dieselbe ist, wie die Induktion eines Magnets auf denselben Leitungsdraht, wenn die elektrodynamische Abstossungs- oder Anziehungskraft, welche jener Strom auf diesen Leitungsdraht beim Durchgange eines bestimmten Stroms durch letzteren ausüben würde, der elektromagnetischen Kraft gleich ist, welche der Magnet auf denselben Draht unter den nämlichen Verhältnissen ausüben würde. Siehe Art. 11, S. 103.

Diese Erfahrungen können dazu dienen, die Richtigkeit der aufzustellenden Gesetze der *Volta-Induktion* zu prüfen.

Uebrigens ist zu bemerken, dass die Theorie der *Volta-Induktion* eine Theorie *elektromotorischer Kräfte* ist, durch welche die *inducirten*

Ströme selbst noch nicht vollständig bestimmt werden. Um die *inducirten Ströme* selbst vollständig auch ihrer *Intensität* nach zu bestimmen, so wie auch die von ihnen selbst wieder hervorgebrachten elektrodynamischen Abstossungs- und Anziehungskräfte und *sekundären* Induktionen, bedarf es ausser der aus der Theorie der *Volta-Induktion* zu entnehmenden Bestimmung der *elektromotorischen Kraft,* noch einer Angabe über den *Widerstand* der ganzen Kette, zu welcher der inducirte Leitungsdraht gehört, wie dies aus der durch Ohm's Gesetze bestimmten Abhängigkeit der Stromintensität von der elektromotorischen Kraft und dem Gesammtwiderstande der Kette von selbst einleuchtet.

Die vollständige Entwickelung der Wirkungen *ungleichförmiger* elektrischer Strömungen in *bewegten* Leitern umfasst endlich nicht blos die *Theorie der Volta-Induktion*, das heisst, sie giebt nicht blos von der Entstehung, Verstärkung und Schwächung von Strömen in den ponderablen Leitern Rechenschaft, sondern sie umfasst auch alle *elektrodynamischen* Abstossungs- und Anziehungskräfte, welche Wirkungen obiger Ströme sind, und die ponderablen Leiter selbst bewegen.

Wir wollen in den folgenden Artikeln *zuerst* die Betrachtung einzelner Fälle vorausschicken, und *alsdann* die allgemeine Entwickelung der Wirkungen *ungleichförmiger* elektrischer Strömungen, wie sie in *galvanischen Strömen* von veränderlicher Intensität Statt finden, während die ponderablen Leiter *bewegt* werden, folgen lassen.

24.

Gesetz der Stromerregung in einem Leiter, welcher einem ruhenden konstanten Stromelemente genähert, oder von ihm entfernt wird.

Der einfachste Fall der *Volta-Induktion*, auf welchen das aufgestellte Grundgesetz angewendet werden kann, ist derjenige, wo von den beiden Elementen blos das eine, nämlich das inducirende, schon einen Strom enthält, und zwar einen Strom von konstanter Intensität, und die Entfernung beider Elemente blos durch die Bewegung des anderen Elements, nämlich des inducirten, geändert wird.

Bezeichnet nun α die Länge des inducirenden, α' die Länge des inducirten Elements, so sind in diesen beiden Elementen vier elektrische Massen zu unterscheiden, nämlich:

$$+\alpha e, \quad -\alpha e, \quad +\alpha' e', \quad -\alpha' e'.$$

Die *erste* dieser Massen $+\alpha e$ bewege sich mit der *konstanten* Geschwindigkeit $+u$ in der Richtung des *ruhenden* Elements α, welche mit der von α nach α' gezogenen Geraden den Winkel ϑ einschliesst; die *zweite* $-\alpha e$ bewege sich in der nämlichen Richtung mit der Geschwindigkeit

— u, d. h. rückwärts; die *dritte* $+ a'e'$, welche zwar in dem Elemente a' ruhet, werde von demselben mit der Geschwindigkeit $+ u'$ in derjenigen Richtung *fortgetragen*, welche mit der verlängerten von a nach a' gezogenen Geraden den Winkel ϑ' einschliesst; und mit derselben Geraden in einer Ebene liegt, welche mit der das Element a und jene Gerade enthaltenden Ebene den Winkel ω macht; die *vierte* endlich $- a'e'$, welche ebenfalls im Elemente a' ruht, wird von diesem Elemente mit der nämlichen Geschwindigkeit $+ u'$ in der nämlichen Richtung wie die dritte Masse mit fortgeführt. Die Entfernungen der beiden ersteren Massen von den beiden letzteren sind sämmtlich in dem betrachteten Augenblicke der Entfernung r gleich, in welcher die Elemente a und a' in diesem Augenblicke sich befinden; da sie aber nicht gleich bleiben, sollen sie, wie S. 158, mit r_1, r_2, r_3, r_4 bezeichnet werden.

Die Anwendung des Grundgesetzes giebt dann, wie S. 158, zwischen diesen vier Massen folgende vier partielle Wirkungen:

$$+\frac{ae\,.\,a'e'}{r_1{}^2}\left(1-\frac{a^2\,\mathrm{d}r_1^2}{16\,\mathrm{d}t^2}+\frac{a^2}{8}\,r_1\,\frac{\mathrm{d}^2r_1}{\mathrm{d}t^2}\right)$$

$$+\frac{ae\,.\,a'e'}{r_2{}^2}\left(1-\frac{a^2\,\mathrm{d}r_2^2}{16\,\mathrm{d}t^2}+\frac{a^2}{8}\,r_2\,\frac{\mathrm{d}^2r_2}{\mathrm{d}t^2}\right)$$

$$-\frac{ae\,.\,a'e'}{r_3{}^2}\left(1-\frac{a^2\,\mathrm{d}r_3^2}{16\,\mathrm{d}t^2}+\frac{a^2}{8}\,r_3\,\frac{\mathrm{d}^2r_3}{\mathrm{d}t^2}\right)$$

$$-\frac{ae\,.\,a'e'}{r_4{}^2}\left(1-\frac{a^2\,\mathrm{d}r_4^2}{16\,\mathrm{d}t^2}+\frac{a^2}{8}\,r_4\,\frac{\mathrm{d}^2r_4}{\mathrm{d}t^2}\right)$$

Diese vier partiellen Wirkungen lassen sich nun zunächst zu zwei Kräften vereinigen, von denen die eine die Wirkung der beiden Massen des inducirenden Elements $+ ae$ und $- ae$ auf die *positive* Masse $+ a'e'$ des inducirten Elements, die andere die Wirkung der nämlichen Massen auf die *negative* $- a'e'$ des inducirten Elements ist. Jene Kraft ist die Summe der ersten und vierten, diese ist die Summe der zweiten und dritten. Hieraus ergiebt sich, mit Rücksicht der Gleichheit von r_1, r_2, r_3 und r_4 mit r in dem betrachteten Augenblicke, jene Kraft

$$=-\frac{a^2}{16}\cdot\frac{ae\,.\,a'e'}{r^2}\left\{\left(\frac{\mathrm{d}r_1^2}{\mathrm{d}t^2}-\frac{\mathrm{d}r_4^2}{\mathrm{d}t^2}\right)-2r\left(\frac{\mathrm{d}^2r_1}{\mathrm{d}t^2}-\frac{\mathrm{d}^2r_4}{\mathrm{d}t^2}\right)\right\};$$

diese Kraft ergiebt sich

$$=-\frac{a^2}{16}\cdot\frac{ae\,.\,a'e'}{r^2}\left\{\left(\frac{\mathrm{d}r_2^2}{\mathrm{d}t^2}-\frac{\mathrm{d}r_3^2}{\mathrm{d}t^2}\right)-2r\left(\frac{\mathrm{d}^2r_2}{\mathrm{d}t^2}-\frac{\mathrm{d}^2r_3}{\mathrm{d}t^2}\right)\right\}.$$

In sofern nun die von diesen Kräften hervorgebrachten Bewegungen der beiden elektrischen Massen $+ a'e'$ und $- a'e'$ in ihrem ponderablen Träger a' fast augenblicklich durch den *Widerstand* des letzteren aufgehoben und dadurch alle auf jene Massen wirkenden Kräfte alsbald

auf diesen Träger übertragen werden, giebt die *Summe* obiger beiden Kräfte, wie S. 159, die Kraft, welche den Träger a' selbst bewegt,

$$= -\frac{a^2}{16} \cdot \frac{ae.a'e'}{r^2} \left\{ \left(\frac{dr_1^2}{dt^2} + \frac{dr_2^2}{dt^2} - \frac{dr_3^2}{dt^2} - \frac{dr_4^2}{dt^2} \right) - 2r \left(\frac{d^2 r_1}{dt^2} + \frac{d^2 r_2}{dt^2} - \frac{d^2 r_3}{dt^2} - \frac{d^2 r_4}{dt^2} \right) \right\}.$$

Vor dieser Uebertragung jener ursprünglich auf die elektrischen Massen wirkenden Kräfte auf ihren Träger, werden aber die elektrischen Massen selbst etwas in ihrem Träger verschoben, und wenn diese Verschiebung für die *positive* Masse $+ a'e'$ und für die *negative* $- a'e'$ *verschieden* ist, beide also dadurch von einander *geschieden* werden, so entsteht im Träger a' ein galvanischer Strom, und die Kraft, welche diese Scheidung bewirkt, heisst die *elektromotorische Kraft*. Es leuchtet ein, dass diese *elektromotorische Kraft* von der *Differenz* obiger beiden Kräfte abhängt, d. i. von

$$-\frac{a^2}{16} \cdot \frac{ae.a'e'}{r^2} \left\{ \left(\frac{dr_1^2}{dt^2} - \frac{dr_2^2}{dt^2} + \frac{dr_3^2}{dt^2} - \frac{dr_4^2}{dt^2} \right) - 2r \left(\frac{d^2 r_1}{dt^2} - \frac{d^2 r_2}{dt^2} + \frac{d^2 r_3}{dt^2} - \frac{d^2 r_4}{dt^2} \right) \right\}.$$

Nach den Art. 22 für *zwei ruhende konstante* Stromelemente in Beziehung auf die Bewegung ihrer elektrischen Massen gegebenen Bestimmungen, ergab sich dort der Werth jener *Summe* gleich der durch AMPÈRE's Gesetz bestimmten Kraft,

$$= -\frac{aa'}{r^2} ii' (\cos \varepsilon - \tfrac{3}{2} \cos \vartheta \cos \vartheta');$$

der Werth dieser *Differenz* würde sich dagegen dort

$$= 0$$

ergeben haben.

Nach den in diesem Artikel für *ein ruhendes konstantes* Stromelement und für *ein bewegtes stromloses* Drahtelement in Beziehung auf ihre elektrischen Massen gegebenen Bestimmungen ergiebt sich dagegen der Werth jener *Summe*

$$= 0,$$

und der Werth dieser *Differenz*

$$= -\frac{aa'}{r^2} ae'u'i (\cos \varepsilon - \tfrac{3}{2} \cos \vartheta \cos \vartheta'),$$

wie in Folgendem nachgewiesen werden soll.

Es ist hierzu blos nöthig, in den S. 159 bestimmten Differentialkoefficienten, für die Geschwindigkeit der *negativen* Masse, $+ u'$ statt $- u'$ zu setzen; man erhält dann:

$$\frac{dr_1}{dt} = \frac{dr_3}{dt} = -u \cos \vartheta + u' \cos \vartheta'$$

$$\frac{dr_2}{dt} = \frac{dr_4}{dt} = + u \cos\vartheta + u' \cos\vartheta'.$$

Folglich ist dann:

$$\frac{dr_1^2}{dt^2} + \frac{dr_2^2}{dt^2} - \frac{dr_3^2}{dt^2} - \frac{dr_4^2}{dt^2} = 0.$$

Dagegen ist:

$$\frac{dr_1^2}{dt^2} - \frac{dr_2^2}{dt^2} + \frac{dr_3^2}{dt^2} - \frac{dr_4^2}{dt^2} = - 8\,uu' \cos\vartheta \cos\vartheta'.$$

Ferner erhält man:

$$\frac{d^2 r_1}{dt^2} = + u \sin\vartheta \cdot \frac{d\vartheta_1}{dt} - u' \sin\vartheta' \cdot \frac{d\vartheta'_1}{dt}$$

$$\frac{d^2 r_2}{dt^2} = - u \sin\vartheta \cdot \frac{d\vartheta_2}{dt} - u' \sin\vartheta' \cdot \frac{d\vartheta'_2}{dt}$$

$$\frac{d^2 r_3}{dt^2} = + u \sin\vartheta \cdot \frac{d\vartheta_3}{dt} - u' \sin\vartheta' \cdot \frac{d\vartheta'_3}{dt}$$

$$\frac{d^2 r_4}{dt^2} = - u \sin\vartheta \cdot \frac{d\vartheta_4}{dt} - u' \sin\vartheta' \cdot \frac{d\vartheta'_4}{dt},$$

folglich ist:

$$\frac{d^2 r_1}{dt^2} + \frac{d^2 r_2}{dt^2} - \frac{d^2 r_3}{dt^2} - \frac{d^2 r_4}{dt^2} = + u \sin\vartheta \left(\frac{d\vartheta_1}{dt} - \frac{d\vartheta_2}{dt} - \frac{d\vartheta_3}{dt} + \frac{d\vartheta_4}{dt}\right)$$
$$- u' \sin\vartheta' \left(\frac{d\vartheta'_1}{dt} + \frac{d\vartheta'_2}{dt} - \frac{d\vartheta'_3}{dt} + \frac{d\vartheta'_4}{dt}\right).$$

Dagegen ist:

$$\frac{d^2 r_1}{dt^2} - \frac{d^2 r_2}{dt^2} + \frac{d^2 r_3}{dt^2} - \frac{d^2 r_4}{dt^2} = + u \sin\vartheta \left(\frac{d\vartheta_1}{dt} + \frac{d\vartheta_2}{dt} + \frac{d\vartheta_3}{dt} + \frac{d\vartheta_4}{dt}\right)$$
$$- u' \sin\vartheta' \left(\frac{d\vartheta'_1}{dt} - \frac{d\vartheta'_2}{dt} + \frac{d\vartheta'_3}{dt} - \frac{d\vartheta'_4}{dt}\right).$$

Ferner ergiebt sich nach S. 162 f., wenn man daselbst auch der *negativen* Masse des inducirten Elements $-\alpha' e'$ die Geschwindigkeit $+u'$ beilegt,

$$r\frac{d\vartheta_1}{dt} = r\frac{d\vartheta_3}{dt} = + u \sin\vartheta - u' \sin\vartheta' \cos\omega$$

$$r\frac{d\vartheta_2}{dt} = r\frac{d\vartheta_4}{dt} = - u \sin\vartheta - u' \sin\vartheta' \cos\omega$$

$$r\frac{d\vartheta'_1}{dt} = r\frac{d\vartheta'_3}{dt} = - u' \sin\vartheta' + u \sin\vartheta \cos\omega$$

$$r\frac{d\vartheta'_2}{dt} = r\frac{d\vartheta'_4}{dt} = - u' \sin\vartheta' - u \sin\vartheta \cos\omega,$$

woraus sich ergiebt:

$$r\left(\frac{d\vartheta_1}{dt}-\frac{d\vartheta_2}{dt}-\frac{d\vartheta_3}{dt}+\frac{d\vartheta_4}{dt}\right)=r\left(\frac{d\vartheta'_1}{dt}+\frac{d\vartheta'_2}{dt}-\frac{d\vartheta'_3}{dt}-\frac{d\vartheta'_4}{dt}\right)=0;$$

dagegen aber

$$r\left(\frac{d\vartheta_1}{dt}+\frac{d\vartheta_2}{dt}+\frac{d\vartheta_3}{dt}+\frac{d\vartheta_4}{dt}\right)=-4u'\sin\vartheta'\cos\omega$$

$$r\left(\frac{d\vartheta'_1}{dt}-\frac{d\vartheta'_2}{dt}+\frac{d\vartheta'_3}{dt}-\frac{d\vartheta'_4}{dt}\right)=+4u\sin\vartheta\cos\omega.$$

Es folgt hieraus:

$$r\left(\frac{d^2r_1}{dt^2}+\frac{d^2r_2}{dt^2}-\frac{d^2r_3}{dt^2}-\frac{d^2r_4}{dt^2}\right)=0$$

$$r\left(\frac{d^2r_1}{dt^2}-\frac{d^2r_2}{dt^2}+\frac{d^2r_3}{dt^2}-\frac{d^2r_4}{dt^2}\right)=-8uu'\sin\vartheta\sin\vartheta'\cos\omega.$$

Substituirt man diese Werthe, so findet man die *Summe* der beiden Kräfte, welche auf die *positive* und *negative* Masse des inducirten Elements wirken,

$$=0,$$

ihre *Differenz* dagegen

$$=-\frac{aa'}{r^2}aeu\,.\,ae'u'\,(\sin\vartheta\sin\vartheta'\cos\omega-\tfrac{1}{2}\cos\vartheta\cos\vartheta'),$$

oder, da nach S. 164 $\cos\varepsilon=\sin\vartheta\sin\vartheta'\cos\omega+\cos\vartheta\cos\vartheta'$ und nach S. 152 $aeu=i$, ist,

$$=-\frac{aa'}{r^2}i\,.\,ae'u'\,(\cos\varepsilon-\tfrac{3}{2}\cos\vartheta\cos\vartheta'),$$

was zu beweisen war.

Die hierdurch bestimmte Kraft sucht nun die *positive* und *negative* Elektricität im inducirten Elemente α' nach der Richtung der Geraden r von einander zu scheiden. In der Wirklichkeit kann diese Scheidung aber nur nach der Richtung von α' erfolgen, weil in einem linearen Leiter ein galvanischer Strom nur in der Richtung des Leiters Statt finden kann. Zerlegt man daher obige Kraft nach der Richtung des Elements α' und senkrecht darauf, so kommt nur der erstere Theil als *elektromotorische Kraft* in Betracht, und dieser ist, wenn φ den Winkel bezeichnet, welchen das Element α' mit der verlängerten Geraden r macht,

$$=-\frac{aa'}{r^2}i\,(\cos\varepsilon-\tfrac{3}{2}\cos\vartheta\cos\vartheta')\,.\,ae'u'\cos\varphi.$$

Gewöhnlich versteht man unter *elektromotorischer Kraft* die beschleunigende Kraft, welche die angegebene absolute Kraft auf die in

der Längeneinheit des inducirten Leitungsdrahts enthaltene elektrische Masse e' ausübt, welche durch Division des obigen Werths mit e' erhalten wird. Hiernach würde endlich die *elektromotorische Kraft* eines ruhenden konstanten Stromelements auf ein bewegtes Drahtelement erhalten werden

$$= -\frac{aa'}{r^2} i \,(\cos\varepsilon - \tfrac{3}{2}\cos\vartheta\cos\vartheta') \,.\, au' \cos\varphi.$$

Je nachdem nun dieser Ausdruck einen *positiven* oder *negativen* Werth hat, ist der inducirte Strom *positiv* oder *negativ,* wo unter positivem Strome ein solcher verstanden wird, dessen positive Elektricität in derjenigen Richtung des Elements a' sich bewegt, welche mit der verlängerten Geraden r den Winkel φ einschliesst.

Sind z. B. die Elemente a und a' einander parallel, und ist die Richtung, nach welcher das letztere mit der Geschwindigkeit $+u'$ bewegt wird, in der Ebene beider Elemente senkrecht auf dieselben, so ist, wenn a' durch seine Bewegung von a sich *entfernt,*

$$\vartheta = \varphi, \quad \cos\vartheta' = \sin\vartheta, \quad \cos\varepsilon = 0,$$

folglich die *elektromotorische Kraft*

$$= +\tfrac{3}{2}\frac{aa'}{r^2} i \sin\vartheta\cos\vartheta^2 \,.\, au'.$$

Dieser Werth ist immer *positiv,* wenn $\vartheta < 180^0$ genommen wird, und dieser *positive* Werth bezeichnet hier einen inducirten Strom von gleicher Richtung, wie der inducirende, übereinstimmend mit dem, was die Erfahrung für diesen Fall ergeben hat.

Unter gleichen Verhältnissen, blos mit dem Unterschiede, dass das Element a' durch seine Bewegung dem Elemente a sich *nähert,* ist

$$\vartheta = \varphi, \quad \cos\vartheta' = -\sin\vartheta, \quad \cos\varepsilon = 0,$$

folglich die *elektromotorische Kraft*

$$= -\tfrac{3}{2}\frac{aa'}{r^2} i \sin\vartheta\cos\vartheta^2 \,.\, au'.$$

Der *negative* Werth dieser Kraft bezeichnet einen inducirten Strom von entgegengesetzter Richtung, wie der inducirende, ebenfalls übereinstimmend mit dem, was die Erfahrung für diesen Fall ergeben hat.

25.

Vergleichung mit dem Erfahrungssatze Art. 11.

Auf den im vorigen Artikel betrachteten Fall der *Volta-Induktion* beziehen sich die Art. 10, 11 mitgetheilten Versuche. Zur *quantitativen* Bestimmung der *Volta-Induktion* in diesem Falle ist dort der Satz aufgestellt und an der Erfahrung geprüft worden,

dass die Induktion eines ruhenden konstanten Stroms auf einen gegen ihn bewegten Leitungsdraht die nämliche sei, wie die Induktion eines Magnets auf denselben Leitungsdraht, wenn die elektrodynamische Kraft, welche jener konstante Strom auf jenen von einem Strome durchflossenen Leitungsdraht ausüben würde, der elektromagnetischen Kraft gleich wäre, welche der Magnet auf den von demselben Strome durchflossenen Draht ausüben würde.

Um diesen Satz erfahrungsmässig zu begründen, wurden folgende Versuche gemacht:

1. wurde die *elektrodynamische* Kraft gemessen, welche ein geschlossener Strom A auf einen anderen geschlossenen Strom B ausübte;

2. wurde der geschlossene Strom A mit einem Magnete C vertauscht, und die *elektromagnetische* Kraft gemessen, welche C auf B ausübte;

3. wurde der geschlossene Leiter B, ohne Strom, in eine bestimmte Bewegung gesetzt, und der Strom gemessen, welcher dann vom Strome A in dem bewegten Leiter durch *Volta-Induktion* entstand;

4. wurde bei derselben Bewegung des geschlossenen Leiters B der Strom gemessen, welcher von dem für den Strom A substituirten Magneten C durch *Magneto-Induktion* entstand.

Diesen vier Versuchen entsprechend sollen nun zur Vergleichung folgende vier Gesetze zusammengestellt werden:

1. das Gesetz der *elektrodynamischen* Wirkung eines geschlossenen Stroms auf ein Stromelement;

2. das Gesetz der *elektromagnetischen* Wirkung eines Magneten auf ein Stromelement;

3. das Gesetz der *Volta-Induktion* eines geschlossenen Stroms auf ein Element eines bewegten Leiters;

4. das Gesetz der *Magneto-Induktion* eines Magneten auf ein Element eines bewegten Leiters.

1. *Das Gesetz der elektrodynamischen Wirkung eines geschlossenen Stroms auf ein Stromelement.*

Dieses Gesetz ist S. 86 in der Note unter (3) für den Fall entwickelt worden, wo der geschlossene Strom eine Ebene begrenzt und in die Ferne wirkt. Statt auf dieses besondere Gesetz soll hier auf das allgemeinere zurückgegangen werden, welches Ampère S. 214 seiner Abhandlung gegeben hat, und welches S. 70 dieser Abhandlung angeführt worden ist. Es wird darnach die auf das Stromelement α' wirkende elektrodynamische Kraft nach drei rechtwinkeligen Koordinatenaxen, deren Anfangspunkt im Mittelpunkte des Elements α' liegt, in die Komponenten X, Y, Z zerlegt, welche folgendermaassen bestimmt werden:

$$X = -\frac{ii'}{2} a' (C \cos \mu - B \cos \nu)$$

$$Y = -\frac{ii'}{2} a' (A \cos \nu - C \cos \lambda)$$

$$Z = -\frac{ii'}{2} a' (B \cos \lambda - A \cos \mu),$$

worin $A = \int \frac{y\,\mathrm{d}z - z\,\mathrm{d}y}{r^3}$, $B = \int \frac{z\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}z}{r^3}$, $C = \int \frac{x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x}{r^3}$ ist, a' die Länge des Stromelements, auf welches gewirkt wird, bezeichnet, λ, μ, ν die Winkel, welche a' mit den drei Koordinatenaxen bildet, und i und i' die Intensitäten des geschlossenen Stroms und des Stromelements.

2. *Das Gesetz der elektromagnetischen Wirkung eines Magneten auf ein Stromelement.*

Nach dem Grundgesetze des Elektromagnetismus wird die elektromagnetische Kraft, welche eine Masse nördlichen oder südlichen magnetischen Fluidums $\pm \mu$ auf ein Stromelement von der Länge a' und von der Stromintensität i' in der Entfernung r ausübt, wenn φ den Winkel bezeichnet, welchen a' mit r bildet, durch

$$\pm \frac{i'a'}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\mu \sin \varphi}{r^2}$$

dargestellt, worin $i'\sqrt{\frac{1}{2}}$ für $\varkappa'$ nach S. 86 gesetzt worden ist, und diese Kraft sucht das Stromelement in einer auf a' und r senkrechten Richtung zu bewegen. Hieraus ergiebt sich also die Grösse und Richtung der beiden Kräfte, welche die beiden in einem *kleinen* Magnete enthaltenen Massen des nördlichen und südlichen magnetischen Fluidums auf das Stromelement ausüben. Diese beiden Kräfte lassen sich nach dem Gesetze des Parallelogramms zusammensetzen, und es ergiebt sich daraus die *Grösse* der Resultante, wenn m das magnetische Moment und ψ den Winkel bezeichnet, welchen die magnetische Axe mit der Geraden r macht, und ε den Winkel, welchen die Richtung a' mit der in der Ebene der magnetischen Axe und der Geraden r liegenden Richtung D macht, von deren Winkel mit der Geraden r der Sinus sich zu $\sin \psi$ wie $1 : \sqrt{1 + 3 \cos \psi^2}$ verhält, und wenn man endlich Kürze halber $\frac{1}{r^3}\sqrt{1 + 3 \cos \psi^2}$ mit $\mathfrak{d}$ bezeichnet,

$$= \frac{i'}{\sqrt{2}} a'm' \mathfrak{d} \sin \varepsilon.$$

Die *Richtung* dieser Resultante ist gegen die Richtungen α' und D senkrecht. Bezeichnet man nun mit

$$a,\ b,\ c$$

die Kosinus der Winkel, welche die so bestimmte Resultante mit drei rechtwinkligen Koordinatenaxen bildet, deren Anfangspunkt im Mittelpunkte des Elements α' liege, und zerlegt die Resultante nach der Richtung der letzteren, so erhält man folgende drei Komponenten:

$$\frac{i'}{\sqrt{2}} \cdot \alpha' m' \,.\, a\mathfrak{d} \sin \varepsilon$$

$$\frac{i'}{\sqrt{2}} \cdot \alpha' m' \,.\, b\mathfrak{d} \sin \varepsilon$$

$$\frac{i'}{\sqrt{2}} \cdot \alpha' m' \,.\, c\mathfrak{d} \sin \varepsilon$$

und für a, b, c folgende Gleichungen, wenn die Winkel, welche die Richtung des Elements α' mit jenen Koordinatenaxen bildet, mit

$$\lambda,\ \mu,\ \nu,$$

und die Kosinus der Winkel, welche die Richtung D mit den nämlichen Koordinatenaxen bildet, mit

$$\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{d}},\ \frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{d}},\ \frac{\mathfrak{c}}{\mathfrak{d}},$$

bezeichnet werden, nämlich:

$$a\mathfrak{a} + b\mathfrak{b} + c\mathfrak{c} = 0$$
$$a \cos \lambda + b \cos \mu + c \cos \nu = 0$$
$$aa + bb + cc = 1$$
$$\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{d}} \cos \lambda + \frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{d}} \cos \mu + \frac{\mathfrak{c}}{\mathfrak{d}} \cos \nu = \cos \varepsilon.$$

Durch Elimination von b und c ergiebt sich aus diesen Gleichungen der Werth von a

$$a = \frac{\mathfrak{b} \cos \nu - \mathfrak{c} \cos \mu}{\mathfrak{d}\sqrt{1 - \left(\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{d}} \cos \lambda + \frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{d}} \cos \mu + \frac{\mathfrak{c}}{\mathfrak{d}} \cos \nu\right)^2}} = \frac{\mathfrak{b} \cos \nu - \mathfrak{c} \cos \mu}{\mathfrak{d} \sin \varepsilon},$$

und auf gleiche Weise folgende Werthe von b und c:

$$b = \frac{\mathfrak{c} \cos \lambda - \mathfrak{a} \cos \nu}{\mathfrak{d} \sin \varepsilon}$$

$$c = \frac{\mathfrak{a} \cos \mu - \mathfrak{b} \cos \lambda}{\mathfrak{d} \sin \varepsilon}.$$

Substituirt man diese Ausdrücke in die der drei Komponenten der elektromagnetischen Kraft, so erhält man für die letzteren folgende Werthe:

$$-\frac{i'}{\sqrt{2}} \cdot a'm' (\mathfrak{c} \cos\mu - \mathfrak{b} \cos\nu)$$

$$-\frac{i'}{\sqrt{2}} \cdot a'm' (\mathfrak{a} \cos\nu - \mathfrak{c} \cos\lambda)$$

$$-\frac{i'}{\sqrt{2}} \cdot a'm' (\mathfrak{b} \cos\lambda - \mathfrak{a} \cos\mu) \cdot$$

Für einen grösseren Magnet, welcher aus vielen kleinen zusammengesetzt ist, werden hiernach die drei Komponenten X', Y', Z' der von ihm auf das Stromelement a' ausgeübten elektromagnetischen Kraft folgendermassen bestimmt:

$$X' = -\frac{i'}{\sqrt{2}} \cdot a' (C' \cos\mu - B' \cos\nu)$$

$$Y' = -\frac{i'}{\sqrt{2}} \cdot a' (A' \cos\nu - C' \cos\lambda)$$

$$Z' = -\frac{i'}{\sqrt{2}} \cdot a' (B' \cos\lambda - A' \cos\mu),$$

worin $A' = S(\mathfrak{a}m')$, $B' = S(\mathfrak{b}m')$, $C' = S(\mathfrak{c}m')$ ist.

3. *Das Gesetz der Volta-Induktion eines geschlossenen Stroms auf ein Element eines bewegten Leiters.*

Das im vorigen Artikel entwickelte Elementargesetz dieser Induktion, welches für jedes inducirende *Element* a gilt, giebt folgenden Werth der *elektromotorischen* Kraft, mit welcher ein solches Element a die positive und negative elektrische Masse in dem inducirten Elemente a' nach der Richtung der Geraden r von einander zu scheiden sucht:

$$-\frac{aa'}{r^2} i (\cos\varepsilon - \tfrac{3}{2} \cos\vartheta \cos\vartheta') \,.\, au',$$

worin $+ u'$ die Geschwindigkeit bezeichnet, mit welcher das inducirte Element a' bewegt wird, und ε und ϑ' die Winkel, welche die Richtung dieser Bewegung mit der Richtung, nach welcher im inducirenden Stromelemente a die positive Elektricität strömt, und mit der verlängerten Geraden r bildet. ϑ bezeichnet, wie in der Theorie zweier konstanter Stromelemente Art. 22 den Winkel, welchen die Richtung, nach welcher im ersteren Elemente a die positive Elektricität strömt, mit der Geraden r bildet.

Vergleicht man diesen Werth der *elektromotorischen* Kraft mit dem in der Theorie zweier konstanter Stromelemente, übereinstimmend mit Ampère's Gesetze, S. 164 gefundenen Werthe der *elektrodynamischen*

Kraft, so ergiebt sich folgende einfache Relation zwischen beiden, dass nämlich die erstere Kraft aus der letzteren durch Multiplikation mit dem konstanten Faktor au'/i' erhalten wird, vorausgesetzt, dass die Richtung, nach welcher im Elemente α' die positive Elektricität strömt, in der letzteren Kraft, der Richtung gleich sei, nach welcher das inducirte Element α' selbst bewegt wird, in der ersteren Kraft, d. i.

$$\beta = \lambda, \quad \gamma = \mu, \quad \delta = \nu,$$

wenn die von beiden Richtungen mit drei rechtwinkeligen Koordinatenaxen gebildeten Winkel respektive mit

$$\lambda, \mu, \nu \text{ und } \beta, \gamma, \delta$$

bezeichnet werden; denn alsdann sind die Werthe von ε und ϑ' in beiden Ausdrücken gleich.

Hieraus leuchtet nun unter der gemachten Voraussetzung von selbst ein, dass die unter (1) angeführten Werthe der *elektrodynamischen* Kraft X, Y, Z auch nur mit dem konstanten Faktor au'/i' multiplicirt zu werden brauchen, um die Komponenten $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ der *elektromotorischen* Kraft zu erhalten, welche ein *geschlossener Strom* auf das inducirte Element α' ausübt. Es folgt hieraus

$$\mathfrak{X} = -\frac{au'}{2} \cdot i\alpha' (C \cos \gamma - B \cos \delta)$$

$$\mathfrak{Y} = -\frac{au'}{2} \cdot i\alpha' (A \cos \delta - C \cos \beta)$$

$$\mathfrak{Z} = -\frac{au'}{2} \cdot i\alpha' (B \cos \beta - A \cos \gamma),$$

worin A, B, C dieselbe Bedeutung haben wie unter (1).

4. *Das Gesetz der Magneto-Induktion eines Magneten auf ein Element eines bewegten Leiters.*

Aus der nach dem Grundgesetze des Elektromagnetismus bestimmten *elektromagnetischen Elementarkraft*, welche eine Masse nördlichen oder südlichen magnetischen Fluidums $\pm \mu$ auf ein Stromelement von der Länge α' und von der Stromintensität i' in der Entfernung r ausübt, wenn φ den Winkel bezeichnet, welchen die Richtung, nach welcher die positive Elektricität in α' strömt, mit der Geraden r bildet, nämlich aus der unter (2) angeführten, normal auf die mit r und α' parallelen Ebene wirkenden Kraft

$$\pm \frac{i'\alpha'}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\mu \sin \varphi}{r^2},$$

wird nach dem Grundgesetze der Magneto-Induktion die *elektromotorische Elementarkraft* erhalten, mit welcher dieselbe magnetische Masse die

positive und negative Elektricität in dem inducirten Elemente α', in normaler Richtung auf die mit r und α' parallele Ebene, zu scheiden sucht, wenn das inducirte Element α' hier mit der Geschwindigkeit u, in der nämlichen Richtung bewegt wird, nach welcher dort die positive Elektricität im Elemente α' strömte, durch Multiplikation mit dem konstanten Faktor ku'/i'. Es ist also diese *elektromotorische Elementarkraft*

$$= + \frac{k\alpha' u'}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\mu \sin \varphi}{r^2}.$$

Hierin bezeichnet k einen von u' unabhängigen konstanten Faktor, dessen Werth jedoch bisher durch keine Messung näher bestimmt worden ist.

Bezeichnet man die Winkel, welche im einen Falle die Richtung, nach welcher die positive Elektricität im Elemente α', im anderen Falle die Richtung, nach welcher das inducirte Element α' selbst bewegt wird, mit drei rechtwinkeligen Koordinatenaxen bildet, respektive mit

$$\lambda,\ \mu,\ \nu \text{ und } \beta,\ \gamma,\ \delta,$$

so ist, unter der eben vorausgesetzten Gleichheit genannter Richtungen,

$$\beta = \lambda, \quad \gamma = \mu, \quad \delta = \nu.$$

Es leuchtet auch hier von selbst ein, dass, unter vorausgesetzter Gleichheit der beiden erwähnten Richtungen, die unter (2) angeführten Werthe von X', Y', Z' nur mit dem konstanten Faktor ku'/i' multiplicirt zu werden brauchen, um die Komponenten $\mathfrak{X}'$, $\mathfrak{Y}'$, $\mathfrak{Z}'$ der elektromotorischen Kraft zu erhalten, welche ein *ganzer Magnet* auf das inducirte Element α' ausübt. Es folgt hieraus

$$\mathfrak{X}' = - \frac{ku'}{\sqrt{2}} \cdot \alpha' (C' \cos \gamma - B' \cos \delta),$$

$$\mathfrak{Y}' = - \frac{ku'}{\sqrt{2}} \cdot \alpha' (A' \cos \delta - C' \cos \beta),$$

$$\mathfrak{Z}' = - \frac{ku'}{\sqrt{2}} \cdot \alpha' (B' \cos \beta - A' \cos \gamma),$$

worin A', B', C' dieselbe Bedeutung haben wie unter (2).

Es sollen nun die Relationen zwischen den hier aufgestellten Gesetzen an dem im Anfang erwähnten Erfahrungssatze geprüft werden. Es ergiebt sich nun aus den vorhergehenden Gesetzen, wenn die *elektrodynamischen* Kräfte zu den *elektromagnetischen* in dem Verhältnisse $1 : n$ stehen, d. h. wenn

$$\frac{X'}{X} = \frac{Y'}{Y} = \frac{Z'}{Z} = n$$

ist, oder, indem man für X, Y, Z und X', Y', Z' ihre oben gefundenen Werthe substituirt, wenn

$$\frac{C'\cos\mu - B'\cos\nu}{C\cos\mu - B\cos\nu} = \frac{A'\cos\nu - C'\cos\lambda}{A\cos\nu - C\cos\lambda} = \frac{B'\cos\lambda - A'\cos\mu}{B\cos\lambda - A\cos\mu} = \frac{i}{\sqrt{2}}\cdot n,$$

folglich

$$A' = \frac{i}{\sqrt{2}}\cdot nA, \qquad B' = \frac{i}{\sqrt{2}}\cdot nB, \qquad C' = \frac{i}{\sqrt{2}}\cdot nC$$

ist, folgendes Verhältniss der durch *Volta-Induktion* und durch *Magneto-Induktion* gewonnenen *elektromotorischen* Kraft:

$$\frac{\mathfrak{X}'}{\mathfrak{X}} = \frac{k\sqrt{2}}{ai}\cdot\frac{C'\cos\gamma - B'\cos\delta}{C\cos\gamma - B\cos\delta} = \frac{k}{a}\cdot n,$$

$$\frac{\mathfrak{Y}'}{\mathfrak{Y}} = \frac{k\sqrt{2}}{ai}\cdot\frac{A'\cos\delta - C'\cos\beta}{A\cos\delta - C\cos\beta} = \frac{k}{a}\cdot n,$$

$$\frac{\mathfrak{Z}'}{\mathfrak{Z}} = \frac{k\sqrt{2}}{ai}\cdot\frac{B'\cos\beta - A'\cos\gamma}{B\cos\beta - A\cos\gamma} = \frac{k}{a}\cdot n.$$

Hieraus ergiebt sich endlich folgendes Resultat:

$$\frac{X'}{X} : \frac{\mathfrak{X}'}{\mathfrak{X}} = \frac{Y'}{Y} : \frac{\mathfrak{Y}'}{\mathfrak{Y}} = \frac{Z'}{Z} : \frac{\mathfrak{Z}'}{\mathfrak{Z}} = a : k,$$

was mit dem im Anfang erwähnten Erfahrungssatze übereinstimmt, weil das Verhältniss $a : k$ *konstant* ist. Jener Erfahrungssatz lehrt aber noch mehr als die Vergleichung obiger Gesetze, indem er dieses konstante Verhältniss der *Einheit* gleich macht, wodurch sich der bisher noch durch keine Messung bestimmte konstante Faktor im Grundgesetze der Magneto-Induktion k dem konstanten Faktor a im elektrischen Grundgesetze gleich ergiebt. Das nämliche müsste auch Statt finden, wenn es in den Magneten keine magnetischen Fluida gäbe, sondern alle Wirkungen der Magnete nach Ampère von elektrischen Strömungen in ihnen herrührten.

26.

Vergleichung mit den von Fechner *und* Neumann *aufgestellten Sätzen.*

Fechner ist der erste gewesen, welcher eine *Erklärung* der Faraday'schen Induktionserscheinungen aus den Ampère'schen elektrodynamischen Erscheinungen, die mit einander vorher von Lenz blos durch eine empirische Regel in Beziehung gesetzt waren, durch Entwicklung ihres inneren Zusammenhangs zu geben versucht, und dieselbe in Poggendorff's Annalen 1845, Bd. LXIV, S. 337 veröffentlicht hat. Fechner hat sich dabei auf diejenige Art der *Volta-Induktion* beschränkt, von welcher die vorhergehenden Artikel handeln, nämlich auf die eines ruhenden konstanten Stroms auf einen gegen ihn bewegten Leitungs-

draht. Für diese Art der *Volta-Induktion* ist es Fechnern wirklich gelungen, ihren *inneren Zusammenhang* mit den Ampère'schen elektrodynamischen Erscheinungen zu entdecken, und eine Erklärung derselben auf das für letztere Erscheinungen geltende etwas *verallgemeinerte* Ampère'sche Gesetz zu begründen. — Jener *innere Zusammenhang* besteht wesentlich darin, dass man bei jener Induktion, auch abgesehen von dem durch die Induktion erst erregten Strome, gleichwie bei den Ampère'schen Erscheinungen, mit *Wechselwirkungen elektrischer Ströme* zu thun habe, die Erklärung von beiderlei Erscheinungen folglich auf den Gesetzen dieser Wechselwirkungen beruhen müsse. Die Elektricität in dem inducirten Leitungsdrahte, sagt nämlich Fechner, befinde sich auch in Strömung, sobald dieser Leitungsdraht *fortbewegt* werde, weil sie nämlich an der Bewegung ihres Trägers Theil nehme. Es unterscheiden sich nur die elektrischen Ströme solcher inducirten Leitungsdrähte von den galvanischen Strömen der inducirenden Drähte darin, dass gleiche Massen *positiver* und *negativer* Elektricität gleichzeitig mit gleicher Geschwindigkeit in letzteren nach *entgegengesetzten* Richtungen, in ersteren nach *gleichen* Richtungen bewegt werden. — Die *Verallgemeinerung*, welche Fechner dem Ampère'schen Gesetze gegeben hat, besteht *erstens* darin, dass die nach Ampère auf den ponderablen Träger wirkende Kraft in gleicher Stärke und nach gleicher Richtung ursprünglich auf die im Träger befindlichen elektrischen Massen wirke, und von diesen erst dem Träger mitgetheilt werde; *zweitens* darin, dass das Ampère'sche Gesetz nicht blos für die Totalwirkung eines galvanischen Stroms auf einen anderen gelte, sondern auch für die beiden partiellen Wirkungen, welche der erstere Strom auf die *positive* und auf die *negative* Elektricität des letzteren ausübe.

Diese Erklärung stimmt mit der in den vorigen Artikeln entwickelten Theorie dieser Induktion überein; denn man findet in letzterer das Recht zu der Verallgemeinerung des Ampère'schen Gesetzes begründet, auf welcher jene Erklärung bauet. Es lässt sich dies nachweisen, wenn man die beiden auf die *positive* oder *negative* Elektricität wirkenden Kräfte, wie sie S. 158 angegeben worden sind, besonders betrachtet, wo man findet, dass das Ampère'sche Gesetz nicht blos für alle vier Kräfte, sondern auch für diese oder jene beiden gültig ist.

Uebrigens hat Fechner selbst schon bemerkt, dass der Gesichtspunkt, unter welchem er den Zusammenhang der Faraday'schen Induktionserscheinungen mit den Ampère'schen elektrodynamischen Erscheinungen aufgefasst hat, kein so allgemeiner ist, dass er über alle Faraday'schen Induktionserscheinungen erstreckt werden könnte. Sobald der inducirte Draht *ruhet*, können die Induktionserscheinungen nicht unter diesem Gesichtspunkte gefasst werden, weil dann von keiner Be-

wegung der Elektricität im inducirten Drahte die Rede sein kann. Fechner sagt hierüber a. a. O. S. 341: „Anstatt bei den Induktionsversuchen den (neutralen) Draht $a'b'$ nach dem ruhenden (erregten) Draht ab hin zu bewegen, könnte man umgekehrt verfahren, und die Induktion würde immer noch bestehen. Dies muss als ein *Erfahrungsdatum* zum Beweise angenommen werden, dass es hierbei blos auf die Relation der Bewegungen ankommt, und dass es erlaubt ist, für Bewegung des erregten Drahts und Ruhe des neutralen Drahts das Umgekehrte zu substituiren, um das Princip in der angegebenen Form anwenden zu können".

Neumann hat die empirische Regel, durch welche Lenz die Faraday'schen Induktionserscheinungen mit den Ampère'schen elektrodynamischen Erscheinungen in Beziehung gesetzt hat, seiner Untersuchung zum Grunde gelegt, und hat eine Ergänzung derselben in dem Satze gefunden, dass die Stärke der Induktion proportional mit der Geschwindigkeit der Bewegung des inducirten Leiters sei, wenn die Induktion durch eine Bewegung des letzteren hervorgebracht werde. Diese beiden empirischen Regeln ergänzen einander so, dass Neumann daraus die *Allgemeinen Gesetze der inducirten Ströme* hat ableiten können, indem die daraus zunächst für den Fall hervorgehenden Gesetze, wo die Induktion durch eine Bewegung des inducirten Leiters hervorgebracht wird, von der Art sind, dass die unmittelbar, ohne eine Modifikation zu erleiden, in weiterem Kreise Anwendung finden und auf alle Arten der Induktion ausgedehnt werden können. Diese von Neumann aufgestellten *Allgemeinen Gesetze der inducirten Ströme* dürften in Betracht sowohl ihres inneren Zusammenhangs unter einander, als auch der mit ihnen verflochtenen empirischen Regeln kaum einem Zweifel unterliegen, und es ist darum interessant, die Resultate der oben entwickelten Theorie mit diesen auf ganz anderen Wegen von Neumann abgeleiteten Gesetzen zu vergleichen.

Da Neumann's der k. Akademie der Wissenschaften in Berlin übergebene Abhandlung noch nicht gedruckt ist, kann ich mich nur auf den so eben in Poggendorff's Annalen, im ersten Hefte dieses Jahres, erschienenen Auszug berufen, aus dem ich folgende Stelle anführe:

„§ 1. Aus dem Lenz'schen Satze: dass die Wirkung, welche der inducirende Strom oder Magnet auf den inducirten Leiter ausübt, immer, wenn die Induktion durch eine Bewegung des letzteren hervorgebracht ist, einen hemmenden Einfluss auf diese Bewegung ausübt, in Verbindung mit dem Satze: dass die Stärke der momentanen Induktion proportional mit der Geschwindigkeit dieser Bewegung ist, wird das allgemeine Gesetz der linearen Induktion abgeleitet:

$$E\mathrm{d}s = -\varepsilon v C \mathrm{d}s.$$

Hierin bedeutet ds ein Element des inducirten Drahts, und Eds die in dem Elemente ds inducirte elektromotorische Kraft; v ist die Geschwindigkeit, mit welcher ds bewegt ist, C die nach der Richtung, in welcher ds bewegt wird, zerlegte Wirkung des Inducenten auf ds, dieses Element durchströmt gedacht von der Einheit des Stroms. Die Grösse ε, unabhängig von der Beschaffenheit des inducirten Leiters, kann bei der linearen Induktion als eine Konstante behandelt werden, ist aber eine solche Funktion der Zeit, die sehr rasch abnimmt, wenn ihr Argument einen merklichen Werth hat, und muss als solche bei der Flächeninduktion und der Induktion in Körpern behandelt werden."

Aus der oben entwickelten Theorie hat sich am Schlusse des 24. Artikels folgender Ausdruck für die in dem Elemente α' inducirte *elektromotorische* Kraft ergeben, worin u' die Geschwindigkeit bezeichnet, mit welcher α' bewegt wird:

$$-\frac{\alpha\alpha'}{r^2}\, i\,(\cos\varepsilon - \tfrac{3}{2}\cos\vartheta\cos\vartheta')\,.\, au'\cos\varphi.$$

Dieser Ausdruck war der nach der Richtung des Elements α' zerlegte Werth der ganzen von dem Inducenten α nach der Richtung der verbindenden Geraden r ausgeübten scheidenden Kraft, aus dem durch Weglassung des Faktors $\cos\varphi$ die ganze Kraft wieder erhalten wird. Diese ganze Kraft nun ist im 25. Artikel unter (3) mit der durch Ampère's Gesetz bestimmten *elektrodynamischen* Kraft verglichen worden, welche der Inducent α auf das Element α' ausüben würde, wenn α' der Richtung parallel wäre, nach welcher das Element α' zum Zwecke der Induktion bewegt wurde, und in dieser Richtung von einem Strome durchflossen würde, dessen Intensität $= i'$ wäre. Man erhält nämlich jene ganze nach der Richtung der verbindenden Geraden r ausgeübte *elektromotorische* Kraft durch Multiplikation dieser *elektrodynamischen* Kraft mit dem Faktor au'/i'. Obigen Ausdruck selbst erhält man durch Multiplikation derselben, *nach der Richtung des inducirten Elements α' zerlegten, elektrodynamischen* Kraft mit dem Faktor au'/i'. Bezeichnet man also diese, nach Richtung des inducirten Elements α' zerlegte, elektrodynamische Kraft mit

$$i'\alpha'\,.\,D,$$

so ist obiger Ausdruck

$$= -\,au'D\alpha'$$

zu setzen. Hierin ist für u' und α' nach der Neumann'schen Bezeichnung v und ds zu schreiben; folglich giebt die oben entwickelte Theorie nach dieser Bezeichnung die Gleichung:

$$E\mathrm{d}s = -\,avD\mathrm{d}s,$$

worin a einen von der Beschaffenheit des inducirten Leiters unabhängigen konstanten Faktor bezeichnet, ebenso wie ε in der NEUMANN'schen Gleichung, weil hier von linearer Induktion gehandelt wird. Beide Gleichungen stimmen also mit einander bis auf die Faktoren C und D überein. Auch haben diese Faktoren das mit einander gemein, dass sie, mit $\mathrm{d}s$ multiplicirt, die nach einer bestimmten Richtung zerlegte *elektrodynamische* Kraft ausdrücken, welche der Inducent auf ein an der inducirten Stelle befindliches von der Einheit des Stroms durchflossen gedachtes Element $\mathrm{d}s$ ausüben würde. Doch unterscheiden sich beide Faktoren von einander 1. durch die Richtung, welche dem an der inducirten Stelle gedachten Elemente $\mathrm{d}s$ zu geben sei, 2. durch die Richtung, nach welcher die auf dieses Element geübte elektrodynamische Kraft zerlegt werden soll. Es sind nämlich diese beiden Richtungen in dem NEUMANN'schen Gesetze *vertauscht*.

Das NEUMANN'sche Gesetz würde, wie man hieraus sieht, dem unsrigen *widersprechen*, wenn man es auf ein einzelnes Stromelement als Inducenten anwenden wollte, weil die Faktoren C und D dann ganz verschiedene Werthe haben. Es leuchtet aber ein, dass das NEUMANN'sche Gesetz seiner Herleitung gemäss zunächst nicht für jedes einzelne inducirende Stromelement, sondern nur für einen geschlossenen Strom oder für einen Magneten als Inducenten gelte, weil nämlich der LENZ'sche Satz, aus dem es hergeleitet worden ist, blos für geschlossene Ströme und Magnete als experimentell begründet gelten kann. Jener *scheinbare Widerspruch* löst sich nun von selbst, sobald man die Anwendung des NEUMANN'schen Gesetzes auf geschlossene, durch Magnete ersetzbare, Ströme als Inducenten beschränkt, wo sich dann die Identität der Faktoren C und D auf folgende Weise beweisen lässt.

Nach AMPÈRE sind die drei Komponenten X, Y, Z derjenigen Kraft, welche ein geschlossener Strom von der Intensität i, für welchen durch die Koordinaten x, y, z die Lage der Elemente bestimmt ist, auf irgend ein anderes Stromelement $\mathrm{d}s'$ von der Stromintensität i' ausübt, dessen Richtung mit den Koordinatenaxen die Winkel λ, μ, ν macht, wenn der Anfangspunkt der Koordinaten in der Mitte des Elements $\mathrm{d}s'$ liegt,

$$X = -\tfrac{1}{2}\, ii'\, \mathrm{d}s' \left(\cos\mu \cdot \int \frac{x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x}{r^3} - \cos\nu \cdot \int \frac{z\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}z}{r^3} \right)$$

$$Y = -\tfrac{1}{2}\, ii'\, \mathrm{d}s' \left(\cos\nu \cdot \int \frac{y\,\mathrm{d}z - z\,\mathrm{d}y}{r^3} - \cos\lambda \cdot \int \frac{x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x}{r^3} \right)$$

$$Z = -\tfrac{1}{2}\, ii'\, \mathrm{d}s' \left(\cos\lambda \cdot \int \frac{z\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}z}{r^3} - \cos\mu \cdot \int \frac{y\,\mathrm{d}z - z\,\mathrm{d}y}{r^3} \right).$$

Hieraus lassen sich nun die Werthe der Faktoren C und D für geschlossene Ströme als Inducenten ableiten.

Denn *erstens* den Faktor C in dem NEUMANN'schen Gesetze erhält man, wenn man mit X_1, Y_1, Z_1 die Werthe bezeichnet, welche X, Y, Z annehmen, wenn man $i' = 1$, und für λ, μ, ν die Winkel setzt, welche das inducirte Element mit den Koordinatenaxen bildet. Sind nämlich α, β, γ die Winkel, welche die Richtung, nach welcher das inducirte Element bewegt wird, mit den drei Koordinatenaxen bildet, so ist

$$C\mathrm{d}s' = X_1 \cos\alpha + Y_1 \cos\beta + Z_1 \cos\gamma.$$

Dieser Ausdruck vereinfacht sich, wenn man ein solches Koordinatensystem wählt, in welchem die Richtung der Axe der x mit der Richtung zusammenfällt, *nach welcher das inducirte Element bewegt wird.* Es ist dann nämlich

$$\cos\alpha = 1, \quad \cos\beta = 0, \quad \cos\gamma = 0,$$

folglich

$$C\mathrm{d}s' = X_1 = -\tfrac{1}{2}\, i\,\mathrm{d}s'\left(\cos\mu\int\frac{x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x}{r^3} - \cos\nu\int\frac{z\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}z}{r^3}\right).$$

Zweitens den Faktor D erhält man, wenn man mit X', Y', Z' die Werthe bezeichnet, welche X, Y, Z annehmen, wenn man $i' = 1$ und $\lambda = \alpha'$, $\mu = \beta'$, $\nu = \gamma'$ setzt, wo α', β', γ' die Winkel sind, welche die Richtung, nach welcher das inducirte Element bewegt wird, mit den drei Koordinatenaxen bildet (die also mit α, β, γ identisch wären, wenn das nämliche Koordinatensystem gewählt würde). Sind nämlich nach dem jetzigen Koordinatensysteme λ', μ', ν' die Winkel, welche das inducirte Element mit den drei Koordinatenaxen bildet (die also mit λ, μ, ν identisch wären, wenn das jetzige Koordinatensystem dem früheren gleich wäre), so ist:

$$D\mathrm{d}s' = X'\cos\lambda' + Y'\cos\mu' + Z'\cos\nu'.$$

Dieser Ausdruck vereinfacht sich, wenn man ein anderes Koordinatensystem wie früher wählt, nämlich ein solches, in welchem die Richtung der Axe der x mit der Richtung *des inducirten Elements selbst* zusammenfällt, weil dann

$$\cos\lambda' = 1, \quad \cos\mu' = 0, \quad \cos\nu' = 0$$

ist, folglich:

$$D\mathrm{d}s' = X' = -\tfrac{1}{2}\, i\,\mathrm{d}s'\left(\cos\beta'\int\frac{x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x}{r^3} - \cos\gamma'\int\frac{z\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}z}{r^3}\right).$$

Nun können die beiden Koordinatensysteme, nämlich dasjenige, in welchem die Axe der x der Richtung parallel ist, *nach welcher das inducirte Element bewegt wird*, und dasjenige, in welchem die Axe der x der Richtung *des inducirten Elements selbst* parallel ist, die Axe der y gemein haben, wenn dieselbe auf beiden Richtungen, des inducirten Elements und seiner Bewegung, normal ist. Dies vorausgesetzt wird

$$\cos\mu = 0, \quad \cos\beta' = 0, \quad \cos\nu = \cos\gamma',$$

und da man ausserdem beweisen kann, dass

$$\int \frac{z\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}z}{r^3}$$

nach beiden Koordinatensystemen gleichen Werth habe, so ergiebt sich

$$C = D,$$

was zu beweisen war. Dass $z\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}z$ nach allen rechtwinkeligen Koordinatensystemen, denen, wie den beiden obigen, der Anfangspunkt und die Axe der y gemein ist, gleichen Werth habe, leuchtet daraus ein, dass $\frac{1}{2}\,(z\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}z)$ den auf eine gegen die gemeinsame Axe y normale Ebene projicirten Flächenraum desjenigen Dreiecks darstellt, welches von dem gemeinsamen Koordinaten-Anfangspunkt und von dem betrachteten Stromelemente gebildet wird. Die Gerade r, welche das betrachtete Stromelement mit dem inducirten Elemente verbindet, hat einen von dem gewählten Koordinatensysteme ganz unabhängigen Werth. Hieraus ergiebt sich der Werth des Quotienten $z\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}z/r^3$ für die beiden oben angenommenen Koordinatensysteme überall gleich, folglich auch der Werth des auf den ganzen geschlossenen Strom zu erstreckenden Integrals $\int \frac{z\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}z}{r^3}$.

Es geht hieraus hervor, dass das Neumann'sche Gesetz für den Kreis der Erscheinungen, auf den es sich seiner Herleitung nach bezieht, wo nämlich alle Inducenten entweder Magnete oder geschlossene Ströme sind, mit dem aus der oben entwickelten Theorie abgeleiteten Gesetze zusammenfalle, dass aber die Anwendung des Neumann'schen Gesetzes ausser jenem Kreise auf ungeschlossene Ströme als Inducenten nicht gestattet sei.

27.

Gesetz der Stromerregung in einem ruhenden Leiter, wenn ein konstantes Stromelement ihm genähert oder von ihm entfernt wird.

Das Gesetz der *Volta-Induktion* für diesen Fall, wo der inducirte Leiter ruhet, und das inducirende Stromelement bewegt wird, lässt sich

eben so wie für den ersten Fall aus dem aufgestellten elektrischen Grundgesetze ableiten. Es ist aber nicht nöthig, diese Ableitung zu geben, weil eine einfache Betrachtung lehrt, dass sie für den zweiten Fall wieder zu demselben Gesetze wie für den ersten führen müsse.

Das elektrische Grundgesetz, aus welchem alle Gesetze der *Volta-Induktion* abgeleitet werden sollen, macht nämlich die Wirkung einer elektrischen Masse auf eine andere blos von ihrer *relativen* Entfernung, Geschwindigkeit und Beschleunigung abhängig. Diese bleiben aber durch eine beiden Massen beigelegte *gemeinschaftliche* Bewegung unverändert; folglich wird auch durch eine solche *gemeinschaftliche* Bewegung die Wirkung einer elektrischen Masse auf eine andere nicht verändert. Man kann daher allen elektrischen Massen ohne Aenderung ihrer Wirkungen, folglich auch ohne Aenderung der von ihnen abhängigen Induktion, eine solche *gemeinschaftliche* Bewegung beilegen. Hat man also ein inducirendes Stromelement α, welches mit der *absoluten* Geschwindigkeit u' nach irgend einer Richtung bewegt wird, während das inducirte Element α' in *absoluter* Ruhe ist, so kann man, ohne die Induktion zu ändern, beiden Elementen nebst den in ihnen enthaltenen elektrischen Massen noch eine *gemeinschaftliche* Bewegung von der Geschwindigkeit u' nach derjenigen Richtung beilegen, welche der Richtung gerade entgegengesetzt ist, nach welcher das Stromelement α sich wirklich bewegt. Durch Hinzufügen dieser gemeinschaftlichen Bewegung wird das inducirende Element α zur Ruhe gebracht, während nun das inducirte Element α' sich mit gleicher Geschwindigkeit, aber in entgegengesetzter Richtung bewegt, als in der Wirklichkeit das Stromelement. Es muss sich also aus dem aufgestellten Grundgesetze für gleiche *relative* Bewegung der beiden Elemente die nämliche Induktion ergeben, unabhängig davon, ob bei dieser relativen Bewegung das eine oder das andere oder keines von beiden Elementen in *absoluter* Ruhe sich befinde. Mit diesem Resultate stimmt bekanntlich auch die Erfahrung überein.

28.

Gesetz der Stromerregung in einem Leiter durch Aenderung der Stromintensität in einem benachbarten Leiter.

Bezeichnet α und α' die Länge des inducirenden und des inducirten Elements, so sind in beiden Elementen wieder vier elektrische Massen zu unterscheiden:

$$+\alpha e, \quad -\alpha e, \quad +\alpha' e', \quad -\alpha' e'.$$

Die *erste* dieser Massen $+\alpha e$ bewege sich mit der *veränderlichen* Geschwindigkeit u in der Richtung des ruhenden Elements α, welche mit

der von a nach a' gezogenen Geraden den Winkel ϑ macht, $\mathrm{d}u$ bezeichne die Aenderung von u während des Zeitelements $\mathrm{d}t$; die *zweite* $-ae$ bewege sich, den Bestimmungen eines galvanischen Stroms gemäss, in der nämlichen Richtung mit der Geschwindigkeit $-u$, d. h. rückwärts, und $-\mathrm{d}u$ bezeichne die Aenderung dieser Geschwindigkeit während des Zeitelements $\mathrm{d}t$; die *dritte* $+a'e'$ bewege sich mit der konstanten Geschwindigkeit $+u'$ in der Richtung des ruhenden Elements a', welche mit der von a nach a' gezogenen und verlängerten Geraden den Winkel ϑ' macht; die *vierte* $-a'e'$ bewege sich endlich, wiederum den Bestimmungen eines galvanischen Stroms gemäss, in der nämlichen Richtung mit der Geschwindigkeit $-u'$, d. h. rückwärts. Die Entfernungen der beiden ersteren Massen von den beiden letzteren sind sämmtlich in dem betrachteten Augenblicke der Entfernung r der beiden Elemente a und a' selbst gleich; da sie aber nicht gleich bleiben, sollen sie mit r_1, r_2, r_3, r_4 bezeichnet werden.

Man erhält dann für die *Summe* der Kräfte, welche auf die *positive* und *negative* Elektricität im Elemente a' wirken, d. i. für die Kraft, welche das Element a' selbst bewegt, denselben Ausdruck wie Art. 24, nämlich:

$$-\frac{a^2}{16}\cdot\frac{ae.a'e'}{r^2}\left\{\left(\frac{\mathrm{d}r_1^2}{\mathrm{d}t^2}+\frac{\mathrm{d}r_2^2}{\mathrm{d}t^2}-\frac{\mathrm{d}r_3^2}{\mathrm{d}t^2}-\frac{\mathrm{d}r_4^2}{\mathrm{d}t^2}\right)-2r\left(\frac{\mathrm{d}^2r_1}{\mathrm{d}t^2}+\frac{\mathrm{d}^2r_2}{\mathrm{d}t^2}-\frac{\mathrm{d}^2r_3}{\mathrm{d}t^2}-\frac{\mathrm{d}^2r_4}{\mathrm{d}t^2}\right)\right\}.$$

Für die *Differenz* jener Kräfte aber, von welcher die Induktion abhängt,

$$-\frac{a^2}{16}\cdot\frac{ae.a'e'}{r^2}\left\{\left(\frac{\mathrm{d}r_1^2}{\mathrm{d}t^2}-\frac{\mathrm{d}r_2^2}{\mathrm{d}t^2}+\frac{\mathrm{d}r_3^2}{\mathrm{d}t^2}-\frac{\mathrm{d}r_4^2}{\mathrm{d}t^2}\right)-2r\left(\frac{\mathrm{d}^2r_1}{\mathrm{d}t^2}-\frac{\mathrm{d}^2r_2}{\mathrm{d}t^2}+\frac{\mathrm{d}^2r_3}{\mathrm{d}t^2}-\frac{\mathrm{d}^2r_4}{\mathrm{d}t^2}\right)\right\}.$$

Ferner gelten hierin für die ersten Differentialkoefficienten die nämlichen Werthe, welche Art. 22 gefunden wurden, nämlich:

$$\frac{\mathrm{d}r_1}{\mathrm{d}t}=-\frac{\mathrm{d}r_2}{\mathrm{d}t}=-u\cos\vartheta+u'\cos\vartheta',$$

$$\frac{\mathrm{d}r_3}{\mathrm{d}t}=-\frac{\mathrm{d}r_4}{\mathrm{d}t}=-u\cos\vartheta-u'\cos\vartheta'.$$

Es ist also $\left(\frac{\mathrm{d}r_1^2}{\mathrm{d}t^2}+\frac{\mathrm{d}r_2^2}{\mathrm{d}t^2}-\frac{\mathrm{d}r_3^2}{\mathrm{d}t^2}-\frac{\mathrm{d}r_4^2}{\mathrm{d}t^2}\right)=-8uu'\cos\vartheta\cos\vartheta'$,

$$\left(\frac{\mathrm{d}r_1^2}{\mathrm{d}t^2}-\frac{\mathrm{d}r_2^2}{\mathrm{d}t^2}+\frac{\mathrm{d}r_3^2}{\mathrm{d}t^2}-\frac{\mathrm{d}r_4^2}{\mathrm{d}t^2}\right)=0.$$

Da die Geschwindigkeit u jetzt aber veränderlich ist, so ergeben sich für die zweiten Differentialkoefficienten andere Werthe als Art. 22, wo sie konstant war, nämlich:

$$\frac{d^2 r_1}{dt^2} = + u \sin\vartheta \cdot \frac{d\vartheta_1}{dt} - u' \sin\vartheta' \cdot \frac{d\vartheta'_1}{dt} - \cos\vartheta \cdot \frac{du}{dt},$$

$$\frac{d^2 r_2}{dt^2} = - u \sin\vartheta \cdot \frac{d\vartheta_2}{dt} + u' \sin\vartheta' \cdot \frac{d\vartheta'_2}{dt} + \cos\vartheta \cdot \frac{du}{dt},$$

$$\frac{d^2 r_3}{dt^2} = + u \sin\vartheta \cdot \frac{d\vartheta_3}{dt} + u' \sin\vartheta' \cdot \frac{d\vartheta'_3}{dt} - \cos\vartheta \cdot \frac{du}{dt},$$

$$\frac{d^2 r_4}{dt^2} = - u \sin\vartheta \cdot \frac{d\vartheta_4}{dt} - u' \sin\vartheta' \cdot \frac{d\vartheta'_4}{dt} + \cos\vartheta \cdot \frac{du}{dt}.$$

Es ergiebt sich also für

$$\left(\frac{d^2 r_1}{dt^2} + \frac{d^2 r_2}{dt^2} - \frac{d^2 r_3}{dt^2} - \frac{d^2 r_4}{dt^2}\right) = + u \sin\vartheta \left(\frac{d\vartheta_1}{dt} - \frac{d\vartheta_2}{dt} - \frac{d\vartheta_3}{dt} + \frac{d\vartheta_4}{dt}\right)$$
$$- u' \sin\vartheta' \left(\frac{d\vartheta'_1}{dt} - \frac{d\vartheta'_2}{dt} + \frac{d\vartheta'_3}{dt} - \frac{d\vartheta'_4}{dt}\right)$$

derselben Werth wie Art. 22, nämlich, wenn man die dort S. 162 entwickelten Werthe von $d\vartheta_1/dt$, $d\vartheta'_1/dt$ u. s. w. substituirt,

$$r\left(\frac{d^2 r_1}{dt^2} + \frac{d^2 r_2}{dt^2} - \frac{d^2 r_3}{dt^2} - \frac{d^2 r_4}{dt^2}\right) = - 8 u u' \sin\vartheta \sin\vartheta' \cos\omega.$$

Dagegen ist

$$\left(\frac{d^2 r_1}{dt^2} - \frac{d^2 r_2}{dt^2} + \frac{d^2 r_3}{dt^2} - \frac{d^2 r_4}{dt^2}\right) = + u \sin\vartheta \left(\frac{d\vartheta_1}{dt} + \frac{d\vartheta_2}{dt} + \frac{d\vartheta_3}{dt} + \frac{d\vartheta_4}{dt}\right)$$
$$- u' \sin\vartheta' \left(\frac{d\vartheta'_1}{dt} + \frac{d\vartheta'_2}{dt} - \frac{d\vartheta'_3}{dt} - \frac{d\vartheta'_4}{dt}\right)$$
$$- 4 \cos\vartheta \cdot \frac{du}{dt}.$$

Da aber nach S. 162 die Werthe

$$\frac{d\vartheta_1}{dt} + \frac{d\vartheta_2}{dt} = \frac{d\vartheta_3}{dt} + \frac{d\vartheta_4}{dt} = \frac{d\vartheta'_1}{dt} + \frac{d\vartheta'_2}{dt} = \frac{d\vartheta'_3}{dt} + \frac{d\vartheta'_4}{dt} = 0$$

sind, so ist

$$\left(\frac{d^2 r_1}{dt^2} - \frac{d^2 r_2}{dt^2} + \frac{d^2 r_3}{dt^2} - \frac{d^2 r_4}{dt^2}\right) = - 4 \cos\vartheta \cdot \frac{du}{dt}.$$

Substituirt man diese Werthe, so erhält man die *Summe* der Kräfte, welche auf die *positive* und *negative* Elektricität im Elemente α' wirken, wie Art. 22

$$= - \frac{\alpha\alpha'}{r^2} \cdot a e u \,.\, a' e' u' \left(\sin\vartheta \sin\vartheta' \cos\omega - \tfrac{1}{2} \cos\vartheta \cos\vartheta'\right),$$

d. h. die auf das Element α' wirkende Kraft wird bei veränderlicher Stromintensität eben so wie bei unveränderlicher bestimmt, und das Ampère'sche Gesetz findet in dieser Beziehung auch bei veränderlichen Strömen Anwendung.

Die *Differenz* jener beiden auf die *positive* und *negative* Elektricität im Elemente a' wirkenden Kräfte, von welcher die *Induktion* abhängt, ergiebt sich dagegen

$$= -\frac{1}{2}\frac{aa'}{r} \cdot a^2ee' \cdot \cos\vartheta \cdot \frac{du}{dt},$$

oder, da nach S. 152 $aeu = i$, folglich, weil u veränderlich, $ae \,.\, du = di$ ist,

$$= -\frac{1}{2}\frac{aa'}{r} \cdot ae' \cdot \cos\vartheta \cdot \frac{di}{dt}.$$

Die hierdurch bestimmte Kraft sucht nun die *positive* und *negative* Elektricität im inducirten Elemente a' nach der Richtung der Geraden r zu scheiden. In dieser Richtung kann die Scheidung nicht erfolgen, sondern nur in der Richtung des inducirten Elements a' selbst, die mit der verlängerten Geraden r den Winkel ϑ' einschliesst. Zerlegt man also jene ganze Kraft, welche die beiden Elektricitäten in a' zu scheiden sucht, nach dieser Richtung, d. h. multiplicirt man obige *Differenz* mit $\cos\vartheta'$, so erhält man die Kraft, welche die wirkliche Scheidung bewirkt,

$$= -\frac{1}{2}\frac{aa'}{r} \cdot ae' \cdot \cos\vartheta\cos\vartheta' \cdot \frac{di}{dt}.$$

Dividirt man diesen Werth noch mit e', so ergiebt sich die vom inducirenden Elemente a auf das inducirte Element a' ausgeübte *elektromotorische* Kraft in dem gewöhnlichen Sinne (siehe Art. 24, S. 170)

$$= -\frac{a}{2} \cdot \frac{aa'}{r} \cdot \cos\vartheta\cos\vartheta' \cdot \frac{di}{dt}.$$

Die *Induktion* während des Zeitelements dt, d. h. das Produkt dieses Zeitelements in die wirkende elektromotorische Kraft, ist also

$$= -\frac{a}{2} \cdot \frac{aa'}{r} \cdot \cos\vartheta\cos\vartheta' \cdot di,$$

folglich die *Induktion* für irgend einen Zeitraum, in welchem die Intensität des inducirenden Stroms um i zunimmt, während r, ϑ und ϑ' unverändert bleiben,

$$= -\frac{a}{2} \cdot \frac{aa'}{r}\, i\cos\vartheta\cos\vartheta'.$$

Der *positive* Werth dieses Ausdrucks bezeichnet einen im Elemente a' inducirten Strom nach der Richtung von a', welche mit der verlängerten Geraden r den Winkel ϑ' macht, der *negative* Werth einen inducirten Strom von entgegengesetzter Richtung.

Wenn die beiden Elemente a und a' einander parallel sind, und $\vartheta = \vartheta'$, so hat obiger Ausdruck für *wachsende* Stromintensität, oder für einen positiven Werth von i, einen *negativen* Werth, d. h. bei wachsender Stromintensität in a wird in a' ein Strom in entgegengesetzter Richtung

erregt, als der inducirende Strom ist. Das Umgekehrte findet bei abnehmender Stromintensität Statt. Beide Resultate stimmen mit bekannten Thatsachen überein. Auch die Proportionalität der Induktion mit der Intensitätsänderung i des inducirenden Stroms entspricht der Erfahrung, so weit Schätzung ohne genaue Messung reicht.

29.

Vergleichung der Induktionswirkungen konstanter Ströme auf bewegte Leiter mit denen variabler Ströme auf ruhende Leiter.

Es sind in den vorhergehenden Artikeln aus dem elektrischen Grundgesetze die Gesetze der *Volta-Induktion*, übereinstimmend mit der Erfahrung, nicht allein für den Fall abgeleitet worden, wo dieselbe durch *konstante* Ströme in *bewegten* Leitern, sondern auch für den Fall, wo dieselbe durch *variable* Ströme in *ruhenden* Leitern hervorgebracht wird. Die *Induktionsgesetze* für diese beiden Fälle sind sehr verschieden, und es ist darum sehr interessant, dass sich daraus dennoch sehr einfache Relationen zwischen den Wirkungen beider Induktionen ergeben.

Eine solche einfache Relation zwischen der Induktionswirkung *konstanter* Ströme auf *bewegte* Leiter und der Induktionswirkung *variabler* Ströme auf *ruhende* Leiter ergiebt sich aus den Art. 24 und 28 entwickelten Gesetzen selbst schon für einzelne inducirende und inducirte *Elemente*, wenn die Bewegung des inducirten Elements im ersteren Falle nach der Richtung der Geraden r geschieht. Denn berechnet man unter dieser Voraussetzung die gesammte Induktionswirkung, welche ein Stromelement von der *konstanten* Intensität i hervorbringt, während das inducirte Element aus einer gegebenen Lage parallel mit sich selbst nach der Richtung der Geraden r unendlich weit entfernt wird, oder aus unendlicher Entfernung bis zu jener Lage genähert wird, so findet man, dass diese gesammte Induktionswirkung derjenigen gleich ist, welche das inducirende Element, wenn seine Stromintensität um i abnähme oder zunähme, auf das inducirte Element hervorbringen würde, wenn es in der gegebenen Lage beharrte. Es ergiebt sich also, zunächst für diesen speciellen Fall, die Regel, *dass durch Entstehen oder Verschwinden eines Stroms in der Nähe eines Leiters in diesem Leiter derselbe Strom inducirt werde, wie wenn jener Strom gleichförmig fortgedauert hätte, aber entweder aus grosser Entfernung in jene Nähe des Leiters, oder umgekehrt aus jener Nähe in grosse Entfernung versetzt worden wäre.*

Für den angeführten speciellen Fall ergiebt sich dieser Satz leicht, wie folgt. Der am Ende des 24. Artikels gefundene Ausdruck der elektromotorischen Kraft ist mit dem Zeitelemente dt zu multipliciren, um die diesem Zeitelemente dt, oder dem in demselben durchlaufenen

Wegelemente $u'dt$, entsprechende *Induktionswirkung* zu erhalten. Der Werth des Integrals von diesem Produkte zwischen bestimmten Zeit- oder Wegegrenzen giebt dann die gesammte der Zwischenzeit oder dem in derselben durchlaufenen Wege entsprechende *Induktionswirkung*

$$= - ai \int \frac{aa'}{r^2} (\cos \varepsilon - \tfrac{3}{2} \cos \vartheta \cos \vartheta') \cos \varphi \,.\, u' dt.$$

In unserem Falle, wo die Bewegung in der Geraden r geschieht, ist nun

$$u'dt = dr, \text{ und } \cos \vartheta' = 1.$$

Nach Art. 24 ist $\cos \varepsilon = \sin \vartheta \sin \vartheta' \cos \omega + \cos \vartheta \cos \vartheta'$, also hier:

$$\cos \varepsilon = \cos \vartheta.$$

Da endlich die Winkel ϑ und φ bei der Bewegung des mit sich stets parallelen Elements a' in der Richtung der Geraden r konstante Werthe haben, so ist jene *Induktionswirkung*

$$= + \frac{ai}{2} \cdot aa' \cos \vartheta \cos \varphi \cdot \int \frac{dr}{r^2}.$$

Der Werth dieses Integrals zwischen den Grenzen $r = r$ bis $r = \infty$, d. h. die *Induktionswirkung*, während das inducirte Element aus einer gegebenen Lage unendlich weit *entfernt* wird, ist

$$= + \frac{ai}{2} \frac{aa'}{r} \cos \vartheta \cos \varphi;$$

zwischen den Grenzen $r = \infty$ bis $r = r$, d. h. die *Induktionswirkung*, während das inducirte Element aus unendlicher Ferne bis zu einer gegebenen Lage *genähert* wird, ist dagegen

$$= - \frac{ai}{2} \frac{aa'}{r} \cos \vartheta \cos \varphi.$$

Beachtet man, dass φ hierin nach Art. 24 denselben Winkel bezeichnet, welchen ϑ' Art. 28, nämlich den Winkel, welchen das inducirte Element a' mit der verlängerten Geraden r macht, so sieht man, dass die gefundene Induktionswirkung derjenigen gleich ist, welche nach dem Art. 28 gegebenen Gesetze erhalten wird, wenn das inducirte Element a' in der gegebenen Lage beharrt und die Stromintensität i in dem inducirenden Elemente a verschwindet oder entsteht.

Die gefundene Relation beider Induktionswirkungen lässt sich allgemeiner aussprechen, zwar nicht für einzelne Elemente, aber für *geschlossene Ströme und Leiter.* Es möge zunächst der Fall betrachtet werden, wo alle Elemente des inducirten geschlossenen Leiters gleich und parallel bewegt werden.

Die *Induktionswirkung* des Stromelements a auf das inducirte Element a' ist wie vorher

$$= - ai \int \frac{aa'}{r^2} (\cos \varepsilon - \tfrac{3}{2} \cos \vartheta \cos \vartheta') \cos \varphi \,.\, u' \mathrm{d}t.$$

Bezeichnet man nun mit β und β' die Winkel, welche die beiden Elemente a und a' mit der von der Geraden r bei der Bewegung des Elements a' erzeugten Ebene machen, ferner mit γ und γ' die Winkel, welche die Projectionen von a und a' auf jene Ebene mit der Richtung der Bewegung machen, so ist

$$\begin{aligned}\cos \vartheta &= \cos \beta \, \cos (\vartheta' - \gamma),\\ \cos \varphi &= \cos \beta' \cos (\vartheta' - \gamma'),\\ \cos \varepsilon &= \cos \beta \, \cos \gamma.\end{aligned}$$

Die Projektion des Wegelements $u'\mathrm{d}t$ auf die Gerade r giebt den Werth von $\mathrm{d}r$ für das Zeitelement $\mathrm{d}t$,

$$\mathrm{d}r = u'\mathrm{d}t \,.\, \cos \vartheta' \quad \text{oder} \quad u'\mathrm{d}t = \sec \vartheta' \,.\, \mathrm{d}r.$$

Substituirt man diese Werthe, so wird die *Induktionswirkung* von a auf a'

$$= - \int aiaa' \cos \beta \, \cos \beta' \, (\cos \gamma \, \sec \vartheta' - \tfrac{3}{2} \cos (\vartheta' - \gamma)) \cos (\vartheta' - \gamma') \cdot \frac{\mathrm{d}r}{r^2},$$

oder, wenn $\cos (\vartheta' - \gamma)$ und $\cos (\vartheta' - \gamma')$ entwickelt werden,

$$= + \frac{ai}{2} \int aa' \cos \beta \cos \beta' \,.\, \mathrm{d}R,$$

worin Kürze halber mit $\mathrm{d}R$ folgender Ausdruck bezeichnet ist:

$$(\cos \gamma \cos \gamma' - 2 \cos \gamma \sin \gamma' \operatorname{tang} \vartheta' - 3 \cos (\gamma + \gamma') \sin \vartheta'^2 \\ + 3 \sin (\gamma + \gamma') \sin \vartheta' \cos \vartheta') \cdot \frac{\mathrm{d}r}{r^2}.$$

Beachtet man, dass bei der gleichen und parallelen Bewegung aller Elemente jedes derselben *parallel mit sich selbst* verschoben wird, folglich die Winkel β, β', γ, γ' konstant sind, und setzt man

$$\sin \vartheta' = \frac{b}{r}, \quad \cos \vartheta' = \frac{\sqrt{r^2 - b^2}}{r}, \quad \operatorname{tang} \vartheta' = \frac{b}{\sqrt{r^2 - b^2}},$$

worin b das Perpendikel von a auf die Bahn des inducirten Elements a' bezeichnet, so lässt sich die Integration ausführen, und man erhält als *unbestimmtes Integral* folgenden Ausdruck:

$$- \frac{ai}{2} \frac{aa'}{r} \cos \vartheta \cos \varphi - \frac{ai}{2} \frac{aa'}{r} \cos \beta \cos \beta' \sin (\gamma' - \gamma) \cot \vartheta'.$$

Die gesuchte *Induktionswirkung* ist das *bestimmte Integral* oder die Differenz der beiden Werthe, welche dieser Ausdruck annimmt, wenn man darin die beiden Grenzwerthe von r, ϑ, φ und ϑ' substituirt.

Bildet man den nämlichen Ausdruck, wie für die Elemente α und α', für *alle* Kombinationen der inducirenden und inducirten Elemente, welche in dem geschlossenen Strome und Leiter enthalten sind, und bezeichnet die *Summe* aller mit

$$-\frac{ai}{2}\mathsf{S}\frac{\alpha\alpha'}{r}\cos\vartheta\cos\varphi-\frac{ai}{2}\mathsf{S}\frac{\alpha\alpha'}{r}\cos\beta\cos\beta'\sin(\gamma'-\gamma)\cot\vartheta',$$

so ist die Induktionswirkung des geschlossenen Stroms auf den geschlossenen Leiter der Differenz der beiden Werthe gleich, welche diese Summe annimmt, wenn man darin die dem Anfang und dem Ende der Induktion entsprechenden Werthe von r, ϑ, φ und ϑ' substituirt.

Obige *Summe* besteht nun aus zwei Theilen, und es soll bewiesen werden, dass der *letztere Theil* für alle Werthe von r und ϑ' Null sei. Alsdann reducirt sich die *Induktionswirkung* eines *geschlossenen* Stroms auf einen *geschlossenen* Leiter auf die Differenz der beiden Werthe, welche der *erstere Theil* obiger Summe annimmt, wenn man darin die dem Anfang und die dem Ende der Induktion entsprechenden Werthe von r, ϑ, φ substituirt.

Dass der *letztere Theil* obiger Summe, nämlich

$$-\frac{ai}{2}\mathsf{S}\frac{\alpha\alpha'}{r}\cos\beta\cos\beta'\sin(\gamma'-\gamma)\cot\vartheta'=0$$

sei, lässt sich leicht nachweisen, wenn man die inducirenden und die inducirten Elemente dem Satze gemäss zerlegt, dass zur Bestimmung der Wechselwirkung zweier Elemente für jedes derselben drei andere gesetzt werden können, welche die drei Kanten eines Parallelopipedums bilden, dessen Diagonale von dem gegebenen Elemente eingenommen wird. Ueber diesen Satz siehe unten Art. 31.

Zerlegt man hiernach die Elemente α und α', jedes in drei Elemente, deren *erstes* der Richtung der Bewegung parallel sei, das *zweite* senkrecht gegen r, in der von r bei der Bewegung von α' erzeugten Ebene, das *dritte* senkrecht auf die beiden ersteren, und bezeichnet sie mit

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \text{und}\ \alpha'_1,\ \alpha'_2,\ \alpha'_3,$$

so geht $[\alpha\alpha'/r]\,.\,\cos\beta\cos\beta'\sin(\gamma'-\gamma)\cot\vartheta'$ in eine Summe von 9 Theilen über. Für die beiden mit $\alpha_3\alpha'_1$ und mit $\alpha_3\alpha'_2$ proportionalen Theile ist der Faktor $\cos\beta=0$; für die beiden mit $\alpha_1\alpha'_3$ und mit $\alpha_2\alpha'_3$ proportionalen Theile ist der Faktor $\cos\beta'=0$; für den mit $\alpha_3\alpha'_3$ proportionalen Theil sind die beiden Faktoren $\cos\beta=\cos\beta'=0$; endlich ist für den mit $\alpha_1\alpha'_1$ und mit $\alpha_2\alpha'_2$ proportionalen 6. und 7. Theil der Faktor $\sin(\gamma'-\gamma)=0$. Es bleiben also nur zwei Theile übrig, welche nämlich mit $\alpha_1\alpha'_2$ und mit $\alpha_2\alpha'_1$ proportional sind, für welche $\cos\beta=1$, $\cos\beta'=1$, $\sin(\gamma'-\gamma)=\mp\cos\vartheta'$ ist; diese beiden Theile sind also:

$$\pm \frac{ai}{2} \cdot \frac{a_1 a'_2}{r} \cos\vartheta' \cot\vartheta' \text{ und } \pm \frac{ai}{2} \cdot \frac{a_2 a'_1}{r} \cos\vartheta' \cot\vartheta',$$

und mögen Kürze halber mit A und B bezeichnet werden. Verfährt man nun gleichermaassen mit je zwei Elementen des geschlossenen Stroms und Leiters, so findet man, dass, unter den übrigen eben so gebildeten Theilen, zwei Theile sich befinden, von welchen A und B aufgehoben werden, und die mit A' und B' bezeichnet werden sollen. Gilt dies allgemein, so geht daraus hervor, dass

$$-\frac{ai}{2} \mathsf{S} \frac{aa'}{r} \cos\beta \cos\beta' \sin(\gamma' - \gamma) \cot\vartheta' = 0$$

sei, was bewiesen werden sollte.

Den Theil A' nun, von welchem A aufgehoben wird, findet man auf folgende Weise. Durch die Mitte des *inducirenden* Elements a als Scheitel lege man zwei Kegelflächen, deren gemeinschaftliche Axe der Richtung der Bewegung, d. i. mit a_1, parallel sei. Diese beiden Kegelflächen sollen das *inducirte* Element a' begrenzen. Es leuchtet ein, dass wenigstens noch ein *zweites* Element $\mathfrak{a}'$ des *geschlossenen Leiters* von den nämlichen Kegelflächen begrenzt sein müsse. Und zwar muss ein Strom, welcher in a' *von der äusseren Kegelfläche zur inneren* geht, in $\mathfrak{a}'$ umgekehrt *von der inneren zur äusseren gehen.* Der Werth von ϑ' ist für beide Elemente gleich. Zerlegt man nun das zweite Element $\mathfrak{a}'$ eben so, wie das erste a', und bezeichnet mit $\mathfrak{a}'_2$ dasjenige Seitenelement, welches, senkrecht auf der $\mathfrak{a}'$ mit a verbindenden r', in der von r' bei der Bewegung von $\mathfrak{a}'$ erzeugten Ebene liegt, so soll der mit $a_1 \mathfrak{a}'_2$ proportionale Theil der Theil A' sein, durch welchen A aufgehoben wird. Es ist aber

$$A' = \mp \frac{ai}{2} \cdot \frac{a_1 \mathfrak{a}'_2}{r'} \cdot \cos\vartheta' \cot\vartheta',$$

und es verhalten sich $a'_2 : \mathfrak{a}'_2$ wie ihre Entfernungen von dem beiden Kegelflächen gemeinschaftlichen Scheitel, d. i. wie $r : r'$, folglich ist

$$\frac{\mathfrak{a}'_2}{r'} = \frac{a'_2}{r}.$$

Substituirt man diesen Werth, so ist

$$A' = \mp \frac{ai}{2} \frac{a_1 a'_2}{r} \cdot \cos\vartheta' \cot\vartheta',$$

und ist, abgesehen vom Vorzeichen, dem Werthe von A gleich. Aus der *entgegengesetzten Richtung*, nach welcher, wie oben angegeben worden ist, die Elemente a' und $\mathfrak{a}'$, oder a'_2 und $\mathfrak{a}'_2$, von dem nämlichen Strome durchflossen werden, lässt sich leicht erkennen, dass wenn in A, $\sin(\gamma' - \gamma) = \mp \cos\vartheta'$ ist, in A', $\sin(\gamma' - \gamma) = \pm \cos\vartheta'$ sei, dass also die

Werthe von A und A' immer entgegengesetzte Vorzeichen haben; folglich heben beide einander auf.

Es kann vorkommen, dass ausser a' und $\mathfrak{a}'$ noch ein *drittes* Element des Leiters von den nämlichen Kegelflächen begrenzt wird; es muss dann aber nothwendig, wenn der Leiter *geschlossen* ist, auch noch ein *viertes* existiren, und es gilt vom dritten und vierten das nämliche wie vom ersten und zweiten u. s. w.

Auf ähnliche Weise findet man B', wodurch B aufgehoben wird, wenn man die Mitte des *inducirten* Elements a' zum Scheitel zweier Kegelflächen macht, deren gemeinschaftliche Axe der Richtung der Bewegung parallel ist, und welche das *inducirende* Element a begrenzen. Dieselben Kegelflächen begrenzen dann von dem *geschlossenen Inducenten* noch ein zweites Element, aus dessen Zerlegung sich B' ebenso ergiebt, wie vorher A' aus der Zerlegung des Elements $\mathfrak{a}'$.

Aus der wechselseitigen Aufhebung aller mit A, A', B, B' u. s. w. bezeichneten Theile geht nun hervor, dass für *geschlossene Ströme und Leiter* die Gleichung gelte:

$$-\frac{ai}{2}\,\mathsf{S}\,\frac{aa'}{r}\cos\beta\cos\beta'\sin(\gamma'-\gamma)\cot\vartheta'=0.$$

Hieraus folgt nun *erstens*, wenn ein geschlossener Leiter mit allen seinen Theilen gleich und parallel *immer nach einerlei Richtung* bewegt wird, die *Induktionswirkung*

$$=\frac{ai}{2}\,\mathsf{S}\,\frac{aa'}{r_0}\cos\vartheta_0\cos\varphi_0-\frac{ai}{2}\,\mathsf{S}\,\frac{aa'}{r_1}\cos\vartheta_1\cos\varphi_1,$$

worin die Werthe von r, ϑ, φ für den Anfang der Induktion mit r_0, ϑ_0, φ_0, für das Ende mit r_1, ϑ_1, φ_1 bezeichnet sind. Setzt man hierin $r_1=\infty$, d. h. wird der geschlossene Leiter von einer gegebenen Lage unendlich weit vom inducirenden Strome entfernt, so ist die gesammte dadurch hervorgebrachte Induktionswirkung,

$$=\frac{ai}{2}\,\mathsf{S}\,\frac{aa'}{r_0}\cos\vartheta_0\cos\varphi_0,$$

die nämliche, welche sich nach dem vorhergehenden Artikel für denselben *inducirenden* Stromleiter und für denselben *inducirten* Leiter ergiebt, wenn sie in ihrer anfänglichen gegenseitigen Lage *beharren* und der Strom i im ersteren *verschwindet*.

Zweitens, wenn ein geschlossener Leiter mit allen seinen Theilen gleich und parallel nach irgend einer bestimmten Richtung nur wenig verschoben wird, darauf nach einer etwas *veränderten* Richtung wieder ein wenig u. s. f., und wenn die Werthe von r, ϑ, φ beim Anfang der Induktion mit r_0, ϑ_0, φ_0, am Ende der ersten oder Anfang der zweiten Wegstrecke mit r_1, ϑ_1, φ_1, am Ende der zweiten oder Anfang der

dritten Wegstrecke mit r_2, ϑ_2, φ_2 u. s. w. bezeichnet werden, folgt die *ganze Induktionswirkung*

$$= + \frac{ai}{2} \mathsf{S} \frac{aa'}{r_0} \cos\vartheta_0 \cos\varphi_0 - \frac{ai}{2} \mathsf{S} \frac{aa'}{r_1} \cos\vartheta_1 \cos\varphi_1$$

$$+ \frac{ai}{2} \mathsf{S} \frac{aa'}{r_1} \cos\vartheta_1 \cos\varphi_1 - \frac{ai}{2} \mathsf{S} \frac{aa'}{r_2} \cos\vartheta_2 \cos\varphi_2$$

$$+ \text{u. s. w.}$$

Bezeichnet man mit r_n, ϑ_n, φ_n die Werthe von r, ϑ, φ am Ende aller dieser nach einander in *verschiedenen* Richtungen ausgeführten Bewegungen, so reducirt sich der angegebene Werth der ganzen Induktionswirkung, weil alle Glieder mit Ausnahme des ersten und letzten sich aufheben, auf

$$\frac{ai}{2} \mathsf{S} \frac{aa'}{r_0} \cos\vartheta_0 \cos\varphi_0 - \frac{ai}{2} \mathsf{S} \frac{aa'}{r_n} \cos\vartheta_n \cos\varphi_n,$$

woraus man ersieht, wenn $r_n = \infty$ gesetzt wird, dass die *Induktionswirkung* dieselbe ist, wenn ein geschlossener Leiter von einer gegebenen Lage zu einem geschlossenen Strome durch eine beliebig *gekrümmte* Bahn, aber so, dass alle Theile sich immer parallel bleiben, unendlich weit vom inducirenden Strome entfernt wird, wie wenn das nämliche durch eine *geradlinige* Bahn geschähe, oder wie wenn der geschlossene Leiter in seiner ursprünglichen Lage *beharrte* und der Strom i im inducirenden Leiter *verschwände*, nämlich

$$= \frac{ai}{2} \mathsf{S} \frac{aa'}{r_0} \cos\vartheta_0 \cos\varphi_0.$$

Wird *drittens* endlich der geschlossene Leiter ganz willkürlich bewegt, so lässt sich die Bewegung eines jeden seiner Elemente in irgend einem Augenblicke in eine *Drehung* um seinen Mittelpunkt und in eine parallele *Verschiebung* des ganzen Elements auflösen. Die Induktionswirkung der *Drehung* eines Elements um seinen Mittelpunkt ist $= 0$, weil r dabei unverändert bleibt, folglich $dr = 0$ ist. Die *Verschiebung* jedes Elements lässt sich in drei Verschiebungen nach den Richtungen von drei Koordinatenaxen zerlegen. Für die parallelen Verschiebungen aller Elemente des geschlossenen Leiters nach *jeder* dieser Richtungen ist dann

$$\mathsf{S} \frac{aa'}{r} \cos\beta \cos\beta' \sin(\gamma' - \gamma) \cos\vartheta' = 0,$$

woraus man leicht sieht, dass auch bei *willkürlicher Bewegung* des geschlossenen Leiters die *Induktionswirkung*

$$= \frac{ai}{2} \mathsf{S} \frac{aa'}{r_0} \cos\vartheta_0 \cos\varphi_0 - \frac{ai}{2} \mathsf{S} \frac{aa'}{r_n} \cos\vartheta_n \cos\varphi_n$$

folgt, worin r_0, ϑ_0, φ_0 und r_n, ϑ_n, φ_n die Werthe von r, ϑ, φ im Anfange und am Ende der Induktion bezeichnen.

Die hier erörterte Relation zwischen der Induktionswirkung eines geschlossenen *konstanten* Stroms auf einen geschlossenen *bewegten* Leiter, und zwischen der Induktionswirkung eines geschlossenen *variablen* Stroms auf einen geschlossenen *ruhenden* Leiter ist schon von Neumann a. a. O. in grosser Allgemeinheit aufgestellt worden. Neumann bauet nämlich auf die Art. 26 angeführte *empirische* Grundlage die Folgerung, dass die gesammte Induktionswirkung, welche der Versetzung des inducirten Leiters aus einer Lage in eine andere entspricht, unabhängig von den Zwischenlagen sei, welche er durchläuft, und von der Geschwindigkeit, mit welcher er sie durchläuft, und blos von der Differenz der *Potentialwerthe* des Inducenten im Anfang und am Ende der Bahn abhänge. Nachdem Neumann diesen Satz für die Induktionswirkung *konstanter* Ströme auf *bewegte* Leiter festgestellt hat, fährt er a. a. O. S. 39 fort: „Aus der Unabhängigkeit der inducirten elektromotorischen Kraft von der Bewegung an sich wird gefolgert, dass *jede Ursache*, welche eine Veränderung im Werthe des *Potentials* eines geschlossenen Stroms in Beziehung auf einen geschlossenen Leiter hervorbringt, einen Strom inducirt, dessen elektromotorische Kraft durch die *Veränderung*, welche das *Potential* erlitten hat, ausgedrückt wird“. Mit Hülfe dieses Satzes hat Neumann die Bestimmung der zweiten Art der *Volta-Induktion*, nämlich die eines *variablen* Stroms auf einen ruhenden Leiter, auf die der ersten Art, nämlich eines *konstanten* Stroms auf einen *bewegten* Leiter zurückgeführt. Die oben erwähnte Relation zwischen beiden Induktionswirkungen ergiebt sich daraus von selbst. Der letzte Grund aller dieser Verhältnisse lässt sich nun nach Obigem unmittelbar in dem *elektrischen Grundgesetze* nachweisen, nach welchem je zwei elektrische Massen aus der Ferne auf einander wirken.

30.

Allgemeines Gesetz der Volta-Induktion.

Nach der Betrachtung der beiden Hauptfälle der *Volta-Induktion*, wo nämlich entweder der Strom *konstant*, der Leiter aber *bewegt*, oder wo der Strom *variabel*, der Leiter aber *unbewegt* war, lässt sich das allgemeine Gesetz zur Bestimmung der Wirkungen *beliebig bewegter und nach den Gesetzen des Galvanismus durchströmter* Leiter leicht entwickeln.

α und α' bezeichnen wieder die Länge zweier Elemente, von denen das erstere α *ruhend* angenommen wird. Diese Annahme beschränkt nach Art. 27 die Allgemeinheit der Betrachtung nicht, weil jede Be-

wegung des Elements a auf a' übertragen werden kann, indem man ihr in a' die entgegengesetzte Richtung beilegt. In diesen beiden Elementen werden, wie früher, folgende vier elektrische Massen unterschieden:

$$+ae, \quad -ae, \quad +a'e', \quad -a'e'.$$

Die *erste* dieser Massen $+ae$ bewege sich mit der Geschwindigkeit $+u$ in der Richtung des ruhenden Elements a, welche mit der von a nach a' gezogenen Geraden den Winkel ϑ macht. Diese Geschwindigkeit ändere sich während des Zeitelements dt um $+du$. Die *zweite* Masse $-ae$ bewege sich, den für einen galvanischen Strom gegebenen Bestimmungen gemäss, in der nämlichen Richtung, mit der Geschwindigkeit $-u$, d. h. rückwärts, und diese Geschwindigkeit ändere sich während des Zeitelements dt um $-du$. Die *dritte* Masse $+a'e'$ bewege sich mit der Geschwindigkeit $+u'$ in der Richtung des Elements a', welche mit der von a nach a' gezogenen und verlängerten Geraden den Winkel ϑ' macht. Diese Geschwindigkeit ändere sich in dem Zeitelemente dt um $+du'$. Ausserdem theile aber diese elektrische Masse die Bewegung des Elements a' selbst, welche mit der Geschwindigkeit v in einer Richtung geschieht, die mit der von a nach a' gezogenen und verlängerten Geraden den Winkel η macht, und in einer durch diese Gerade gelegten Ebene enthalten ist, welche mit der durch dieselbe Gerade parallel mit dem Elemente a gelegten Ebene den Winkel ε einschliesst. Die Geschwindigkeit v ändere sich während des Zeitelements dt um dv. Die *vierte* Masse $-a'e'$ bewege sich, den Bestimmungen eines galvanischen Stroms gemäss, in derselben Richtung des Elements a' mit der Geschwindigkeit $-u'$, die sich in dem Zeitelement dt um $-du'$ ändert; theile aber ausserdem mit der vorigen Masse die Geschwindigkeit v des Elements a' selbst in der schon bezeichneten Richtung. Die Entfernungen der beiden ersteren Massen von den beiden letzteren sind sämmtlich, in dem betrachteten Augenblicke, der Entfernung r der beiden Elemente selbst gleich; da sie aber nicht gleich bleiben, sollen sie mit r_1, r_2, r_3, r_4 bezeichnet werden. Legt man durch die von a nach a' gezogene Gerade zwei Ebenen, die eine mit a, die andere mit a' parallel, so bezeichne ω den von diesen beiden Ebenen eingeschlossenen Winkel.

Man erhält dann für die *Summe* der Kräfte, welche auf die *positive* und *negative* Elektricität im Elemente a' wirken, d. i. für die Kraft, welche das Element a' selbst bewegt, denselben Ausdruck wie Art. 24 nämlich:

$$-\frac{a^2}{16}\cdot\frac{ae.a'e'}{r^2}\left\{\left(\frac{dr_1^2}{dt^2}+\frac{dr_2^2}{dt^2}-\frac{dr_3^2}{dt^2}-\frac{dr_4^2}{dt^2}\right)-2r\left(\frac{d^2r_1}{dt^2}+\frac{d^2r_2}{dt^2}-\frac{d^2r_3}{dt^2}-\frac{d^2r_4}{dt^2}\right)\right\}.$$

Für die *Differenz* jener Kräfte aber, von welcher die *Induktion* abhängt,

$$-\frac{a^2}{16}\cdot\frac{ae.a'e'}{r^2}\left\{\left(\frac{dr_1^2}{dt^2}-\frac{dr_2^2}{dt^2}+\frac{dr_3^2}{dt^2}-\frac{dr_4^2}{dt^2}\right)-2r\left(\frac{d^2r_1}{dt^2}-\frac{d^2r_2}{dt^2}+\frac{d^2r_3}{dt^2}-\frac{d^2r_4}{dt^2}\right)\right\}.$$

Ferner findet man, wenn man ausser den Bewegungen der elektrischen Massen in ihren Leitern auch die ihnen mit ihren Leitern gemeinschaftlichen Bewegungen in Rechnung bringt, die ersten Differentialkoefficienten auf die Art. 22 angegebene Weise, indem man zu den dort gefundenen Werthen die nach der Richtung der Geraden r zerlegte Geschwindigkeit des Elements α', nämlich $v \cos \eta$, hinzufügt. Man erhält dann:

$$\frac{dr_1}{dt} = -u \cos \vartheta + u' \cos \vartheta' + v \cos \eta$$

$$\frac{dr_2}{dt} = +u \cos \vartheta - u' \cos \vartheta' + v \cos \eta$$

$$\frac{dr_3}{dt} = -u \cos \vartheta - u' \cos \vartheta' + v \cos \eta$$

$$\frac{dr_4}{dt} = +u \cos \vartheta + u' \cos \vartheta' + v \cos \eta.$$

Es ist also:

$$\left(\frac{dr_1^2}{dt^2} + \frac{dr_2^2}{dt^2} - \frac{dr_3^2}{dt^2} - \frac{dr_4^2}{dt^2}\right) = -8\,uu' \cos \vartheta \cos \vartheta',$$

$$\left(\frac{dr_1^2}{dt^2} - \frac{dr_2^2}{dt^2} + \frac{dr_3^2}{dt^2} - \frac{dr_4^2}{dt^2}\right) = -8\,uv \cos \vartheta \cos \eta.$$

Die zweiten Differentialkoefficienten erhält man wie Art. 22, wenn man dabei noch die Variabilität der Geschwindigkeiten u, u', v berücksichtigt, nämlich:

$$\frac{d^2r_1}{dt^2} = +u \sin \vartheta \cdot \frac{d\vartheta_1}{dt} - u' \sin \vartheta' \cdot \frac{d\vartheta'_1}{dt} - v \sin \eta \frac{d\eta_1}{dt} - \cos \vartheta \frac{du}{dt} + \cos \vartheta' \frac{du'}{dt} + \cos \eta \frac{dv}{dt}$$

$$\frac{d^2r_2}{dt^2} = -u \sin \vartheta \cdot \frac{d\vartheta_2}{dt} + u' \sin \vartheta' \cdot \frac{d\vartheta'_2}{dt} - v \sin \eta \frac{d\eta_2}{dt} + \cos \vartheta \frac{du}{dt} - \cos \vartheta' \frac{du'}{dt} + \cos \eta \frac{dv}{dt}$$

$$\frac{d^2r_3}{dt^2} = +u \sin \vartheta \cdot \frac{d\vartheta_3}{dt} + u' \sin \vartheta' \cdot \frac{d\vartheta'_3}{dt} - v \sin \eta \frac{d\eta_3}{dt} - \cos \vartheta \frac{du}{dt} - \cos \vartheta' \frac{du'}{dt} + \cos \eta \frac{dv}{dt}$$

$$\frac{d^2r_4}{dt^2} = -u \sin \vartheta \cdot \frac{d\vartheta_4}{dt} - u' \sin \vartheta' \cdot \frac{d\vartheta'_4}{dt} - v \sin \eta \frac{d\eta_4}{dt} + \cos \vartheta \frac{du}{dt} + \cos \vartheta' \frac{du'}{dt} + \cos \eta \frac{dv}{dt}.$$

Es ist folglich

$$\left(\frac{d^2r_1}{dt^2} + \frac{d^2r_2}{dt^2} - \frac{d^2r_3}{dt^2} - \frac{d^2r_4}{dt^2}\right) = +u \sin \vartheta \left(\frac{d\vartheta_1}{dt} - \frac{d\vartheta_2}{dt} - \frac{d\vartheta_3}{dt} + \frac{d\vartheta_4}{dt}\right)$$
$$- u' \sin \vartheta' \left(\frac{d\vartheta'_1}{dt} - \frac{d\vartheta'_2}{dt} + \frac{d\vartheta'_3}{dt} - \frac{d\vartheta'_4}{dt}\right)$$
$$- v \sin \eta \left(\frac{d\eta_1}{dt} + \frac{d\eta_2}{dt} - \frac{d\eta_3}{dt} - \frac{d\eta_4}{dt}\right)$$

und

$$\left(\frac{d^2 r_1}{dt^2} - \frac{d^2 r_2}{dt^2} + \frac{d^2 r_3}{dt^2} - \frac{d^2 r_4}{dt^2}\right) = + u \sin\vartheta \left(\frac{d\vartheta_1}{dt} + \frac{d\vartheta_2}{dt} + \frac{d\vartheta_3}{dt} + \frac{d\vartheta_4}{dt}\right)$$
$$- u' \sin\vartheta' \left(\frac{d\vartheta'_1}{dt} + \frac{d\vartheta'_2}{dt} - \frac{d\vartheta'_3}{dt} - \frac{d\vartheta'_4}{dt}\right)$$
$$- v \sin\eta \left(\frac{d\eta_1}{dt} - \frac{d\eta_2}{dt} + \frac{d\eta_3}{dt} - \frac{d\eta_4}{dt}\right)$$
$$- 4\cos\vartheta \cdot \frac{du}{dt}.$$

Zur Bestimmung der Differentialkoefficienten $d\vartheta_1/dt$, $d\vartheta'_1/dt$, $d\eta_1/dt$ u. s. w. verfahre man nun wie S. 159 ff. oder wie in der Note S. 162. Es ergiebt sich nämlich die Aenderung der Richtung der Geraden r_1

in der Ebene des Winkels $\vartheta = +\frac{u\,dt}{r_1}\cdot\sin\vartheta$

in der Ebene des Winkels $\vartheta' = -\frac{u'\,dt}{r_1}\cdot\sin\vartheta'$

in der Ebene des Winkels $\eta = -\frac{v\,dt}{r_1}\cdot\sin\eta$.

Zieht man nun mit der Linie r_1 und mit den Richtungen der Geschwindigkeit u, u' und v Parallellinien durch den Mittelpunkt einer Kugel, welche die Oberfläche Fig. 21 in R, U, U' und V schneiden, und verbindet R mit U, U' und V durch grösste Kreisbögen, so bildet die Ebene, welche den Bogen $UR = \vartheta$ enthält, mit der Ebene des Bogens $U'R = \vartheta'$ den mit ω bezeichneten Winkel, mit der Ebene des Bogens $VR = \eta$ den mit ε bezeichneten Winkel.

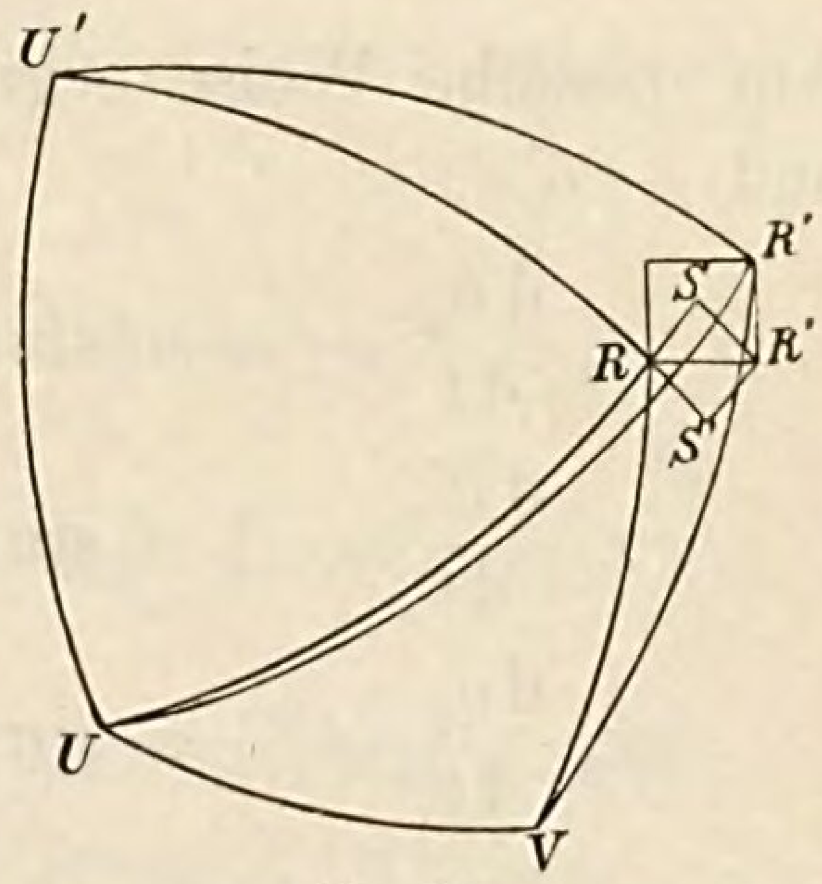


Fig. 21.

Man verlängere den Kreisbogen UR nach S, $U'R$ nach S' und VR nach T und mache

$$RS = +\frac{u\,dt}{r_1}\sin\vartheta,\quad RS' = -\frac{u'\,dt}{r_1}\sin\vartheta',\quad RT = -\frac{v\,dt}{r_1}\sin\eta.$$

Das Element der Kugeloberfläche, worin R, S, S' und T liegen, kann nun, wie S. 161, als ein Element der die Kugel bei R berührenden Ebene, und die Bogenelemente RS, RS' und RT als gerade Linien in dieser Ebene betrachtet werden. Vollendet man in dieser Ebene das Parallelogramm $RSR'S'$, zieht die Diagonale RR' und vollendet das zweite Parallelogramm $RR'R''T$, so geht eine durch den Mittelpunkt gezogene Parallellinie mit der Geraden r_1, welche die beiden *positiven* Massen $+ae$ und $+a'e'$ am Ende des Zeitelements dt verbindet, durch den Punkt R''.

Verbindet man endlich R'' mit U, U' und V durch grösste Kreisbögen, so ist

$$U R'' = \vartheta + d\vartheta_1 = U R + d\vartheta_1$$
$$U' R'' = \vartheta' + d\vartheta'_1 = U' R + d\vartheta'_1$$
$$V R'' = \eta + d\eta' = V R + d\eta_1.$$

Hieraus folgt:

$$d\vartheta_1 = UR'' - UR = RS + RS' \cos\omega + RT \cos\varepsilon$$
$$d\vartheta'_1 = U'R' - U'R = RS' + RS \cos\omega + RT \cos(\omega + \varepsilon)$$
$$d\eta_1 = VR'' - VR = RT + RS \cos\varepsilon + RS' \cos(\omega + \varepsilon).$$

Substituirt man hierin die oben angegebenen Werthe von RS, RS' und RT, so erhält man:

$$r_1 \frac{d\vartheta_1}{dt} = + u \sin\vartheta - u' \sin\vartheta' \cos\omega - v \sin\eta \cos\varepsilon$$
$$r_1 \frac{d\vartheta'_1}{dt} = - u' \sin\vartheta' + u \sin\vartheta \cos\omega - v \sin\eta \cos(\omega + \varepsilon)$$
$$r_1 \frac{d\eta_1}{dt} = - v \sin\eta + u \sin\vartheta \cos\varepsilon - u' \sin\vartheta' \cos(\omega + \varepsilon).$$

Auf dieselbe Weise ergiebt sich für die beiden *negativen* Massen $-ae$ und $-a'e'$:

$$r_2 \frac{d\vartheta_2}{dt} = - u \sin\vartheta + u' \sin\vartheta' \cos\omega - v \sin\eta \cos\varepsilon$$
$$r_2 \frac{d\vartheta'_2}{dt} = + u' \sin\vartheta' - u \sin\vartheta \cos\omega - v \sin\eta \cos(\omega + \varepsilon)$$
$$r_2 \frac{d\eta_2}{dt} = - v \sin\eta - u \sin\vartheta \cos\varepsilon + u' \sin\vartheta' \cos(\omega + \varepsilon);$$

ferner für die *positive* $+ae$ und für die *negative* $-a'e'$:

$$r_3 \frac{d\vartheta_3}{dt} = + u \sin\vartheta + u' \sin\vartheta' \cos\omega - v \sin\eta \cos\varepsilon$$
$$r_3 \frac{d\vartheta'_3}{dt} = + u' \sin\vartheta' + u \sin\vartheta \cos\omega - v \sin\eta \cos(\omega + \varepsilon)$$
$$r_3 \frac{d\eta_3}{dt.} = - v \sin\eta + u \sin\vartheta \cos\varepsilon + u' \sin\vartheta' \cos(\omega + \varepsilon);$$

endlich für die *negative* $-ae$ und für die *positive* $+a'e'$:

$$r_4 \frac{d\vartheta_4}{dt} = - u \sin\vartheta - u' \sin\vartheta' \cos\omega - v \sin\eta \cos\varepsilon$$
$$r_4 \frac{d\vartheta'_4}{dt} = - u' \sin\vartheta' - u \sin\vartheta \cos\omega - v \sin\eta \cos(\omega + \varepsilon)$$
$$r_4 \frac{d\eta_4}{dt} = - v \sin\eta - u \sin\vartheta \cos\varepsilon - u' \sin\vartheta' \cos(\omega + \varepsilon).$$

Da nun für den betrachteten Augenblick $r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = r$ ist, so erhält man hieraus:

$$r\left(\frac{d\vartheta_1}{dt} - \frac{d\vartheta_2}{dt} - \frac{d\vartheta_3}{dt} + \frac{d\vartheta_4}{dt}\right) = -4\,u'\sin\vartheta'\cos\omega$$

$$r\left(\frac{d\vartheta_1}{dt} + \frac{d\vartheta_2}{dt} + \frac{d\vartheta_3}{dt} + \frac{d\vartheta_4}{dt}\right) = -4\,v\sin\eta\cos\varepsilon;$$

ferner:

$$r\left(\frac{d\vartheta'_1}{dt} - \frac{d\vartheta'_2}{dt} + \frac{d\vartheta'_3}{dt} - \frac{d\vartheta'_4}{dt}\right) = +4\,u\sin\vartheta\cos\omega$$

$$r\left(\frac{d\vartheta'_1}{dt} + \frac{d\vartheta'_2}{dt} - \frac{d\vartheta'_3}{dt} - \frac{d\vartheta'_4}{dt}\right) = 0,$$

endlich:

$$r\left(\frac{d\eta_1}{dt} + \frac{d\eta_2}{dt} - \frac{d\eta_3}{dt} - \frac{d\eta_4}{dt}\right) = 0$$

$$r\left(\frac{d\eta_1}{dt} - \frac{d\eta_2}{dt} + \frac{d\eta_3}{dt} - \frac{d\eta_4}{dt}\right) = +4\,u\sin\vartheta\cos\varepsilon.$$

Substituirt man diese Werthe in den oben angegebenen Aggregaten der zweiten Differentialkoefficienten, so erhält man

$$r\left(\frac{d^2 r_1}{dt^2} + \frac{d^2 r_2}{dt^2} - \frac{d^2 r_3}{dt^2} - \frac{d^2 r_4}{dt^2}\right) = -8\,uu'\sin\vartheta\sin\vartheta'\cos\omega$$

$$r\left(\frac{d^2 r_1}{dt^2} - \frac{d^2 r_2}{dt^2} + \frac{d^2 r_3}{dt^2} - \frac{d^2 r_4}{dt^2}\right) = -8\,uv\sin\vartheta\sin\eta\cos\varepsilon - 4r\cos\vartheta\cdot\frac{du}{dt}\cdot$$

Mit diesen Werthen endlich ergiebt sich die *Summe* der Kräfte, welche auf die *positive* und *negative* Elektricität im Elemente α' wirken,

$$-\frac{\alpha\alpha'}{r^2}\cdot a e u\,.\,a e' u'\,(\sin\vartheta\sin\vartheta'\cos\omega - \tfrac{1}{2}\cos\vartheta\cos\vartheta'),$$

d. h. die auf das ponderable Element α' wirkende elektrodynamische Kraft wird bei bewegten Leitern und veränderlichen Stromintensitäten ebenso wie bei ruhenden Leitern und konstanten Stromintensitäten bestimmt, und das AMPÈRE'sche Gesetz findet in Beziehung auf diese Kräfte für gegebene Lage der Stromelemente und gegebene Stromintensitäten allgemeine Anwendung. Nur erfordert die Anwendung dieses Gesetzes, dass die Stromintensitäten *für jeden einzelnen Augenblick* gegeben seien, mit Einschluss des in Folge der *Induktion* hinzugekommenen Theiles.

Ebenso ergiebt sich die *Differenz* der Kräfte, welche auf die *positive* und *negative* Elektricität im Elemente α' wirken,

$$-\frac{\alpha\alpha'}{r^2}\cdot a e u\,.\,a e' v\,(\sin\vartheta\sin\eta\cos\varepsilon - \tfrac{1}{2}\cos\vartheta\cos\eta) - \tfrac{1}{2}\,\frac{\alpha\alpha'}{r}\,a^2 e e'\,.\,\cos\vartheta\cdot\frac{du}{dt},$$

oder, da nach S. 152 $aeu = i$, und, weil u veränderlich, $ae \,.\, \mathrm{d}u = \mathrm{d}i$ ist,

$$= -\frac{aa'}{r^2}\, i\,(\sin\vartheta \sin\eta \cos\varepsilon - \tfrac{1}{2}\cos\vartheta\cos\eta)\,.\, ae'v - \tfrac{1}{2}\frac{aa'}{r}\, ae' \,.\, \cos\vartheta \cdot \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\,.$$

Die hierdurch bestimmte Kraft sucht nun die *positive* und *negative* Elektricität im inducirten Elemente a' nach der Richtung der Geraden r zu scheiden. In dieser Richtung kann die Scheidung nicht erfolgen, sondern nur in der Richtung des inducirten Elements a' selbst, die mit der verlängerten Geraden r den Winkel ϑ' macht. Zerlegt man also jene ganze Kraft nach dieser Richtung, d. h. multiplicirt man obigen Werth mit $\cos\vartheta'$, so erhält man die Kraft, welche die wirkliche Scheidung bewirkt,

$$= -\frac{aa'}{r^2}\, i\,(\sin\vartheta \sin\eta \cos\varepsilon - \tfrac{1}{2}\cos\vartheta\cos\eta)\,.\, ae'v\cos\vartheta' - \tfrac{1}{2}\frac{aa'}{r}\, ae' \,.\, \cos\vartheta\cos\vartheta' \cdot \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\,.$$

Dividirt man diesen Werth mit e', so ergiebt sich die vom inducirenden Elemente a auf das inducirte Element a' ausgeübte *elektromotorische* Kraft im gewöhnlichen Sinne (siehe Art. 24, S. 170)

$$= -\frac{aa'}{r^2}\, i\,(\sin\vartheta \sin\eta \cos\varepsilon - \tfrac{1}{2}\cos\vartheta\cos\eta)\,.\, av\cos\vartheta' - \tfrac{1}{2}\frac{aa'}{r}\, a\cos\vartheta\cos\vartheta' \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\,.$$

Setzt man hierin die Aenderung der Stromintensität

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = 0,$$

so findet man dasselbe Gesetz wieder, welches Art. 24 für die Induktion eines *konstanten* Stromelements auf das *bewegte* Element eines Leiters gefunden worden ist, die *elektromotorische* Kraft ist dann nämlich

$$= -\frac{aa'}{r^2}\, i\,(\sin\vartheta \sin\eta \cos\varepsilon - \tfrac{1}{2}\cos\vartheta\cos\eta)\,.\, av\cos\vartheta',$$

worin dieselben Winkel, welche Art. 24 mit ϑ', ω, φ bezeichnet wurden, η, ε und ϑ' benannt sind, und die Geschwindigkeit, welche dort u' hiess, mit v bezeichnet ist.

Setzt man dagegen in dem allgemeinen Werthe

$$v = 0,$$

so erhält man das nämliche Gesetz, welches Art. 28 für die Induktion eines *variablen* Stromelements auf das *ruhende* Element eines Leiters gefunden worden ist, die *elektromotorische* Kraft ist dann nämlich

$$= -\tfrac{1}{2}\frac{aa'}{r}\, a\cos\vartheta\cos\vartheta' \cdot \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\,.$$

Die elektromotorische Kraft eines *variablen* Stromelements auf das *bewegte* Element eines Leiters ist also die Summe der elektromotorischen Kräfte, welche Statt finden würden, 1. wenn das Element des Leiters

in dem betrachteten Augenblicke *nicht bewegt* würde, 2. wenn das Element des Leiters zwar bewegt würde, aber die *Stromintensität* des inducirenden Elements in dem betrachteten Augenblicke sich *nicht änderte.*

Es würde hiermit das allgemeine Gesetz zur Bestimmung der Wirkungen *beliebig bewegter, und nach den Gesetzen des Galvanismus durchströmter* Leiter vollständig gegeben sein, wenn angenommen werden dürfte, dass alle unter dem Namen *galvanischer Ströme* begriffenen elektrischen Bewegungen in linearen Leitern den S. 135, 139 gegebenen Bestimmungen wirklich genau entsprächen. Wenn aber auch nicht bezweifelt werden sollte, dass alle *galvanischen Ströme* jenen Bestimmungen nahe kommen, so lassen sich doch, bei der grossen Verschiedenheit der *Quellen des Galvanismus*, kleinere Abweichungen mit Recht erwarten. Diese Abweichungen und ihr Einfluss auf die *elektrodynamischen Maassbestimmungen* sollen hier noch erörtert werden.

Nach den S. 135, 139 gegebenen Bestimmungen soll in jedem Stromelemente *gleich viel* positive und negative Elektricität enthalten sein, und beide sollen mit *gleicher Geschwindigkeit*, aber in entgegengesetztem Sinne, das Element durchströmen. Bestände ein *konstanter* Strom aus lauter solchen Elementen, deren gegenseitige Lage unverändert bliebe, so würden dieselben wechselseitig auf einander gar keine *elektromotorischen* Kräfte ausüben. Siehe Art. 24, S. 168. Die *elektromotorischen* Kräfte, welche die Widerstände der einzelnen Elemente überwänden, und dadurch nach S. 136 die Fortdauer des Stroms in allen Elementen gleichzeitig bewirkten, müssten dann *unabhängig von den Stromelementen* existiren, und auf alle Stromelemente nach Proportion ihrer Widerstände vertheilt sein, wenn die gleichmässige Fortdauer der Strömung in allen Elementen bestehen soll.

Nach Beschaffenheit der *Quellen des Galvanismus*, von welchen die *ursprünglichen*, von der Wechselwirkung der Stromelemente selbst unabhängigen, *elektromotorischen* Kräfte herrühren, wird bald jenes gleiche Verhältniss zwischen den Kräften und den von ihnen zu überwindenden Widerständen in allen Elementen des Leiters Statt finden, bald nicht. Es diene für den ersteren Fall als Beispiel ein homogener Leiter von der Form eines Kreises, in welchem ein galvanischer Strom dadurch inducirt wird, dass ein Magnet in der durch den Mittelpunkt des Kreises gehenden Normale auf die Kreisebene bewegt wird. In diesem Falle wird durch *Magneto-Induktion* eine auf alle Kreiselemente gleichmässig wirkende *elektromotorische* Kraft gewonnen, und da der *Widerstand*, bei der Homogeneität des kreisförmigen Leiters, für alle Elemente ebenfalls gleich ist, so sind hierdurch die Bedingungen für das gleichmässige Bestehen des Stroms in allen Theilen erfüllt. Es kommt aber ein solcher Fall der Natur der Sache nach selten vor; in der Regel wird kein

gleiches Verhältniss der *ursprünglichen* elektromotorischen Kräfte mit den *Widerständen* in allen Elementen Statt finden, und die Ungleichheiten müssen dann durch *Wechselwirkung* der Elemente ausgeglichen werden. Soll nun eine solche in elektromotorischen Kräften bestehende Wechselwirkung der Elemente eines konstanten Stroms nicht ausgeschlossen sein, so muss die Definition galvanischer Ströme erweitert werden.

Unter einem *galvanischen Strome*, im Gegensatze zu anderen unter diesem Namen nicht mit begriffenen elektrischen Bewegungen, sei eine solche Bewegung der Elektricität in einem geschlossenen Leiter zu verstehen, dass alle Querschnitte des letzteren gleichzeitig von gleichen Mengen positiver und negativer Elektricität in entgegengesetztem Sinne durchflossen werden. Diese Gleichheit der *durchfliessenden* positiven und negativen Massen setzt nicht nothwendig die Gleichheit der *strömenden* positiven und negativen Massen voraus, die bisher angenommen wurde, sondern kann auch bei ungleicher Grösse der letzteren bestehen, wenn die *grössere* Masse *langsamer*, die *kleinere schneller* fliesst. Bei einem galvanischen Strome der letzteren Art entspringen aus der Wechselwirkung der Elemente *neue* elektromotorische Kräfte, von welchen die ungleichen Verhältnisse der *ursprünglichen* elektromotorischen Kräfte zu den Widerständen ausgeglichen werden können. Denn sobald die *positive* Elektricitätsmenge der *negativen* in einem Elemente nicht gleich ist, d. h. sobald das Element, in Folge eines Ueberschusses an einer Elektricität, mit *freier Elektricität* geladen ist, wird diese *freie Elektricität* selbst, *nach den Gesetzen der Elektricitätserregung durch Vertheilung*, zu einer Quelle *elektromotorischer* Kräfte für alle anderen Elemente, welche durch Verstärkung jener Ladung so gesteigert werden können, dass sie, den *ursprünglichen* elektromotorischen Kräften hinzugefügt, in allen Elementen den Widerständen proportional werden, wozu in den bekannten galvanischen Ketten ein sehr geringer Grad elektrischer Ladung genügt.

Die Untersuchung, wie diese Ladung der einzelnen Elemente in einer geschlossenen galvanischen Kette durch anfängliche Ungleichheit der Strömung in den verschiedenen Theilen der Kette von selbst *entsteht* und so lange wächst, bis der angegebenen Bedingung eines in allen Theilen gleichmässigen Stroms genügt wird, führt zu der *inneren Mechanik der galvanischen Kette* und gehört nicht in das Bereich dieser Abhandlung, weil dabei die Wirkung elektrischer Massen auf *benachbarte* Massen in Rechnung gezogen werden muss, während hier blos die *in der Ferne* ausgeübten Wirkungen betrachtet werden sollen. Unabhängig von der Untersuchung der Entstehung dieser Ladungen, und der daraus sich ergebenden Gesetze ihrer Stärke und Vertheilung, soll hier nur der Ein-

fluss erörtert werden, welchen sie, *wenn sie vorhanden sind,* auf die *elektrodynamischen Maassbestimmungen* haben. Die Erörterung dieses Einflusses ist darum wichtig, weil das Vorhandensein solcher Ladungen als Regel anzusehen ist, von welcher nur selten Ausnahmen vorkommen. Ist dieser Einfluss auch gering, wie daraus hervorgeht, dass, auch ohne auf ihn Rücksicht zu nehmen, die Rechnung mit der Erfahrung in den meisten Fällen übereinstimmt, so kann doch die Kenntniss davon, worin dieser Einfluss bestehe und wie er merklich werden könne, von Nutzen sein.

Man denke sich unter den S. 196 angegebenen Verhältnissen die *positive* Masse $+ae$ in dem Elemente α um mae vermehrt, wo m einen kleinen Bruch bezeichne, zugleich denke man sich aber die Geschwindigkeit dieser Masse $+u$ um die kleine Grösse $+mu$ vermindert; ebenso denke man sich die *positive* Masse $+\alpha'e$ um $n\alpha'e'$ vermehrt, ihre Geschwindigkeit $+u'$ um nu' vermindert. Es sollen die auf beide elektrischen Massen im Elemente α' wirkenden Kräfte bestimmt werden, welche durch diese Veränderungen hinzukommen.

Die beiden Kräfte, welche die *positive* Masse $+ae$ in dem Elemente α auf die *positive* und *negative* Masse $+\alpha'e'$ und $-\alpha'e'$ im Elemente α' ausübte, waren

$$+\frac{ae.\alpha'e'}{r^2}\left(1-\frac{a^2}{16}\frac{dr_1^2}{dt^2}+\frac{a^2}{8}r\frac{d^2r_1}{dt^2}\right)$$

$$-\frac{ae.\alpha'e'}{r^2}\left(1-\frac{a^2}{16}\frac{dr_3^2}{dt^2}+\frac{a^2}{8}r\frac{d^2r_3}{dt^2}\right),$$

worin nach S. 198 zu setzen ist:

$$\frac{dr_1}{dt}=-u\cos\vartheta+u'\cos\vartheta'+v\cos\eta$$

$$\frac{dr_3}{dt}=-u\cos\vartheta-u'\cos\vartheta'+v\cos\eta,$$

und nach S. 198 und 200:

$$\begin{aligned}r\frac{d^2r_1}{dt^2}&=+u^2\sin\vartheta^2+u'^2\sin\vartheta'^2+v^2\sin\eta^2\\&\quad-2(uu'\sin\vartheta\sin\vartheta'\cos\omega+uv\sin\vartheta\sin\eta\cos\varepsilon-u'v\sin\vartheta'\sin\eta\cos(\omega+\varepsilon))\\&\quad-r\left(\cos\vartheta\frac{du}{dt}-\cos\vartheta'\frac{du'}{dt}-\cos\eta\frac{dv}{dt}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}r\frac{d^2r_3}{dt^2}&=+u^2\sin\vartheta^2+u'^2\sin\vartheta'^2+v^2\sin\eta^2\\&\quad+2(uu'\sin\vartheta\sin\vartheta'\cos\omega-uv\sin\vartheta\sin\eta\cos\varepsilon-u'v\sin\vartheta'\sin\eta\cos(\omega+\varepsilon))\\&\quad-r\left(\cos\vartheta\frac{du}{dt}+\cos\vartheta'\frac{du'}{dt}-\cos\eta\frac{dv}{dt}\right).\end{aligned}$$

Die *Differenz* obiger beiden Kräfte, von welcher die *elektromotorische* Kraft abhängt, kann

$$=2\frac{ae\,.\,a'e'}{r^2}$$

gesetzt werden, weil die übrigen Glieder gegen dieses erste sehr klein sind. Setzt man hierin nun $(1+m)\,e$ statt e, multiplicirt mit $\cos\vartheta'/e'$, und zieht den ursprünglichen mit $\cos\vartheta'/e'$ multiplicirten Werth ab, so erhält man nach S. 170, 202 die durch Ladung des Elements a mit freier Elektricität hinzukommende, auf das Element a' wirkende, *elektromotorische* Kraft

$$=2\,m\frac{aa'}{r^2}\,e\cos\vartheta'.$$

Durch Ladung des Elements a' selbst, auf welches gewirkt wird, ändert sich die elektromotorische Kraft nicht; denn setzt man in obiger Differenz $(1+n)e'$ statt e', multiplicirt mit $\cos\vartheta'/(1+n)e'$, und zieht den ursprünglichen mit $\cos\vartheta'/e'$ multiplicirten Werth ab, so bleibt kein Rest.

Die *Summe* obiger beiden Kräfte, von welcher die auf den ponderablen Träger wirkende *elektrodynamische* Kraft abhängt, erhält man durch Substitution der angeführten Werthe

$$=-\frac{1}{2}\frac{aa'}{r^2}\cdot ae\cdot ae'\left[\begin{matrix}uu'\sin\vartheta\sin\vartheta'\cos\omega-u'v\sin\vartheta\sin\eta\cos(\omega+\varepsilon)\\ -\frac{1}{2}uu'\cos\vartheta\cos\vartheta'+\frac{1}{2}u'v\cos\vartheta'\cos\eta-\frac{1}{4}r\cos\vartheta'\cdot\frac{du}{dt}\end{matrix}\right].$$

Hieraus erhält man 1. den durch Vermehrung der Masse $+ae$ hinzukommenden Theil der Kraft, mit welcher die Elemente a und a' einander abstossen, wenn man $(1+m)\,e$ statt e setzt, und den ursprünglichen Werth abzieht,

$$=-\frac{m}{2}\frac{aa'}{r^2}\cdot ae\cdot ae'\left[\begin{matrix}uu'\sin\vartheta\sin\vartheta'\cos\omega-u'v\sin\vartheta'\sin\eta\cos(\omega+\varepsilon)\\ -\frac{1}{2}uu'\cos\vartheta\cos\vartheta'+u'v\cos\vartheta'\cos\eta-\frac{1}{4}r\cos\vartheta'\frac{du}{dt}\end{matrix}\right];$$

2. den durch Verminderung der Geschwindigkeit $+u$ hinzukommenden Theil der Kraft, wenn man $(1-m)u$ statt u setzt, und den ursprünglichen Werth abzieht,

$$=+\frac{m}{2}\frac{aa'}{r^2}\cdot ae\cdot ae'\left[uu'\sin\vartheta\sin\vartheta'\cos\omega-\tfrac{1}{2}uu'\cos\vartheta\cos\vartheta'\right];$$

3. den durch Vermehrung der Masse $+a'e'$ hinzukommenden Theil der Kraft, wenn man $(1+n)e'$ statt e' setzt, und den ursprünglichen Werth abzieht,

$$=-\frac{n}{2}\frac{aa'}{r^2}\cdot ae\cdot ae'\left[\begin{matrix}uu'\sin\vartheta\sin\vartheta'\cos\omega-u'v\sin\vartheta'\sin\eta\cos(\omega+\varepsilon)\\ -\frac{1}{2}uu'\cos\vartheta\cos\vartheta'+\frac{1}{2}u'v\cos\vartheta'\cos\eta-\frac{1}{4}r\cos\vartheta'\frac{du'}{dt}\end{matrix}\right];$$

4. den durch Verminderung der Geschwindigkeit $+u'$ hinzukommenden Theil der Kraft, wenn man $(1-n)u'$ statt u' setzt, und den ursprünglichen Werth abzieht,

$$=+\frac{n}{2}\frac{aa'}{r^2}\cdot ae\cdot ae'\begin{bmatrix} uu'\sin\vartheta\sin\vartheta'\cos\omega - u'v\sin\vartheta'\sin\eta'\cos(\omega+\varepsilon) \\ -\frac{1}{2}uu'\cos\vartheta\cos\vartheta' + \frac{1}{2}u'v\cos\vartheta'\cos\eta \end{bmatrix}.$$

Fügt man alle diese hinzukommenden Theile zusammen, so erhält man den Einfluss, welchen die Ladung der Elemente a und a' mit freier *positiver* (wenn m und n positive Werthe haben), oder *negativer* (wenn m und n negative Werthe haben) Elektricität auf die *elektrodynamische* Abstossungskraft, welche a auf a' ausübt, hat; es ist nämlich die daraus hervorgehende Vergrösserung dieser Abstossungskraft, wenn man

$$aev = \varkappa, \qquad ae'u' = i' \text{ und } ae'\mathrm{d}u' = \mathrm{d}i' \text{ setzt,}$$

$$=+\frac{m}{2}\frac{aa'}{r^2}\varkappa i'(\sin\vartheta'\sin\eta\cos(\omega+\varepsilon)-\tfrac{1}{2}\cos\vartheta'\cos\eta)+\frac{m+n}{8}\frac{aa'}{r}ae\cos\vartheta'\cdot\frac{\mathrm{d}i'}{\mathrm{d}t}.$$

Dieser Einfluss verschwindet also gänzlich, wenn man die Wirkung auf ein *ruhendes konstantes* Stromelement betrachtet, für welches $v=0$ und $\mathrm{d}i'=0$ ist. Ferner verschwindet dieser Einfluss auch bei einem *bewegten konstanten* Stromelemente a', wenn das darauf wirkende Element a keine freie Elektricität besitzt, weil dann $m=0$ und $\mathrm{d}i'=0$ ist. Es besteht endlich, wenn im Elemente a freie Elektricität vorhanden ist, jener Einfluss in einer Kraft, welche derjenigen gleich ist, welche auf das Stromelement a' von einem anderen an der Stelle von a befindlichen Stromelemente ausgeübt werden würde, wenn die in demselben enthaltenen Massen $+\frac{1}{2}mae$ und $-\frac{1}{2}mae$ mit den Geschwindigkeiten $-v$ und $+v$ in der Richtung strömten, nach welcher das Stromelement a' mit der Geschwindigkeit $+v$ bewegt wird. Die Nothwendigkeit dieses Einflusses liess sich auch nach Fechner's Ansicht Art. 26, S. 179 einsehen. Hierzu kommt noch endlich für den Fall, dass die Stromintensität i' in dem Stromelemente a', auf welches gewirkt wird, sich ändert, ein mit dieser Aenderung $\mathrm{d}i'$, und mit der Summe der in beiden Elementen a und a' vorhandenen freien Elektricitäten proportionaler Einfluss, welchen der letztere Theil der Formel bestimmt.

31.

Nach den im 19. Artikel von galvanischen Strömen gegebenen Bestimmungen, welche der Betrachtung über das elektrische Gesetz zweier aus der Ferne auf einander wirkender Massen zum Grunde gelegt worden sind, ist an die Stelle des *wirklichen* Stroms, in welchem die Geschwindigkeit der strömenden Elektricität beim Uebergange von einem

ponderablen Theilchen zum anderen wahrscheinlich einem *stetigen Wechsel* unterworfen ist, ein *idealer* Strom von *gleichförmiger* Geschwindigkeit gesetzt worden. Diese Substitution war zur Vereinfachung der Betrachtung nöthig und schien gestattet zu sein, weil es sich blos um Wirkungen *in der Ferne* handelte. Es lässt sich nun diese im Anfange gemachte Voraussetzung an dem elektrischen Gesetze, zu dem wir gelangt sind, prüfen.

Es seien zwei elektrische Massen e und e' gegeben, welche am Ende der Zeit t in der Entfernung r von einander sich befinden. Ihre relative Geschwindigkeit sei bis zu diesem Augenblicke konstant $= \gamma$ gewesen. Die Abstossungskraft beider Massen war also in dem letzten Zeitelemente des angegebenen Zeitraums t, dem elektrischen Grundgesetze gemäss,

$$\frac{ee'}{r^2}\left(1 - \frac{a^2}{16}\gamma^2\right).$$

In dem folgenden Zeitelemente ε trete eine Beschleunigung

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \alpha$$

ein, wodurch die Abstossungskraft für die Dauer dieses Zeitelements

$$= \frac{ee'}{r^2}\left(1 - \frac{a^2}{16}\gamma^2\right) + \frac{a^2}{8} \cdot \frac{ee'}{r}\alpha$$

wird. Multiplicirt man nun den Zuwachs an Kraft, der in diesem Zeitelemente im Vergleich mit dem vorhergehenden Statt findet, mit diesem Zeitelemente ε selbst, so erhält man den Betrag, um welchen die Abstossungswirkung auf dem Wege dr, um welchen die Massen e und e' in dem Zeitelemente ε sich weiter von einander entfernt haben, durch jene Beschleunigung vermehrt worden ist,

$$= \frac{a^2}{8} \cdot \frac{ee'}{r} \cdot \alpha\varepsilon.$$

Die relative Geschwindigkeit beider Massen, welche vor dem Zeitelemente $\varepsilon = \gamma$ gewesen war, ist nach demselben

$$= \gamma + \alpha\varepsilon$$

geworden. Bleibt nun diese unverändert, so ist die Abstossungskraft beider Massen, wenn sie zur Entfernung ϱ gelangt sind,

$$= \frac{ee'}{\varrho^2}\left(1 - \frac{a^2}{16}(\gamma + \alpha\varepsilon)^2\right),$$

wofür, wenn $\alpha\varepsilon$ gegen γ sehr klein ist,

$$= \frac{ee'}{\varrho^2}\left(1 - \frac{a^2}{16}\gamma^2 - \frac{a^2}{8}\alpha\gamma\varepsilon\right)$$

gesetzt werden kann. Multiplicirt man diesen Ausdruck mit der Zeit

$$\frac{d\varrho}{\gamma + \alpha\varepsilon},$$

in welcher beide Massen um das Wegelement $d\varrho$ sich von einander entfernen, und integrirt zwischen den Grenzen $\varrho = r$ bis $\varrho = r_1$, so erhält man die Abstossungswirkung beider Massen auf dem Wege $r_1 - r$,

$$= \frac{ee'}{\gamma + \alpha\varepsilon}\left(1 - \frac{a^2}{16}\gamma^2 - \frac{a^2}{8}\alpha\gamma\varepsilon\right)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1}\right).$$

Tritt endlich in dem Augenblicke, wo die beiden Massen in der Entfernung r_1 von einander sich befinden, eine Verlangsamung

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -\alpha$$

ein, welche eben so wie die frühere Beschleunigung blos während eines Zeitelements $= \varepsilon$ dauert, so wird die relative Geschwindigkeit beider Massen dadurch wieder auf ihren ursprünglichen Werth

$$= \gamma$$

gebracht, und auf dem in diesem Zeitelemente ε zurückgelegten Wege tritt eine Verminderung der Abstossungswirkung

$$= -\frac{a^2}{8} \cdot \frac{ee'}{r_1} \cdot \alpha\varepsilon$$

ein. Man erhält hieraus die Totalsumme der Abstossungswirkung für den ganzen Weg $r_1 - r$ mit Einschluss der beiden Zeitelemente ε, in denen die Beschleunigung und Verlangsamung Statt fand,

$$= + \frac{a^2}{8}\frac{ee'}{r}\alpha\varepsilon + \frac{ee'}{\gamma + \alpha\varepsilon}\left(1 - \frac{a^2}{16}\gamma^2 - \frac{a^2}{8}\alpha\gamma\varepsilon\right)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1}\right) - \frac{a^2}{8} \cdot \frac{ee'}{r_1}\alpha\varepsilon,$$

oder, wenn $\alpha\varepsilon$ gegen γ sehr klein ist,

$$= \frac{ee'}{\gamma + \alpha\varepsilon}\left(1 - \frac{a^2}{16}\gamma^2\right)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1}\right).$$

Die Zeit, für welche diese Totalsumme gilt, ist aber

$$= \frac{r_1 - r}{\gamma + \alpha\varepsilon}.$$

Dividirt man jene Summe mit dieser Zeit, so erhält man die mittlere Abstossungskraft während dieser Zeit

$$= \frac{ee'}{rr_1}\left(1 - \frac{a^2}{16}\gamma^2\right),$$

d. i. den nämlichen Werth, wie wenn der Weg $r_1 - r$ mit der ursprünglichen Geschwindigkeit γ zurückgelegt worden wäre. Es folgt also hieraus, dass wenn die relative Geschwindigkeit zweier elektrischen

Massen in zwei verschiedenen Entfernungen, in welche sie successive kommen, die nämliche ist, ihre mittlere Abstossungskraft für die Zwischenzeit derjenigen mittleren Abstossungskraft gleich ist, welche ihnen zugekommen sein würde, wenn sie mit der anfänglichen relativen Geschwindigkeit von der ersteren Entfernung zur letzteren übergegangen wären.

Von diesem Satze lässt sich nun eine Anwendung zur Prüfung obiger Voraussetzung machen. Denn wenn ein Elektricitätstheilchen in einem galvanischen Strome von einem ponderablen Moleküle zum anderen übergeht, so wird es vor und hinter dem Moleküle in Lagen kommen, wo seine Geschwindigkeit gegen ein anderes einem anderen Strome angehörige Elektricitätstheilchen dieselbe ist. Die mittlere Abstossungskraft beider Theilchen für die Dauer des Uebergangs des ersten Theilchens aus der einen Lage in die andere, ist dann also die nämliche, wie wenn beide Theilchen mit ihrer anfänglichen relativen Geschwindigkeit den Zwischenraum gleichförmig durchlaufen hätten, d. h. wie wenn kein Wechsel in der Geschwindigkeit der strömenden Elektricität beim Uebergange von einem Moleküle des ponderablen Leiters zum anderen Statt fände.

Ausser dem Geschwindigkeitswechsel der Elektricitätstheilchen beim Uebergange von einem Moleküle des ponderablen Leiters zum anderen, kommt auch noch der Richtungswechsel ihrer Bewegung in Betracht, wodurch die sich begegnenden Theilchen einander ausweichen. Man sieht aber leicht, dass hierdurch bei messbaren Entfernungen der betrachteten Stromelemente keine in Betracht kommenden Variationen der Entfernungen hervorgebracht werden, dass folglich nur die durch diese Richtungsänderungen bedingten periodischen Variationen der relativen Geschwindigkeit übrig bleiben, die schon im Vorhergehenden mit eingeschlossen sind.

Es leuchtet hieraus ein, dass statt eines Stroms, in welchem die Geschwindigkeit und Richtung der strömenden Elektricität einem periodischen Wechsel unterworfen sind, mit Recht ein *gleichförmiger* Strom gesetzt werden könne, wie es Art. 19 geschehen ist.

Auch ist es gestattet, statt eines geraden Stromelements ein gekrümmtes zu setzen, wenn nur Anfangs- und Endpunkt unverändert bleiben, und dazwischen keine wahrnehmbare Entfernung von der geradlinigen Verbindungslinie Statt findet. Endlich können auch, wie Art. 29 geschehen ist, für ein Element drei Elemente gesetzt werden, welche sich zu jenem verhalten, wie die Kanten eines Parallelopipedums zur Diagonale.

32.

Das gefundene elektrische Grundgesetz lässt sich auf verschiedene Weise aussprechen, was an einigen Beispielen erläutert werden soll.

1. Weil die Entfernung r eine stets positive Grösse ist, so kann man dafür ϱ^2 schreiben. Es ergiebt sich dann

$$\mathrm{d}r = 2\varrho\,\mathrm{d}\varrho, \qquad \mathrm{d}^2 r = 2\varrho\,\mathrm{d}^2\varrho + 2\,\mathrm{d}\varrho^2,$$

folglich ist:

$$r = \varrho^2, \qquad \frac{\mathrm{d}r^2}{\mathrm{d}t^2} = 4\varrho^2 \frac{\mathrm{d}\varrho^2}{\mathrm{d}t^2}, \qquad \frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2} = 2\varrho\frac{\mathrm{d}^2\varrho}{\mathrm{d}t^2} + 2\frac{\mathrm{d}\varrho^2}{\mathrm{d}t^2}.$$

Substituirt man diese Werthe in der Formel $\frac{ee'}{r^2}\left(1 - \frac{a^2}{16}\frac{\mathrm{d}r^2}{\mathrm{d}t^2} + \frac{a^2}{8} r \frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2}\right)$, so erhält man folgende *kürzere* Formel:

$$\frac{ee'}{\varrho^4}\left(1 + \frac{a^2}{4}\varrho^3 \frac{\mathrm{d}^2\varrho}{\mathrm{d}t^2}\right).$$

2. Man verstehe unter *reducirter relativer Geschwindigkeit* der Massen e und e' diejenige relative Geschwindigkeit, welche diese Massen, denen am Ende der Zeit t die Entfernung r, die relative Geschwindigkeit $\mathrm{d}r/\mathrm{d}t$, und die relative Beschleunigung $\mathrm{d}^2r/\mathrm{d}t^2$ zukommt, *wenn die letztgenannte konstant wäre*, in dem Augenblicke $(t - \vartheta)$ besitzen würden, in welchem beide, dieser Voraussetzung gemäss, in einem Punkte zusammen träfen. Bezeichnet nun v diese *reducirte relative Geschwindigkeit*, so ist nach den bekannten Gesetzen der *gleichförmig beschleunigten* Bewegung:

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} - v = \frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2}\cdot\vartheta$$

$$r = v\vartheta + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2}\cdot\vartheta^2.$$

Durch Elimination von ϑ ergiebt sich aus diesen beiden Gleichungen:

$$\tfrac{1}{2}v^2 = \tfrac{1}{2}\frac{\mathrm{d}r^2}{\mathrm{d}t^2} - r\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2}.$$

Substituirt man diesen Werth in der Formel $\frac{ee'}{r^2}\left(1 - \frac{a^2}{16}\frac{\mathrm{d}r^2}{\mathrm{d}t^2} + \frac{a^2}{8} r \frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2}\right)$, so erhält man folgende *kürzere* Formel:

$$\frac{ee'}{r^2}\left(1 - \frac{a^2}{16}v^2\right),$$

welche sich auf folgende Weise in Worten aussprechen lässt: *Die von der Bewegung herrührende Verminderung der Kraft, mit welcher zwei elektrische Massen auf einander wirken würden, wenn sie nicht bewegt wären, ist dem Quadrate ihrer reducirten relativen Geschwindigkeit proportional.*

3. Wenn $\frac{ee'}{r^2}\left(1-\frac{a^2}{16}\frac{\mathrm{d}r^2}{\mathrm{d}t^2}+\frac{a^2}{8}r\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2}\right)$ die *absolute Kraft* ist, mit welcher die Masse e auf die Masse e', und umgekehrt e' auf e wirkt und abstösst, so folgt hieraus die *beschleunigende Kraft* für die Masse e

$$=\frac{e'}{r^2}\left(1-\frac{a^2}{16}\frac{\mathrm{d}r^2}{\mathrm{d}t^2}+\frac{a^2}{8}r\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2}\right),$$

für die Masse e'

$$=\frac{e}{r^2}\left(1-\frac{a^2}{16}\frac{\mathrm{d}r^2}{\mathrm{d}t^2}+\frac{a^2}{8}r\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2}\right).$$

Es resultirt hieraus folgende *relative Beschleunigung* beider Massen:

$$\frac{e+e'}{r^2}\left(1-\frac{a^2}{16}\frac{\mathrm{d}r^2}{\mathrm{d}t^2}+\frac{a^2}{8}r\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2}\right).$$

Fügt man hierzu noch diejenige *relative Beschleunigung*, welche für dieselben Massen theils aus der Fortdauer ihrer Bewegung in ihren bisherigen Bahnen, theils aus der Einwirkung anderer Körper sich ergiebt, welche zusammen mit f bezeichnet werde, so erhält man für die *ganze relative Beschleunigung*, d. i. für $\mathrm{d}^2 r/\mathrm{d}t^2$, folgende Gleichung:

$$\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2}=\frac{e+e'}{r^2}\left(1-\frac{a^2}{16}\frac{\mathrm{d}r^2}{\mathrm{d}t^2}+\frac{a^2}{8}r\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2}\right)+f.$$

Mit Hülfe dieser Gleichung kann der Differentialkoefficient $\mathrm{d}^2 r/\mathrm{d}t^2$ bestimmt und sein Werth in die Formel $\frac{ee'}{r^2}\left(1-\frac{a^2}{16}\frac{\mathrm{d}r^2}{\mathrm{d}t^2}+\frac{a^2}{8}r\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2}\right)$ gesetzt werden, welche dann in folgenden, die Kraft, mit welcher zwei elektrische Massen auf einander wirken, unabhängig von ihrer *relativen Beschleunigung* darstellenden, Ausdruck übergeht:

$$\frac{ee'}{r^2-\frac{a^2}{8}(e+e')r}\cdot\left(1-\frac{a^2}{16}\frac{\mathrm{d}r^2}{\mathrm{d}t^2}+\frac{a^2}{8}rf\right).$$

Hiernach hängt also diese Kraft von der Grösse der Massen, von ihrer Entfernung, von ihrer relativen Geschwindigkeit, und ausserdem endlich von derjenigen relativen Beschleunigung f ab, welche ihnen zukommt theils in Folge der Fortdauer der in ihnen schon vor handenen Bewegung, theils in Folge der von *anderen Körpern* auf sie wirkenden Kräfte.

Es scheint hieraus zu folgen, dass die *unmittelbare Wechselwirkung zweier elektrischen Massen* nicht ausschliesslich von diesen Massen selbst und ihren Verhältnissen zu einander, sondern auch von der Gegenwart *dritter* Körper abhängig sei. Nun ist bekannt, dass Berzelius eine solche *Abhängigkeit der unmittelbaren Wechselwirkung zwei Körper von*

der Gegenwart eines dritten schon vermuthet hat, und die daraus resultirenden Kräfte mit dem Namen der *katalytischen* bezeichnet hat. Bedienen wir uns dieses Namens, so kann hiernach gesagt werden, dass auch die *elektrischen Erscheinungen* zum Theil von *katalytischen* Kräften herrühren.

Diese Nachweisung *katalytischer* Kräfte für die *Elektricität* ist jedoch keine *strenge* Folgerung aus dem gefundenen elektrischen Grundgesetze. Sie würde es nur dann sein, wenn man mit diesem Grundgesetze nothwendig die *Idee* verbinden müsste, dass dadurch nur solche Kräfte bestimmt wären, welche elektrische Massen aus der Ferne *unmittelbar* auf einander ausübten. Es lässt sich aber auch *denken*, dass die unter dem gefundenen Grundgesetze begriffenen Kräfte zum Theil auch solche Kräfte sind, welche zwei elektrische Massen auf einander *mittelbar* ausüben, und welche daher *zunächst* von dem *vermittelnden Medium*, und *ferner* von allen *Körpern, welche auf dieses Medium wirken*, abhängen müssen. Es kann leicht geschehen, dass solche *mittelbar* ausgeübten Kräfte, wenn sich das vermittelnde Medium unserer Betrachtung entzieht, als *katalytische Kräfte erscheinen*, wiewohl sie es nicht sind. Man müsste wenigstens, um in solchen Fällen von *katalytischen* Kräften zu sprechen, den Begriff von *katalytischer* Kraft wesentlich modificiren. Man müsste nämlich unter *katalytischer* Kraft eine solche *mittelbar* ausgeübte Kraft verstehen, welche sich nach einer *allgemeinen Regel* bestimmen lässt, durch eine gewisse Kenntniss von den Körpern, deren Einflusse das *vermittelnde* Medium unterworfen ist, jedoch ohne Kenntniss dieses *Mediums selbst*. Das gefundene elektrische Grundgesetz giebt eine allgemeine Regel zur Bestimmung *katalytischer* Kräfte in diesem Sinne.

Eine andere noch nicht entschiedene Frage ist es aber, ob nicht die Kenntniss des *vermittelnden* Mediums zur Bestimmung der Kräfte, wenn auch nicht nothwendig, doch *nützlich* sein würde. Die allgemeine Regel zur Bestimmung der Kräfte liesse sich nämlich vielleicht noch *einfacher* aussprechen, wenn das vermittelnde Medium in Betracht gezogen würde, als es ohnedem in dem *hier aufgestellten elektrischen Grundgesetze* möglich war. Die *Erforschung des vermittelnden Mediums*, die vielleicht noch über viele andere Dinge Aufschluss geben würde, ist selbst nun aber zur Entscheidung dieser Frage nöthig.

Die *Idee von der Existenz* eines solchen vermittelnden Mediums findet sich schon in der *Idee des überall verbreiteten elektrischen neutralen Fluidums* vor, und wenn sich auch dieses *neutrale Fluidum*, ausser den Konduktoren, den bisherigen Beobachtungen der Physiker fast gänzlich entzogen hat; so ist jetzt doch Hoffnung, dass es gelingen werde, über dieses allgemein verbreitete Fluidum auf mehreren neuen Wegen näheren Aufschluss zu gewinnen. Vielleicht kommen in anderen

Körpern, ausser den Konduktoren, keine Strömungen, sondern nur *Schwingungen* vor, die man erst künftig mit den Art. 16 erörterten Mitteln genauer wird beobachten können. Ferner brauche ich nur an FARADAY's neueste Entdeckung des Einflusses *elektrischer Strömungen auf Lichtschwingungen* zu erinnern, welche es nicht unwahrscheinlich macht, dass das überall verbreitete elektrische neutrale Medium selbst derjenige überall verbreitete Aether sei, welcher die Lichtschwingungen mache und fortpflanze, oder dass wenigstens beide so innig mit einander verbunden seien, dass die Beobachtungen der Lichtschwingungen Aufschluss über das Verhalten des elektrischen neutralen Mediums zu geben vermöchten.

Auf die Möglichkeit einer *mittelbaren* Wirkung der elektrischen Massen auf einander hat, wie in der Einleitung S. 30 angeführt worden ist, schon AMPÈRE aufmerksam gemacht, „wonach nämlich die *elektrodynamischen Erscheinungen* den von den elektrischen Strömen *dem Aether mitgetheilten Bewegungen*" zuzuschreiben wären. AMPÈRE erklärt aber selbst die Prüfung dieser Möglichkeit für eine ausserordentlich schwierige Untersuchung, der er sich zu unterziehen keine Zeit gehabt habe.

Sollten auch neue Aufschlüsse der Erfahrung, wie sie z. B. aus weiterem Verfolg der nach Art. 16 über *elektrische Schwingungen* auszuführenden Versuche, und aus der FARADAY'schen Entdeckung vielleicht hervorgehen werden, vorzüglich geeignet erscheinen, um die von AMPÈRE nicht überwundenen Schwierigkeiten allmählig zu beseitigen, so dürfte doch dabei auch das elektrische Grundgesetz in der hier gegebenen, von dem vermittelnden Medium unabhängigen, Form einen nicht unwichtigen Anhaltspunkt gewähren, um dieses Gesetz auch in anderer, von dem vermittelnden Medium abhängigen, Form auszudrücken.

VI.

Elektrodynamische Maassbestimmungen.

Von

Wilhelm Weber.

(Auszug aus den bei Begründung der K. S. Gesellschaft der Wissenschaften von der Jablonowski'schen Gesellschaft zu Leipzig herausgegebenen Abhandlungen.)

[Annalen der Physik und Chemie, herausgegeben von J. C. Poggendorff, Bd. 73, Leipzig 1848, p. 193—240.]

Es ist ein Vierteljahrhundert verstrichen, seitdem Ampère die Fundamente zur Elektrodynamik legte, einer Wissenschaft, welche die Gesetze des Magnetismus und Elektromagnetismus in ihren wahren Zusammenhang bringen und auf ein Grundprincip zurückführen sollte, gleichwie dies mit den Keppler'schen Gesetzen durch Newton's Gravitationslehre geschehen ist. Vergleicht man nun aber die weitere Entwickelung, welche die Elektrodynamik gefunden, mit derjenigen der Newton'schen Gravitationslehre, so findet man einen grossen Unterschied in der bisherigen Fruchtbarkeit dieser beiden Grundprincipe. Die Newton'sche Gravitationslehre ist die Quelle geworden für unzählige neue Forschungen in der Astronomie, durch deren glänzende Resultate alle Zweifel und Bedenken am höchsten Principe dieser Wissenschaft entfernt worden sind. Die Ampère'sche Elektrodynamik hat keine solchen Resultate aufzuweisen; es lässt sich vielmehr behaupten, dass alle Fortschritte, welche seitdem wirklich gemacht worden sind, fast ganz unabhängig von Ampère's Theorie gewonnen worden sind, z. B. die Entdeckung der Induktion und ihrer Gesetze von Faraday. Ist das Grundprincip der Elektrodynamik ein wahres Naturgesetz, wie das Gravitationsgesetz, so sollte man meinen, dass sich dasselbe hätte fruchtbarer beweisen müssen als Wegweiser zur Entdeckung und Erforschung der verschiedenen Klassen von Naturerscheinungen, welche davon abhängen oder damit zusammenhängen; ist aber jenes Grundprincip kein wahres Naturgesetz, so sollte man glauben, dass es bei dem Interesse und der vielseitigen Thätigkeit, welche in dem verflossenen 25jährigen Zeitraum gerade derjenige Theil der Physik gefunden hat, auf den es

sich bezieht, längst schon hätte seine vollständige Widerlegung finden müssen. Der Grund, warum weder das eine noch das andere geschehen ist, liegt darin, dass zur Entwickelung der Dynamik kein solches Zusammenwirken der Erfahrung mit der Theorie Statt fand, wie bei der weiteren Entwickelung der allgemeinen Gravitationslehre. Ampère, mehr Theoretiker als Experimentator, hatte die geringfügigsten Anzeichen der Erfahrung auf das scharfsinnigste für sein System benutzt und demselben eine so feine Ausbildung gegeben, dass der rohe Zustand der Beobachtungen, auf die es sich zunächst bezog, zu jener ausgebildeten Theorie nicht mehr im rechten Verhältnisse stand. Die Elektrodynamik fordert, sei es zu ihrer festeren Begründung und Befruchtung, oder sei es zu ihrer Widerlegung, eine vollkommenere Technik der Beobachtungen, um in der Vergleichung von Theorie und Erfahrung auf speciellere Erörterungen genau eingehen zu können, und dadurch gleichsam der Seele der Theorie in den Beobachtungen ein angemessenes Organ zu schaffen, ohne dessen Entwickelung keine Entfaltung ihrer Kräfte möglich ist.

Die folgenden Versuche sollen beweisen, wie eine feinere Technik der elektrodynamischen Beobachtungen nicht blos zum Beweise des Grundprincips der Elektrodynamik selbst von Wichtigkeit und Bedeutung ist, sondern auch darum, weil sie die Quelle neuer Untersuchungen wird, die ohnedem gar nicht gemacht werden könnten.

Beschreibung des Instruments.

Das hier zu beschreibende Instrument eignet sich zu feinen Beobachtungen und Maassbestimmungen der elektrodynamischen Kräfte, und dieser Vorzug vor den älteren von Ampère angegebenen beruht wesentlich auf folgender Einrichtung.

Die beiden galvanischen Leiter, deren Wechselwirkung beobachtet werden soll, bestehen in zwei dünnen mit Seide übersponnenen Kupferdrähten, welche, wie Multiplikatoren, ringförmig in den äusseren Höhlungen zweier cylindrisch geformter Rahmen aufgewunden sind. Der eine dieser beiden Ringe umschliesst einen freien Raum, welcher gross genug ist, damit der andere Ring darin Platz finden und frei sich bewegen könne.

Geht nun durch die Drähte beider Ringe ein galvanischer Strom, so übt der eine auf den anderen ein Drehungsmoment aus, welches am grössten ist, wenn die Mittelpunkte beider Ringe zusammenfallen, und wenn die beiden Ebenen, denen die Windungen beider Ringe parallel sind, einen rechten Winkel mit einander bilden. Der gemeinschaftliche Durchmesser beider Ringe ist die Drehungsaxe. Diese gegenseitige Stellung beider Ringe ist ihre normale Stellung, welche sie in dem

Instrumente erhalten. Dazu kommt noch, dass der gemeinschaftliche Durchmesser beider Ringe, oder ihre Drehungsaxe, eine vertikale Lage erhält, damit die Drehung in horizontaler Ebene erfolge.

Derjenige von diesen beiden Ringen, welcher gedreht werden soll, muss nun aber zum Zweck der Zuleitung und Ableitung des Stroms in leitende Verbindung mit zwei unbeweglichen Leitern gebracht werden, und es besteht die Hauptaufgabe des Instruments darin, diese Verbindungen auf solche Weise zu bewirken, dass die Drehung des Ringes auch beim geringsten Anstosse in keiner Weise beeinträchtigt werde, wie dies der Fall ist, wenn diese Verbindungen durch zwei Spitzen hergestellt werden, die in zwei mit Quecksilber gefüllte Metallschälchen eintauchen, in welchen die beiden unbeweglichen Leiter endigen, wie es von Ampère geschah. Statt dieser Verbindungen, welche wegen der unvermeidlichen Reibungen durchaus keine freie Drehung des Ringes gestatten, werden nun hier zwei lange dünne Verbindungsdrähte gebraucht, welche mit ihren oberen Enden an zwei festen Metallhaken, in welchen die beiden unbeweglichen Leiter endigen, mit ihren unteren Enden am Rahmen des Ringes befestigt sind, und daselbst mit den Drahtenden des Ringes fest verbunden werden. An diesen beiden Verbindungsdrähten hängt der Ring frei herab, und jeder Draht trägt das halbe Gewicht des Ringes, wodurch beide Drähte gleichmässig gespannt werden.

Diese beiden Verbindungsdrähte vermitteln also den Uebergang des galvanischen Stroms von dem einen der beiden unbeweglichen Leiter zu dem Ringe, und zurück zu dem anderen unbeweglichen Leiter, und sie leisten diesen Dienst, ohne dass dabei die geringste Reibung die Drehung des Ringes beeinträchtigte.

Diese Verbindungsdrähte leisten aber noch mehr, indem sie bewirken, dass jeder Drehung des Ringes um einen bestimmten Winkel ein bestimmtes Drehungsmoment entspricht, welches diesen Winkel zu verkleinern sucht, und dem Sinus des Drehungswinkels proportional ist, wodurch ein Maassstab für alle Drehungsmomente gebildet wird, mit dessen Hülfe jedes andere auf den Ring wirkende Drehungsmoment gemessen werden kann. Es geschieht dies nach den nämlichen einfachen Gesetzen, welche Gauss für das Bifilar-Magnetometer zuerst entwickelt hat. Dieser Maassstab lässt sich endlich nach Belieben und Bedürfniss feiner oder gröber machen, je nachdem die beiden Verbindungsdrähte einander genähert oder von einander entfernt werden.

Diese Art der Aufhängung, weil sie mit gar keiner Reibung verbunden ist, hindert nun auch nicht, das Gewicht des aufgehangenen Ringes zu vergrössern, was nur nicht grösser sein darf, als das, was die beiden Verbindungsdrähte zu tragen vermögen. Es kann daher ein sehr langer Draht in sehr vielen Windungen auf dem Ringe aufgewunden,

und dadurch eine sehr starke Multiplikation der galvanischen Kraft gewonnen werden. Ausserdem kann dieser drehbare Ring ohne Nachtheil auch mit einem Spiegel belastet werden, welcher an der Drehung Theil nimmt, und hier ebenso wie beim Gauss'schen Magnetometer zu feinen Winkelmessungen benutzt werden kann; denn nach Ausschluss der Reibung steht auch hier der Anwendung feiner optischer Beobachtungsmittel kein Hinderniss entgegen.

Was die Konstruktion des Instruments im Einzelnen betrifft, wie dasselbe jetzt von Herrn Mechanikus Leyser in Leipzig in grosser Vollkommenheit ausgeführt wird, möge hier die Erklärung eingeschaltet werden, die Herr Leyser selbst davon gegeben hat, und die sich auf die ebenfalls von ihm gezeichneten Abbildungen bezieht. Das Instrument ist *Elektrodynamometer* genannt worden.

Erklärung des Elektrodynamometers.

Fig. 1 stellt das Rähmchen dar, bestimmt, die im Multiplikator schwebende Rolle zu tragen, in diagonaler Richtung gesehen. Dieses Rähmchen besteht aus zwei runden elfenbeinernen Scheiben *aa* und *aa*, die auf zwei elfenbeinerne Schienen *bb'* und *bb'* genietet sind; ihre Entfernung wird durch eine kleine elfenbeinerne Walze *c* bestimmt. Diese Walze ist hohl, so dass ein metallener Bolzen hindurch gebracht und mit einer Schraube jene Scheiben mit ihren Schienen an den Enden der Walze festgezogen werden können, wodurch eine Rolle gebildet wird, bereit zur Aufnahme des Drahts. Der Anfang des aufzuwindenden Drahts geht durch das Löchelchen *d* zur Weiterführung ins Freie. Ist der Draht auf diese Rolle gebracht und das Ende mit Seide fest verbunden, so werden die metallenen Träger *eee* und *eee'* der Rolle an den Enden der erwähnten Schienen befestigt und zwar: der eine Träger *eee'*, an welchen der Spiegel *ff* in *g* anzuschrauben ist, wird in *b'b'* angenietet; der andere Träger *eee* aber, an welchen das Gegengewicht *hh* auf die Schraube *i* zu schrauben ist, wird in *bb* angeschraubt, so dass dieser Träger sich um diese Schrauben *bb* zurück in die Richtung von *bb'* schlagen lässt, auf dass die ganze Rolle bequem in den Multiplikator gebracht werden kann. — Der Anfang der Rolle, welcher vorhin durch die Oeffnung *d* ins Freie geführt war, wird nun ein Stückchen längst der Schiene *bb'* nach *b'* zu geleitet bis ihm der Umfang der Rolle gestattet bei *k* wieder ins Innere des Rähmchens zu gelangen, und dann hinauf an den Träger des Spiegels

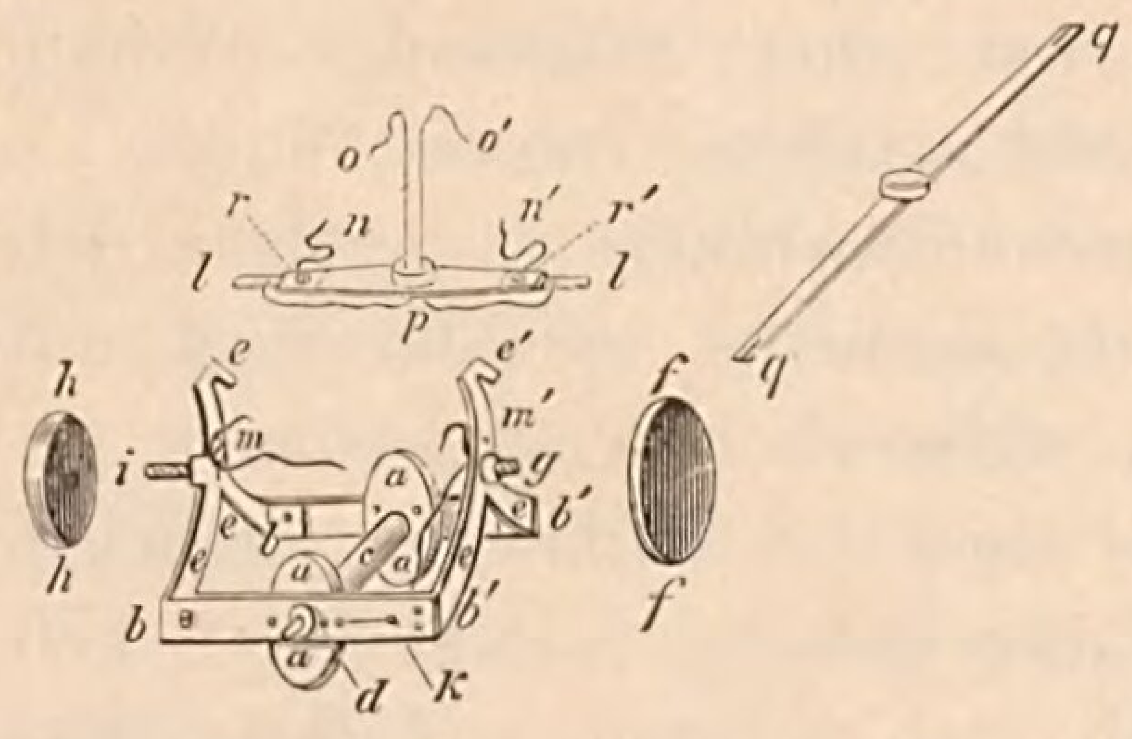


Fig. 1.

zu gehen, wo er durch ein Schräubchen *m'* oberhalb des Befestigungspunktes des Spiegels mit dem Träger in metallene Berührung kommt. Ebenso wird das Ende der Rolle mit dem anderen Träger durch das Schräubchen *m* in metallene Berührung gebracht; jedoch muss dieses Ende reichlich sein, damit der Träger beim Zurückschlagen nicht gehindert werde. Schraubt man nun noch den Spiegel *ff* in *g* und sein Gegengewicht *hh* in *i* an, so ist die Rolle zum Einhängen in den Multiplikator an den bifilaren Metallfäden geschickt. Zu diesem Zwecke endigen beide Träger der Rolle bei *e* und *e'* in Haken oder Ypsilon, und die bifilaren Metallfäden sind nach unten in Verbindung mit einem kleinen elfenbeinernen Querbalken *ll* versehen, welcher nach jedem Ende zu in ein Metallblättchen und dieses wieder in ein metallenes Cylinderchen ausläuft, welche letzteren in genannte Haken oder Ypsilon der Träger einpassen und somit die Rolle aufnehmen. Die bifilaren Metallfäden *no* und *n'o'* sind mit dem Querbalken *ll* auf folgende Weise verbunden. Der Anfang *n* des Fadens *no* ist mit einem Schräubchen auf das metallene Blättchen *r* befestigt, geht dann ein Stückchen nach *l* hin, und durch ein Löchelchen am Ende des Blättchens unterhalb des Querbalkens *ll* nach dessen Mitte *p* zurück, wo er durch eine kleine Oeffnung wieder oberhalb des Querbalkens tritt und weiter noch als nach *o* geführt werden kann. Ebenso, nur entgegengesetzt, ist der Faden *n'o'* geführt, doch hat jeder in der Mitte *p* des Querbalkens *ll* seine eigene Oeffnung, durch die er tritt, die zwar einander sehr nahe liegen, durch das Elfenbein aber dennoch getrennt und isolirt sind. Auf die Mitte dieses Querbalkens kann, bevor noch die Metallfäden *no* und *n'o'* eingezogen worden, der Zeiger oder Index *qq* gesetzt werden.

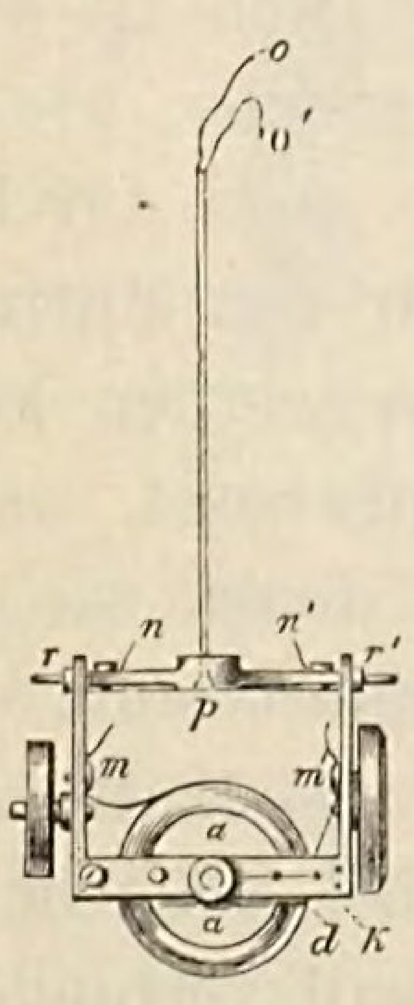


Fig. 2.

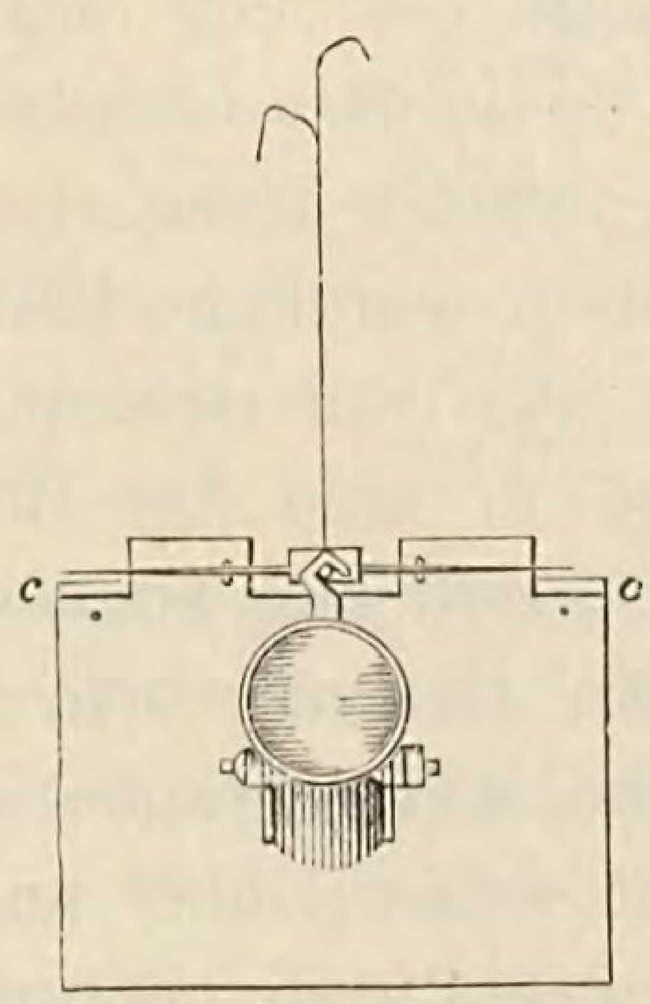


Fig. 3.

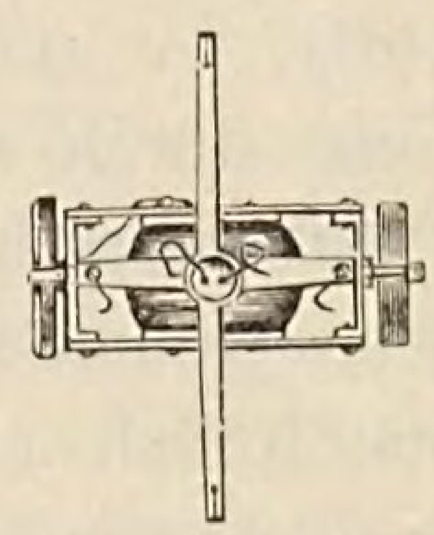


Fig. 4.

Fig. 2 zeigt in geometrischer Seitenansicht die schwebende Rolle aufgewunden an den Querbalken gebracht, mit Spiegel und Gegengewicht versehen, an den bifilaren Metallfäden schwebend. Der Zeiger ist nur in seiner sehr schmalen Vornansicht zu bemerken.

Fig. 3 stellt die Rolle dar, senkrecht auf die Spiegelfläche gesehen, die Haken oder Ypsilon, so wie der Zeiger, schwebend über den Skalenblättchen *cc*, am deutlichsten hervortritt.

Fig. 4 bietet die Ansicht von oben herab, wo Querbalken und Zeiger ein rechtwinkliges Kreuz bilden.

Um den weiteren Weg der bifilaren Metallfäden bis zu ihrer Befestigung zu verfolgen, dient Fig. 5, der Deutlichkeit wegen im doppelten Maassstabe der übrigen Figuren und im vertikalen Durchschnitt dargestellt. Die bifilaren Metallfäden gehen hier von *o* und *o'* weiter hinauf, in einem messingenen Rohre eingeschlossen, sind um die metallenen beweglichen Röllchen *a* und *a'* geschlungen und endlich an der elfenbeinernen Rolle *B* in *b* und *b'* um drehbare Stiftchen befestigt. An diesen Stiftchen oder kleinen Walzen, können die Fäden vermittelst eines Schlüsselchens auf- oder abgewunden werden, je nachdem das Auf- oder Abwinden von der Last der schwebenden Rolle erfordert wird; die Röllchen *a* und *a'* werden sich bei jeder dieser Operationen drehen müssen. Die elfenbeinerne Rolle *B* selbst aber kann mit der Gabel und Schraube *ee* vermittelst der Kopfmutter *ff* hinauf- oder hinabgeschraubt werden, und sonach die schwebende Rolle in die für den Multiplikator, in dessen Mitte sie schweben soll, passende Stellung gebracht werden. Zugleich stellt sich die Rolle *B*, welche in der Gabel *ee* um den Zapfen *m* drehbar ist, ins Gleichgewicht, sobald nämlich die schwebende Rolle frei an den bifilaren Metalldrähten herabhängt, da diese Drähte eben in *b* und *b'* wie an den Enden eines Hebels wirken, der in *m* seinen Drehpunkt hat. Sonach vertheilt sich die Last der schwebenden Rolle auf beide Fäden gleichmässig. — Um auch die bifilaren Drähte einander nähern oder von einander entfernen zu können, sind die Röllchen *a* und *a'* in breiten Gabeln gefasst, welche, wie Figur zeigt, in Schrauben enden, mittelst deren sie zwischen zwei durch vertikale Schraffirung angedeutete metallene Blättchen mit den Müttern *cc* und *c'c'* einander genähert oder von einander entfernt werden können. Die Mütter *cc* und *c'c'* sind in eine Art Büchsen eingepasst, auf der Zeichnung durch schräge Schraffirung angedeutet, in denen sie durch einen Stift befestigt, in ihrer Drehung jedoch ungehindert sind. — Das Röllchen *a* sammt seiner Gabel und Schraube, Blättchen und Mutter *cc* ist von dem Röllchen *a'* sammt seiner Gabel und Schraube, Blättchen und Mutter *c'c'* dennoch isolirt, indem die sie ober- und unterhalb verbindenden, in der Mitte durchbohrten Kreisscheiben *dd* und *d'd'* von Elfenbein sind. Um die Weiterleitung der bifilaren Metalldrähte nach aussen bequem anzubringen, endigen die Mütter *cc* und *c'c'* in trompetenförmigen Ausläufern, wie Figur zeigt, um welche ein dreifachgewundener Draht *gg* und *g'g'* herabhängt. Ein galvanischer Strom wird darnach folgenden

Weg nehmen: Tritt derselbe bei *g* ein, so geht er nach *g* hinauf, theilt sich der Schraubenmutter *cc* und dem Röllchen *a* mit (geht zwar nach *b* hinauf, da aber *b* isolirt ist, so kehrt er zurück), geht den Faden hinab nach *o*; von *o* geht er (Fig. 2) weiter hinab durch die Mitte *p* des Querbalkens, dann nach dessen Ende *r*, wo er durch die metallene Berührung mit dem Träger, denselben hinabgeht und bei *m* in das Ende der Rolle selbst tritt, durch deren Windungen er läuft, bei *d* wieder herauskommt, durch *k* aber bei *m'* in den anderen Träger übergeht, von *r'* längs des Querbalkens nach dessen Mitte *p* geführt wird, und durch diese nach *o'* hinauf; von *o'* geht der Strom (Fig. 5) wieder über das andere Röll-

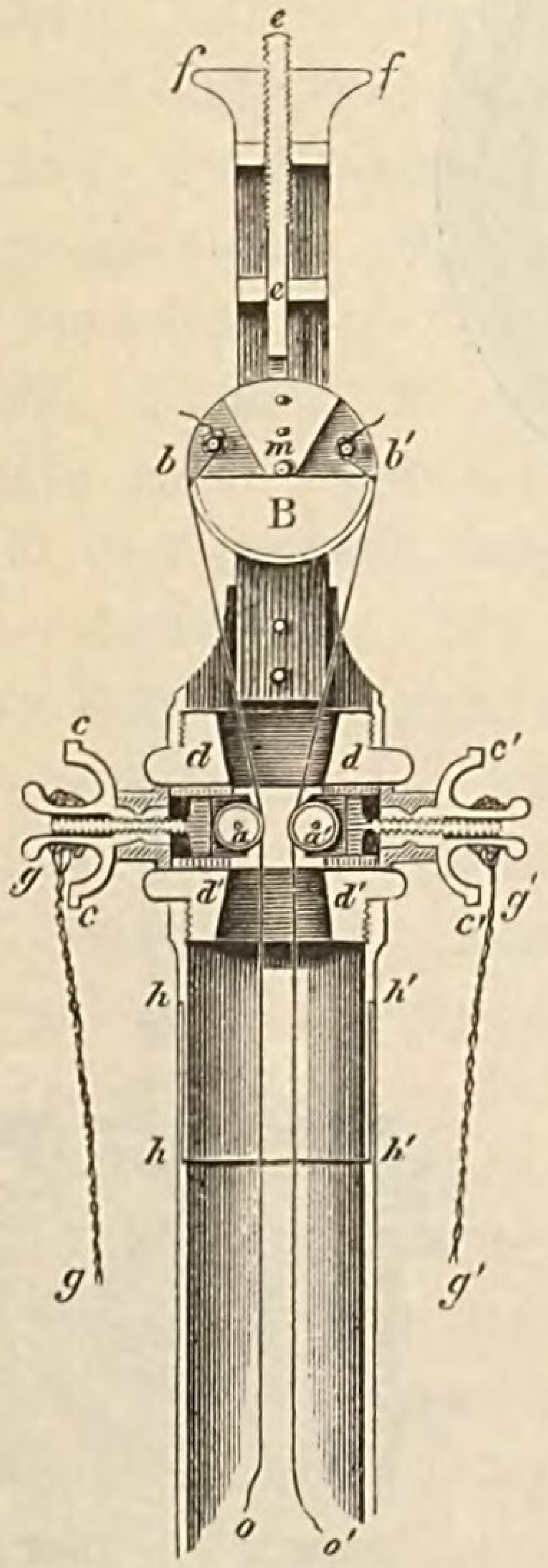


Fig. 5.

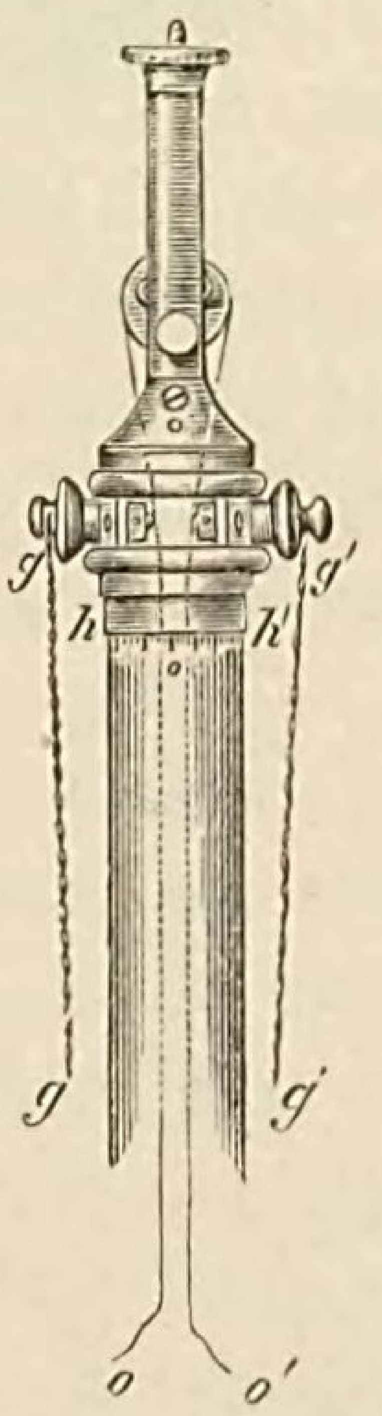


Fig. 6.

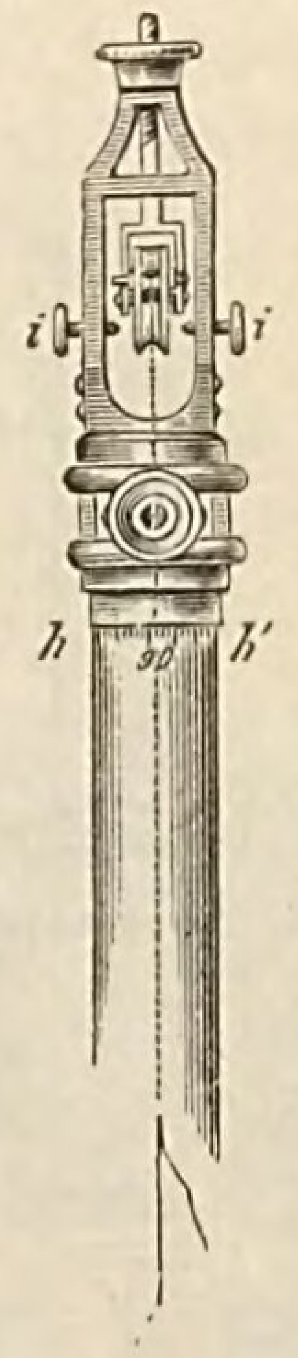


Fig. 7.

chen *a'* in die Mutter *c'c'* und gelangt endlich in den anderen Ableitungsdraht *g'g'*. Es muss also der Strom, um aus dem einen Ableitungsdraht *gg* in den anderen *g'g'* zu gelangen, die schwebende Rolle nothwendig durchlaufen, da der Draht von *g* bis *g'* überall isolirt ist. — Um die Torsion der bifilaren Metalldrähte aufzuheben, ist dieser ganze obere Theil des Instruments bis *hh* und *h'h'* horizontal drehbar und mit einem Torsionskreise nebst Index versehen, wie dieses in den Fig. 6 und 7 deutlicher bei *hh'* zu sehen ist.

Fig. 6 und 7 sind ohne Durchschnitt, und passt Fig. 6 zu Fig. 2. — Fig. 7 zeigt die Rolle *B* nebst der Gabel und Schraube *ee'* von Fig. 5

deutlicher; *ii* sind hier zwei Schrauben, um die Rolle *B* beim Transporte des Instruments zu arretiren, da sonst die bifilaren Fäden leicht Schaden nehmen könnten.

Wir gehen nun zu Fig. 8 über, welche den unteren Theil des Instruments sammt dem Multiplikator und dem Fussgestelle von Serpentinstein im vertikalen Durchschnitte zeigt. Man erkennt hier zunächst Fig. 2, an den bifilaren Metalldrähten *o* und *o'* aufgehängt, aber eben-

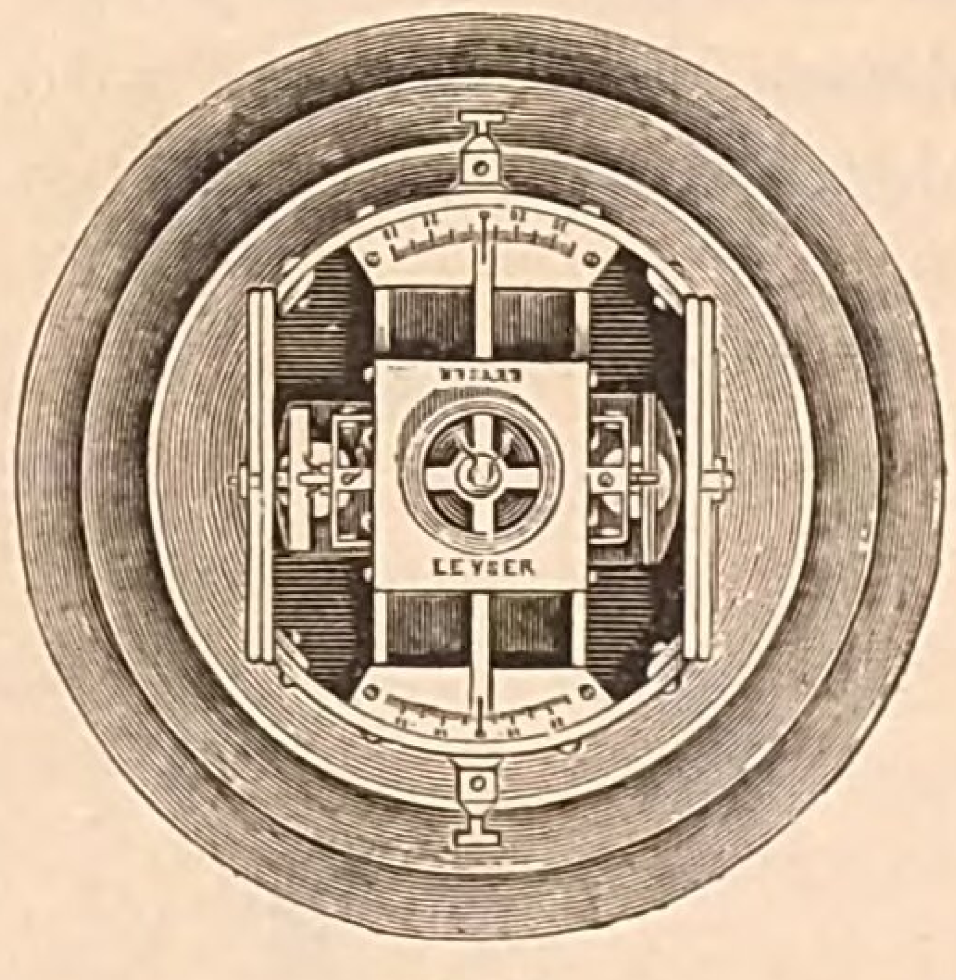


Fig. 10.

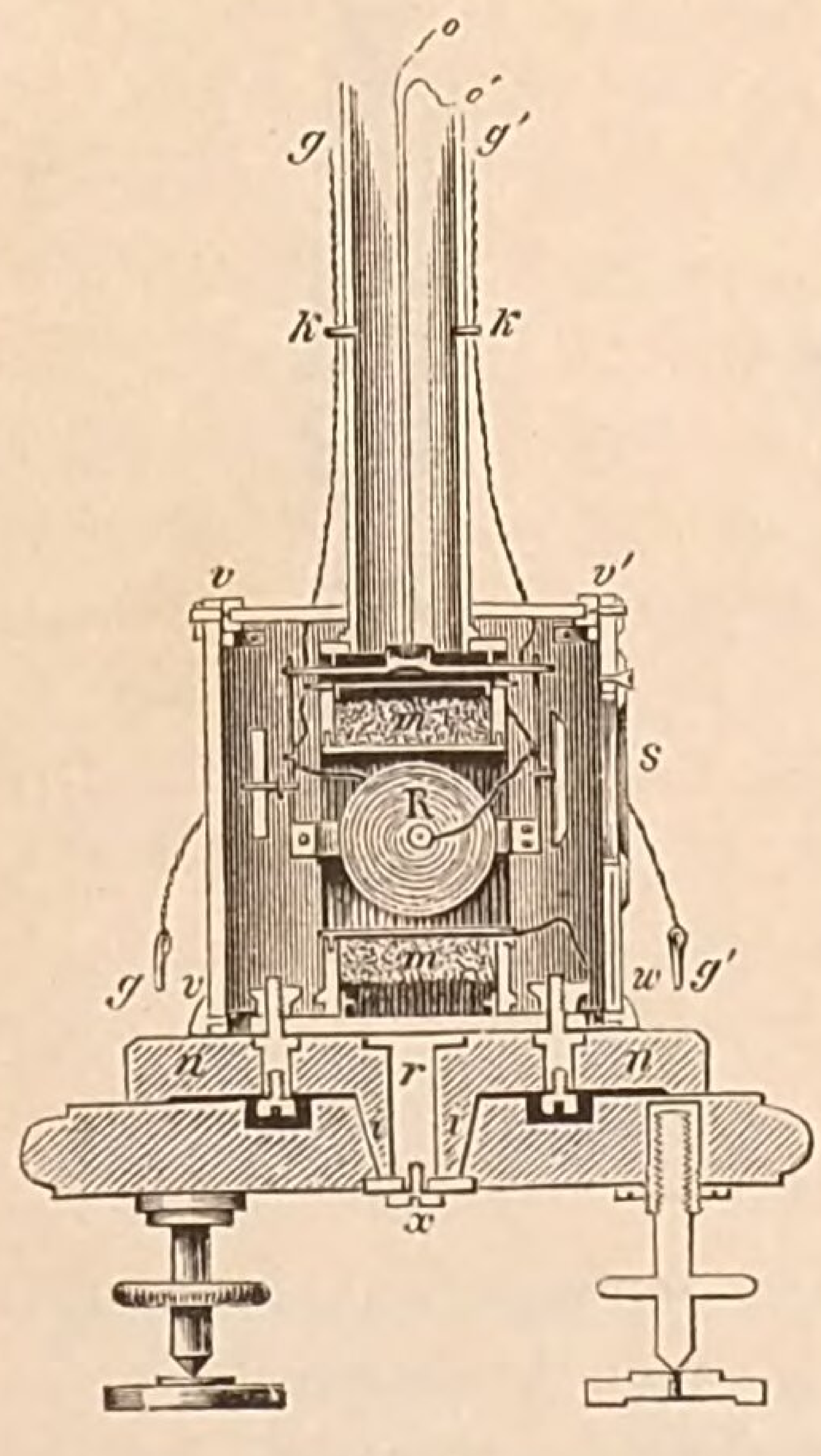


Fig. 8.

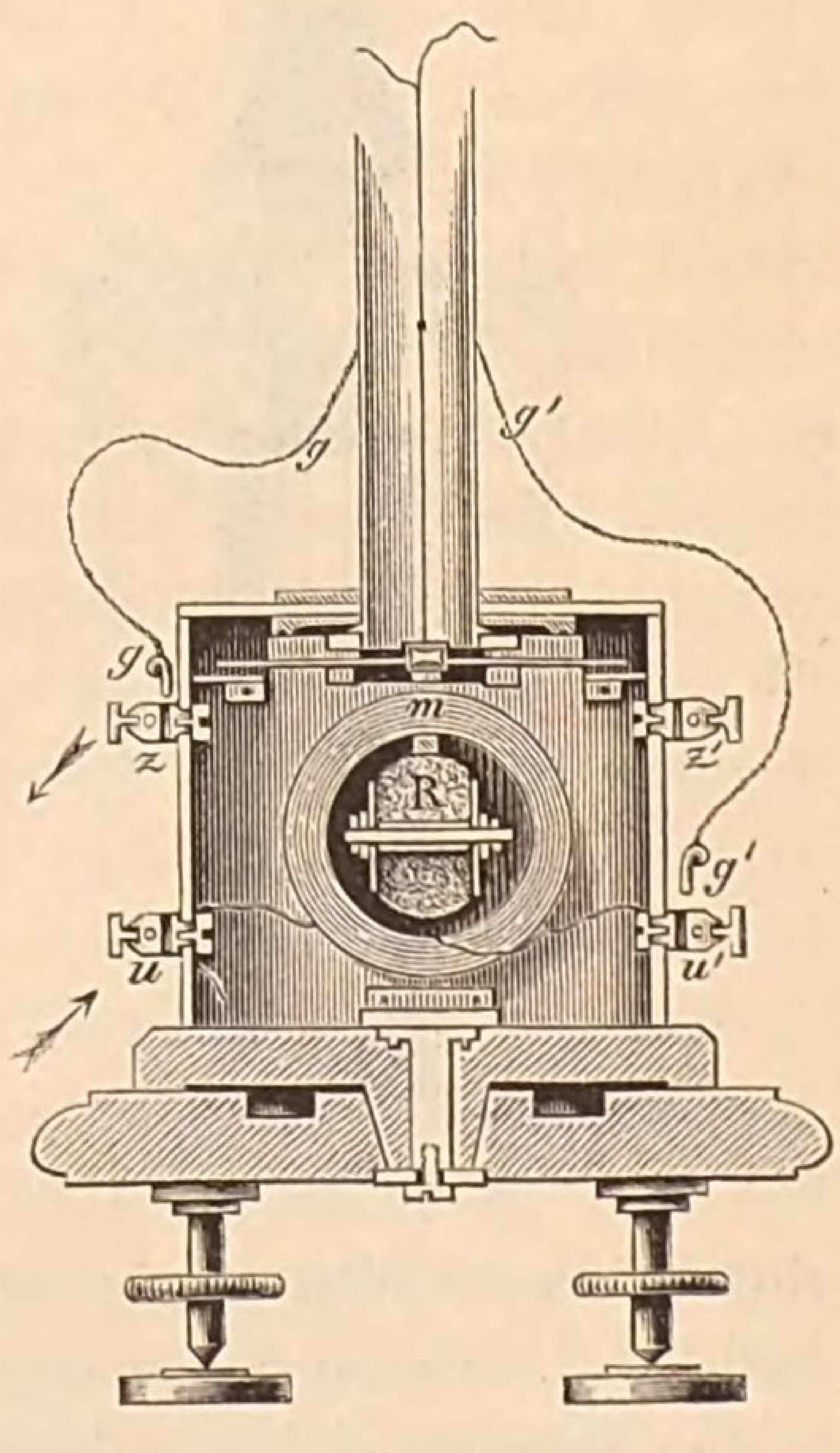


Fig. 9.

falls im vertikalen Durchschnitte. Die Buchstaben *mm* zeigen den Durchschnitt des Multiplikators, gewunden auf eine messingene mit hölzernen Seitenwänden versehene Trommel, in deren Höhlung die schwebende Rolle *R* sich befindet. Diese hölzernen Seitenwände tragen die Röhre, in der die bifilaren Fäden herabkommen, so wie auch an ihnen die beiden Skalen für den Zeiger befestigt sind.

Fig. 10, eine Ansicht von oben herab auf das Instrument, zeigt die Skale und die metallene Platte, an der die Röhre befestigt ist, genauer. Die Seitenwände dieses Multiplikators sind in Verbindung mit einem kupfernen Streifen, der vermittelst zweier Kopfmütter an zwei entsprechenden Schrauben mit dem oberen Theile *nn* des Serpentinfusses vereinigt werden kann. Dieser Theil *nn* ist mit seinem Zapfen *ii* drehbar in dem unteren Theile des Serpentinfusses und wird durch den Metallbolzen *r* mit demselben durch die Schraube *x* zusammengehalten. — Da, wie Fig. 8 zeigt, sowohl Spiegel als Gegengewicht zu den hölzernen Seitenwänden des Multiplikators hervorragen, so ist das Ganze gegen die störende Einwirkung von Luftzug durch einen cylindrischen Holzmantel geschützt, und derselbe auf den hohen Kanten der hölzernen Seitenwände des Multiplikators befestigt. In der Richtung des Spiegels zum Gegengewichte jedoch ist dieser cylindrische Mantel abgeplattet, so dass eine freie Durchsicht durch die Höhlung des Multiplikators gestattet ist. Beliebig zu schliessen oder zu öffnen ist die dem Spiegel zugekehrte platte Seite dieses Mantels durch eine hölzerne Platte, die aber, um den Spiegel benutzen zu können, mit einem planparallelen Glase *s* versehen ist. Die andere dem Gegengewichte zugekehrte platte Seite des Mantels ist ganz mit einer Glasplatte beliebig zu verschliessen oder zu öffnen. Sonach kann man also die schwebende Rolle bei geschlossenen Seitenwänden des Mantels dennoch sehen, ihr freies Schweben in der Höhlung des Multiplikators beobachten und mit den drei Stellschrauben des Serpentinfusses reguliren. Auch von oben herab, über der Theilung, ist der Mantel durch zwei in metallenen Nuthen gegen einander schiebbare Glasplatten geschlossen, welche halbkreisförmig in der Mitte ausgeschnitten sind, um das Rohr, in dem die bifilaren Drähte herabhängen, zwischen sich durchzulassen. In Fig. 8 zeigt *vv* die Glasplatte zur Seite; *v′w* die Holzplatte mit dem planparallelen Glase *s* zur anderen Seite; *vv′* ist eine der oberen Glasplatten. Die Buchstaben *k* und *k* sind Oesen, durch die die Leitungsdrähte *gg* und *g′g′* aus Fig. 5 oder Fig. 6 herabkommen; diese Drähte sind in diesen Oesen befestigt, damit sie nicht ihrer ganzen Länge nach lass umherhängen; sie endigen in Stiften oder kleinen Cylindern.

Fig. 9 zeigt ebenfalls einen vertikalen Durchschnitt, aber unter rechtem Winkel von Fig. 8; *m* ist der Multiplikator, *R* die in demselben schwebende Rolle im Durchschnitte gesehen. An den Seiten des Mantels erblickt man vier metallene Knöpfchen mit *uu′zz′* bezeichnet. Diese Knöpfchen sind kreuzweise durchbohrt, und das vom Mantel entferntere Loch mit einer Schraube versehen, von der inneren Seite des Mantels aus mit einer anderen Schraube an demselben befestigt. Zwei dieser Knöpfchen *u* und *u′* sind mit dem Ende und Anfang des Multiplikators

in metallener Berührung, so dass ein Strom aus dem Knopf *u* durch den Multiplikator hindurch in den Knopf *u'* und umgekehrt gelangen kann. Die beiden anderen Knöpfchen *z* und *z'* sind ganz isolirt, alle vier Knöpfchen aber für den Wechsel der Ströme und sonstigen Kombinationen höchst zwecklich. In dieser Figur sieht man auch den Zeiger über den Skalenblättchen schweben, so wie in Fig. 3, wo der Mantel weggenommen gedacht ist.

Verfolgen wir nun einmal den Gang eines galvanischen Stroms, welcher am Knöpfchen *u* in das Instrument eingebracht wird, so geht derselbe von *u* durch den Multiplikator *m* und nach *u'*; steckt man jetzt den Leitungsdraht *g'g'* mit seinem metallenen cylindrischen Ende in dieses Knöpfchen, so geht der Strom in *g'g'* hinauf und Fig. 5 nach der Mutter *c'c'* über das Röllchen *a'*, dann hinab in das Innere der Röhre nach *o'*, von da, Fig. 2, von *o'* durch die Mitte *p* des Querbalkens nach *r'm'kd* durch die schwebende Rolle nach *mrpo* und Fig. 5 nach *o* hinauf über das Röllchen *a* in die Mutter *cc*, nach dem zweiten Leitungsdraht *gg* und, Fig. 9, durch *gg* herab in das Knöpfchen *z*, wo dann die Leitung in die andere der beiden erregenden Oberflächen übergeht.

Das Instrument lässt sich, vermittelst des oberen drehbaren Theils vom Serpentinfusse, nach jeder beliebigen Seite eines Saals oder Zimmers richten.

Alle Figuren sind ein Viertel der Lineargrösse des Elektrodynamometers, mit Ausnahme von Fig. 5, welche Figur die Hälfte beträgt.

Der Draht auf der schwebenden Rolle besitzt 200 Meter, der des Multiplikators 300 Meter Länge; ersterer bildet ungefähr 1200 Umwindungen, letzterer nur 900. Die Länge der bifilaren Drähte, welche sehr fein von Silber und ausgeglüht sind, beträgt vom Querbalken bis zu den Röllchen *aa'* ein halbes Meter.

Der Preis des Instruments stellt sich auf 70 Thaler Preuss. Kourant.

Beobachtungen zum Beweise des Grundprincips der Elektrodynamik.

Die folgenden Beobachtungen sind nicht mit demjenigen Instrumente gemacht worden, was eben beschrieben worden ist. Jedoch ist es nicht nöthig, die hierzu gebrauchten Instrumente besonders zu beschreiben, da sie blos in Nebendingen, welche weniger bequem geordnet waren, abweichen. Nur eine wesentliche Modifikation an dem einen Instrumente ist hervorzuheben, nämlich die, dass der Multiplikator, welcher nach obiger Beschreibung eine unveränderliche Stellung einnimmt, bei welcher sein Mittelpunkt mit dem Mittelpunkte der bifilar aufgehängten Rolle zusammenfällt, so beweglich eingerichtet worden war, dass er in jede

beliebige Lage zu der schwebenden Rolle gebracht werden konnte, um die Beobachtungen auf alle Lagenverhältnisse der beiden galvanischen Leiter, welche auf einander wirken, zu erstrecken. Wenn nun diese beiden Leiter zwei Ringe bilden, von denen der eine den andern umschliessen kann, und bei dem eben beschriebenen Instrumente der innere kleinere Ring bifilar aufgehangen wurde, um gleichsam statt Galvanometernadel zu dienen, während der äussere grössere Ring fest stand und den Multiplikator bildete, so war es dagegen zu dem angeführten Zwecke nothwendig, die umgekehrte Einrichtung zu treffen und den äusseren grösseren Ring bifilar aufzuhängen um den inneren kleineren Ring als Multiplikator zu gebrauchen, weil nur dann die Stellung des Multiplikators beliebig verändert werden konnte, ohne mit der bifilaren Aufhängung in Konflikt zu kommen. Man übersieht leicht, dass die äussere Rolle wegen ihrer Grösse ein grösseres Trägheitsmoment habe, was eine grössere Schwingungsdauer zur Folge hat; doch lässt sich dieser Einfluss durch eine veränderte Anordnung der bifilaren Suspension, wenn es nöthig ist, leicht kompensiren.

Was die Beobachtungen selbst betrifft, so ist noch zu bemerken, dass, um die Resultate mit einander vergleichen zu können, die Intensität des Stroms, welcher durch die beiden Leiter des Dynamometers ging, gleichzeitig mit der Dynamometerbeobachtung von einem zweiten Beobachter an einem Galvanometer genau gemessen wurde. Es war dies nöthig, weil auf die Unveränderlichkeit der Stromintensität während einer grösseren Reihe von Versuchen, auch wenn man sich der sogen. konstanten Säule von Grove oder Bunsen bedient, keineswegs gebaut werden kann.

Als erste Probe wurden nun zunächst drei Ströme von verschiedener Intensität, nämlich von 3, 2 und 1 Grove'schen Becher, durch die beiden Leiter des Dynamometers geführt und die gleichzeitigen Ablenkungen des Dynamometers und des Galvanometers beobachtet. Nach den erforderlichen Reduktionen wurden für die Ablenkungen beider Instrumente folgende Mittelwerthe erhalten.

Zahl der Grove'schen Becher	Ablenkungen des Dynamometers	Ablenkungen des Galvanometers
3	440,038	108,426
2	198,255	72,398
1	50,915	36,332

Diese Beobachtungen sind so reducirt, dass die ersteren ein Maass der elektrodynamischen Kraft geben, mit welcher die beiden Leiter des Dynamometers auf einander wirken, wenn durch beide Ströme von

gleicher Intensität geführt werden, die letzteren aber ein Maass von dieser Stromintensität selbst geben.

Bezeichnet man nun die Dynamometerbeobachtungen mit δ, die Galvanometerbeobachtungen mit γ, so ergiebt sich

$$\gamma = 5{,}155\,34 \,.\, \sqrt{\delta};$$

denn berechnet man hiernach die Werthe von γ aus den beobachteten Werthen von δ, so erhält man der Reihe nach

108,144
72,589
36,786,

welche von den beobachteten Werthen von γ kleinere Differenzen, als verbürgt werden können, zeigen, nämlich:

— 0,282
+ 0,191
+ 0,454.

Die elektrodynamische Kraft der Wechselwirkung zweier Leitungsdrähte, durch welche Ströme von gleicher Intensität gehen, ist also dem Quadrate dieser Intensität proportional, ganz so, wie es in dem Grundprincip der Elektrodynamik vorausgesetzt wird.

Hierauf folgte nun eine grössere Versuchsreihe zur Erforschung der Abhängigkeit der elektrodynamischen Kraft, mit welcher die beiden Leitungsdrähte des Dynamometers wechselseitig auf einander wirken, von der gegenseitigen Lage und Entfernung dieser Drähte.

Hierzu war nun die Einrichtung getroffen, dass der eine Leitungsdraht, nämlich der Multiplikator, in beliebige Lagen gegen den anderen, nämlich gegen den bifilar aufgehangenen Ring, gebracht werden konnte, indem letzterer den grösseren Ring bildete, welcher den ersteren kleineren umschloss.

Beide Ringe wurden stets in solche Lage gebracht, dass ihre Axen in einer und derselben Horizontalebene lagen und einen rechten Winkel mit einander bildeten.

Der Abstand der beiden Ringe wurde nach dem Abstande ihrer Mittelpunkte von einander bestimmt und also $= 0$ gesetzt, wenn die Mittelpunkte beider Ringe zusammenfielen.

War dies letztere nicht der Fall, so musste ausser der Grösse des Abstands beider Mittelpunkte auch noch der Winkel bestimmt werden, welchen die beiden Mittelpunkte verbindende Grade mit der Axe des bifilar aufgehangenen Rings bildete, wodurch die Richtung definirt wurde, nach welcher der Mittelpunkt des Multiplikators von dem Mittelpunkte des bifilar aufgehangenen Rings entfernt worden war. Es wurden dazu die vier Kardinalrichtungen gewählt, für welche jener Winkel die Werthe 0^0, 90^0, 180^0 und 270^0 erhielt, d. h. wenn die Axe des bifilar

aufgehangenen Rings, gleich der Axe einer Magnetnadel, nach dem magnetischen Meridiane orientirt war, so wurde der Mittelpunkt des Multiplikators von dem Mittelpunkte jenes Rings bald nach der Richtung des Meridians, *nördlich* oder *südlich*, bald nach der Richtung senkrecht gegen den magnetischen Meridian, *östlich* oder *westlich*, entfernt. In jeder dieser verschiedenen Richtungen wurde der Multiplikator successive in verschiedenen Entfernungen von dem aufgehangenen Ringe gebracht.

Dieses System der Anordnung verschiedener Lagen und Entfernungen der beiden Leitungsdrähte des Dynamometers entspricht, wie man leicht sieht, genau dem Systeme der Anordnung verschiedener Lagen und Entfernungen der beiden Magnete, welche Gauss seinen Messungen zum Grunde gelegt hat, um das Grundprincip des Magnetismus zu erweisen. Der bifilar aufgehangene Ring vertritt hierbei die Stelle der Gauss'schen Magnetnadel, der Multiplikator die Stelle des Gauss'schen Ablenkungsstabs. Der einzige wesentliche Unterschied ist der, dass die Wechselwirkung der Magneten nur aus der Ferne beobachtet werden konnte, folglich bei den magnetischen Beobachtungen der Fall ausgeschlossen war, wo die Mittelpunkte beider Magnete zusammenfielen, während bei den elektrodynamischen Messungen, von denen hier die Rede ist, das System noch durch den Fall, wo die Mittelpunkte beider Ringe zusammenfielen vervollständigt werden konnte.

Gleichzeitig mit den am Dynamometer gemachten Beobachtungen wurde von einem anderen Beobachter an einem Galvanometer die Intensität des Stroms gemessen, welcher durch die beiden Ringe des Dynamometers ging. Durch diese Hülfsbeobachtungen war es möglich, alle am Dynamometer gemachten Beobachtungen nach dem oben bewiesenen Gesetze, dass die elektrodynamische Kraft dem Quadrate der Stromintensität proportional ist, auf gleiche Stromintensität zu reduciren und dadurch die erhaltenen Resultate vergleichbar zu machen.

Folgende Tafel giebt in kurzer Uebersicht die reducirten Mittelwerthe, welche für die verschiedenen Fälle erhalten wurden. In der ersten vertikalen Kolumne ist der Abstand der Mittelpunkte der beiden Ringe des Dynamometers, in der Ueberschrift der Kolumnen ist die Richtung angegeben, welche die beide Mittelpunkte verbindenden Grade mit der nach dem magnetischen Meridian orientirten Axe des bifilar aufgehangenen Rings bildet.

Abstand in mm	Nördlich 0°	Oestlich 90°	Südlich 180°	Westlich 270°
0	22960	22960	22960	22960
300	77,16	189,24	77,06	190,62
400	34,78	77,61	34,77	77,28
500	18,17	39,37	18,30	39,16
600	—	22,53	—	22,38

Man sieht leicht, dass in dem Falle, wo die Mittelpunkte der beiden Ringe des Dynamometers zusammenfallen, oder ihr Abstand $= 0$ ist, der Unterschied wegfällt, welcher auf der Verschiedenheit der Richtung beruht, nach welcher der Multiplikator von dem bifilar aufgehangenen Ringe entfernt werde. Das für diesen Fall erhaltene Resultat konnte daher in obiger Tafel in den verschiedenen Kolumnen nur wiederholt werden.

Ferner zeigt obige Tafel, dass die für gleichen Abstand in entgegengesetzten, um 180^0 verschiedenen Richtungen erhaltenen Resultate so weit mit einander übereinstimmen, als die Beobachtungen verbürgt werden können.

Diese Werthe, einander gleich gesetzt und dafür ihr Mittel genommen, geben nach Verwandlung der Skalentheile in Grade, Minuten und Sekunden, folgende Tafel:

R	v	v'
0,3	0° 49′ 22″	0° 20′ 3″
0,4	0° 20′ 8″	0° 9′ 2″
0,5	0° 10′ 12″	0° 4′ 44″
0,6	0° 5′ 50″	—

worin dieselbe Bezeichnung gebraucht ist, deren sich Gauss in der *Intensitas vis magneticae etc.* (Ann. 1833, Bd. XXVIII, S. 604 [1]) in der Zusammenstellung der magnetischen Beobachtungen bedient hat.

Nach dem Grundprincipe der Elektrodynamik sollen sich nun hier wie dort die Tangenten der Ablenkungswinkel v und v' nach den fallenden ungeraden Potenzen des Abstands R entwickeln lassen, und zwar soll

$$\operatorname{tang} v = aR^{-3} + bR^{-5}$$
$$\operatorname{tang} v' = \tfrac{1}{2} aR^{-3} + cR^{-5}$$

gesetzt werden können, wo a, b, c aus den Beobachtungen zu bestimmende Konstanten sind. Setzt man nun in unserem Falle

$$\operatorname{tang} v = 0{,}000\,357\,2\,R^{-3} + 0{,}000\,002\,755\,R^{-5}$$
$$\operatorname{tang} v' = 0{,}000\,178\,6\,R^{-3} - 0{,}000\,001\,886\,R^{-5},$$

so ergiebt sich folgende Tafel *berechneter* Ablenkungen und deren Unterschiede von den *beobachteten*:

R	v	Unterschied	v'	Unterschied
0,3	0° 49′ 22″	0″	0° 20′ 4″	— 1″
0,4	0° 20′ 7″	+ 1″	0° 8′ 58″	+ 4″
0,5	0° 10′ 8″	+ 4″	0° 4′ 42″	+ 2″
0,6	0° 5′ 49″	+ 1″	—	—

[1]) [Gauss' Werke, Bd. V, p. 109.]

In dieser Uebereinstimmung der berechneten Werthe mit den beobachteten findet sich also eine der allgemeinsten und wichtigsten Konsequenzen des Grundprincips der Elektrodynamik bestätigt, *dass nämlich für die elektrodynamischen Wirkungen in die Ferne gleiche Gesetze gelten wie für die magnetischen.*

Bei dieser Anwendung der magnetischen Gesetze auf die elektrodynamischen Beobachtungen musste von letzteren der Fall ausgeschlossen werden, wo die Mittelpunkte der beiden Ringe des Dynamometers zusammenfallen. Auch werden bei dieser Uebertragung der magnetischen Gesetze auf die elektrodynamischen Beobachtungen die Werthe dreier Konstanten aus den Beobachtungen selbst abgeleitet, was nicht nöthig ist, wenn man auf das Grundprincip der Elektrodynamik selbst zurückgeht und daraus unmittelbar berechnet, welche Resultate die Beobachtungen darnach hätten geben sollen.

Aus dem Grundprincip der Elektrodynamik wird nun mit hinreichender Annäherung

1. für den Fall, wo die die Mittelpunkte beider Ringe verbindende Gerade mit der Axe des bifilar aufgehangenen Rings zusammenfällt,

wenn m den Halbmesser des Multiplikatorrings, n den Halbmesser des bifilar aufgehangenen Rings und a den Abstand der Mittelpunkte beider Ringe bezeichnet, und Kürze halber

$$\frac{m^2}{a^2 + n^2} = v^2,$$

$$\frac{n^2}{a^2 + n^2} = w^2,$$

$$\frac{4a^2 + n^2}{16\,(a^2 + n^2)} = f,$$

$$\frac{8a^4 + 4a^2n^2 + n^4}{64\,(a^2 + n^2)^2} = g$$

geschrieben wird, das *elektrodynamische Drehungsmoment gefunden, welches der Multiplikatorring auf den bifilar aufgehangenen Ring ausübt, wenn durch beide Ringe ein Strom von der Intensität* $= i$ *geht*, nämlich:

$$= -\frac{\pi^2}{2}\, v^3 n^2 i^2 \,.\, S,$$

wo S folgende Reihe bezeichnet:

$$\begin{aligned} S = &+ [\tfrac{1}{3} - w^2] \\ &- \tfrac{3}{2}\, [\tfrac{3}{5} - w^2 - (3 - 7\,w^2)\, f]\, v^2 \\ &+ \tfrac{15}{8}\, [\tfrac{5}{7} - w^2 - 2\,(5 - 9\,w^2)\, f + 3\,(5 - 11\,w^2)\, g]\, v^4 \\ &- \tfrac{35}{16}\, [\tfrac{7}{9} - w^2 - 3\,(7 - 11\,w^2)\, f + 11\,(7 - 13\,w^2)\, g]\, v^6 \\ &+ \tfrac{315}{128}\, [\tfrac{9}{11} - w^2 - 4\,(9 - 13\,w^2)\, f + 26\,(9 - 15\,w^2)\, g]\, v^8 \\ &- \textit{etc.} \end{aligned}$$

Setzt man hierin die aus unmittelbarer Abmessung bekannten Werthe, in Millimetern:

$$m = 44{,}4$$
$$n = 55{,}8$$

und successive $a = 300,\ 400,\ 500,$

so erhält man für die gesuchten Drehungsmomente folgende drei mit $\pi^2 i^2$ zu multiplicirende Werthe

$$-\,1{,}4544$$
$$-\,0{,}6547$$
$$-\,0{,}3452.$$

Ebenso findet man

2. für den Fall, wo die die Mittelpunkte beider Ringe verbindende gerade Linie mit der Axe des bifilar aufgehangenen Ringes rechtwinklich ist,

wenn m, n, a dieselbe Bedeutung haben, und

$$\frac{m^2}{a^2+n^2} = v^2,$$
$$\frac{a^2}{a^2+n^2} = f,$$
$$\frac{n^2}{a^2+n^2} = 4\,gv^2$$

geschrieben wird, das gesuchte Drehungsmoment

$$= +\,\pi v^3 n^2 i^2 \,.\, S',$$

wo S' folgende Reihe bezeichnet:

$$\begin{aligned} S' = &+\tfrac{1}{3} \\ &-\tfrac{3}{2}\left[\tfrac{1}{5}-\tfrac{10}{3}fg\right]v^2 \\ &+\tfrac{15}{8}\left[\tfrac{1}{7}+\tfrac{2}{5}(1-14f)g+42f^2g^2\right]v^4 \\ &-\tfrac{35}{16}\left[\tfrac{1}{9}+\tfrac{3}{7}(2-18f)g-\tfrac{54}{5}(1-11f)fg^2-572f^3g^3\right]v^6 \\ &+\tfrac{315}{128}\left[\tfrac{1}{11}+\tfrac{4}{9}(3-22f)g+\tfrac{12}{7}(1-22f+143f^2)g^2\right. \\ &\qquad\left.+\tfrac{1144}{5}(1-10f)f^2g^3+\tfrac{24310}{3}f^4g^4\right]v^8 \\ &-\ \textit{etc.} \end{aligned}$$

Setzt man hierin für m und n die angegebenen Werthe und successive $a = 300,\ 400,\ 500,\ 600,$ so erhält man für die gesuchten Drehungsmomente folgende mit $\pi^2 i^2$ zu multiplicirende Werthe:

$$+\,3{,}5625$$
$$+\,1{,}4661$$
$$+\,0{,}7420$$
$$+\,0{,}4267.$$

Endlich findet man

3. für den Fall, wo die Mittelpunkte beider Ringe zusammenfallen, wenn m den Halbmesser des Multiplikators, n' und n'' den kleinsten und grössten Halbmesser des bifilar aufgehangenen Rings bezeichnet, das gesuchte Drehungsmoment:

$$= \frac{\pi^2 m^3}{n'' - n'} i^2 \left[\frac{1}{3} \log nat \frac{n''}{n'} \right.$$
$$+ \frac{9}{160} \left(\frac{1}{n''^2 - n'^2} \right) m^2 - \frac{225}{14\,336} \left(\frac{1}{n''^4} - \frac{1}{n'^4} \right) m^4$$
$$\left. + \frac{6\,125}{884\,736} \left(\frac{1}{n''^6} - \frac{1}{n'^6} \right) m^6 + \frac{694\,575}{184\,549\,376} \left(\frac{1}{n''^8} - \frac{1}{n'^8} \right) m^8 + \ldots \right].$$

Setzt man hierin die aus unmittelbarer Abmessung bekannten Werthe, in Millimetern:

$$m = 44{,}4$$
$$n' = 50{,}25$$
$$n'' = 61{,}35$$

so erhält man für das gesuchte Drehungsmoment folgenden mit $\pi^2 i^2$ zu multiplicirenden Werth:

$$+ 442{,}714.$$

Dieser Werth erleidet noch eine Verkleinerung etwa um $\frac{1}{29}$, wenn man darauf Rücksicht nimmt, dass nicht sämmtliche Windungen jedes der beiden Ringe in einer Ebene lagen, was in diesem Falle wegen der Nachbarschaft derselben grösseren Einfluss hat, als in den übrigen Fällen. Obiger Werth reducirt sich dadurch auf

$$+ 427{,}45 \,.\, \pi^2 i^2.$$

Die hier berechneten Zahlenkoëfficienten sollten nun den beobachteten Werthen proportional sein und durch Multiplikation mit $\pi^2 i^2$, wenn die Stromintensität i nach dem den obigen Messungen zum Grunde liegenden Maasse ausgedrückt wurde, gleich werden.

In der That erhält man, wenn man sämmtliche berechneten Zahlenkoëfficienten mit 53,06 multiplicirt und sie dann nach Analogie der beobachteten Werthe ordnet, folgende Tafel der berechneten Werthe und deren Unterschiede von den beobachteten.

Abstand in mm	Nördl. od. südl. 0° oder 180°	Unterschied	Südl. od. westl. 90° oder 270°	Unterschied
0	+ 22 680,00	+ 280,00	+ 22 680,00	+ 280,00
300	189,03	+ 0,90	77,17	— 0,06
400	77,79	— 0,34	34,74	+ 0,03
500	39,37	— 0,10	18,31	— 0,07
600	22,64	— 0,18	—	—

In dieser Vergleichung von Theorie und Erfahrung ist der einzige Faktor 53,06 aus den Beobachtungen abgeleitet worden, und es ist dies blos darum geschehen, weil dieser Faktor aus unmittelbaren Abmessungen sich nicht genau genug bestimmen liess. Die direkte Bestimmung dieses Faktors beruht auf der Ermittlung des Verhältnisses desjenigen Maasses der Stromintensität, welches der gebrauchten Galvanometerskale zum Grunde lag, zu demjenigen absoluten Maasse, auf welches sich der theoretische Ausdruck bezieht. Die zur Ermittlung dieses Verhältnisses nothwendigen Abmessungen liessen sich, weil keine besonderen Vorkehrungen dafür getroffen waren, nicht sämmtlich mit der erforderlichen Genauigkeit ausführen. In der That ist jedoch jener Faktor beiläufig so gut als die Umstände es gestatteten, durch direkte Abmessung wirklich bestimmt und = 49,5 gefunden worden. Auch dieses Resultat gewährt eine Uebereinstimmung mit dem rückwärts aus den Beobachtungen abgeleiteten, welche nach den Umständen nicht grösser erwartet werden konnte.

Beobachtungen zur Erweiterung des Gebiets elektrodynamischer Untersuchungen.

A. Beobachtung der Volta-Induktion.

Wird der bifilar aufgehangene Ring des Dynamometers in Schwingung versetzt, während durch ihn selbst oder durch den Multiplikatorring oder durch beide zugleich ein Strom geleitet wird, so ist jene Bewegung eine *inducirende,* durch die ein Strom in dem Leiter, durch welchen kein Strom ging, erregt wird, oder durch die der durch diesen Leiter gehende Strom verändert wird. Diese Erregungsart der Ströme heisst *Volta-Induktion.* Die inducirende Bewegung, d. i. die Geschwindigkeit des schwingenden Ringes, wird jederzeit durch die Wechselwirkung der durch Volta-Induktion erregten mit den durch die Ringe geleiteten Strömen verkleinert oder *gedämpft.* Diese von der Volta-Induktion *bewirkte Dämpfung* des schwingenden Ringes lässt sich genau beobachten, und zugleich lässt sich auch die Bewegung des schwingenden Ringes selbst, welche die Volta-Induktion *verursacht,* genau bestimmen, und diese doppelte Benutzung des Dynamometers gewährt die nothwendigen Data zur näheren Erforschung der Gesetze der Volta-Induktion.

Der in sich geschlossene bifilar aufgehangene Ring wurde in so grosse Schwingung gesetzt, als die Skale zu beobachten gestattete, und darauf seine Schwingungen von 0 an gezählt, so lange bis sie für genaue Beobachtungen zu klein wurden. Während dieser Zählung wurde von Zeit zu Zeit die Grösse des Schwingungsbogens gemessen. Diese Versuche wurden *zuerst* unter dem Einfluss der Volta-Induktion gemacht,

indem der Strom von drei Grove'schen Bechern durch den Multiplikatorring geleitet wurde, *sodann* wurden die nämlichen Versuche, nach Entfernung der Grove'schen Becher, ohne Volta-Induktion wiederholt.

Mit Volta-Induktion.		Ohne Volta-Induktion.	
Zählung der Schwingungen	Schwingungsbogen	Zählung der Schwingungen	Schwingungsbogen
0.	764,10	0.	650,80
9.	679,14	14.	601,43
18.	604,05	25.	564,90
35.	484,15	52.	485,28
47.	414,60	82.	409,62
57.	365,50	109.	353,08
74.	292,27	134.	306,70
85.	253,30	163.	261,08
103.	200,80	189.	226,33
118.	165,56	212.	198,68
130.	141,37	232.	178,26
143.	119,33	254.	157,98
157.	100,49	284.	134,17
179.	75,59	309.	116,30
196.	60,58	328.	105,25
210.	50,08	369.	83,68
—	—	387.	75,45

Es ergiebt sich aus der Vergleichung, dass die Abnahme der Grösse des Bogens, welche ohne den Einfluss der Induktion von einer Schwingung zur andern im Mittel den 180. Theil betrug, unter Mitwirkung der Induktion auf den 77. Theil stieg.

Substituirt man dem Multiplikatorringe mit dem durchgeleiteten Strome einen in elektromagnetischer Beziehung äquivalenten Magnet, so findet man die Abnahme des Bogens eben so gross, d. h. die Magneto-Induktion dieses Magneten gleich der Volta-Induktion des Stroms im Multiplikator.

Aus diesen Versuchen lässt sich auch die Geschwindigkeit ableiten, welche die inducirende Bewegung haben muss, wenn die Intensität des inducirten Stroms der des inducirenden gleich sein soll.

B. Bestimmung der Dauer momentaner Ströme nebst Anwendung auf physiologische Versuche.

Wenn die Intensität eines *fortdauernden* konstanten Stroms bestimmt werden soll, so kann man sich dazu sowohl des Galvanometers (der Sinus- oder Tangenten-Bussole), als auch des Dynamometers bedienen; ist es aber ein Strom blos von *momentaner* Dauer, dessen Intensität bestimmt werden soll, so reicht die Beobachtung eines von jenen beiden Instrumenten nicht hin, weil die beobachtete Ablenkung nicht

blos von der Intensität des Stroms, sondern auch von der Dauer desselben abhängt. Es ist daher nothwendig, um die Intensität des Stroms zu erfahren, auch seine Dauer zu bestimmen.

Die beiden Instrumente, nämlich das Galvanometer und Dynamometer, ergänzen nun einander so, dass wenn derselbe momentane Strom durch beide hindurch geht und die dadurch hervorgebrachte Ablenkung beider Iustrumente beobachtet wird, aus diesen beiden Beobachtungen sowohl die Dauer als auch die Intensität des momentanen Stroms bestimmt werden kann. Es gründet sich diese wechselseitige Ergänzung darauf, dass die beobachtete Ablenkung beider Instrumente von der Dauer des momentanen Stroms auf gleiche Weise abhängt, nämlich derselben proportional ist, dagegen aber von der Intensität des Stroms nicht auf gleiche Weise abhängt, weil die Ablenkung des Galvanometers der Stromintensität proportional ist.

s und ς bezeichne die Schwingungsdauer des Galvanometers und Dynamometers;

e' und ε' bezeichne die Ablenkung, in welcher beide Instrumente verharren, wenn durch beide derselbe fortdauernde konstante Strom von der Intensität i' geht;

e und ε bezeichne dagegen die Elongationsweite, zu welcher beide Instrumente in Folge eines momentanen Stroms von der Dauer ϑ und von der Intensität i gelangen; so ergiebt sich zur Bestimmung der *Dauer* ϑ folgende Gleichung:

$$\vartheta = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{s^2}{\varsigma} \cdot \frac{\varepsilon'}{e'^2} \cdot \frac{e^2}{\varepsilon},$$

zur Bestimmung der *Intensität* des Stroms i aber folgende Gleichung:

$$i = \frac{\varsigma}{s} \cdot \frac{e'}{\varepsilon'} \cdot i' \cdot \frac{\varepsilon}{e}.$$

s, ς, e', ε', i', e und ε sind hierin durch Beobachtung bestimmbare Grössen. Diese Verbindung des Dynamometers mit dem Galvanometer ist von besonderer Wichtigkeit in der Physiologie zur genaueren Erforschung der Nervenerregung durch galvanische Ströme. Denn es zeigt sich dabei, dass zumal Sinnesnerven durch fortdauernde Ströme schnell abgestumpft werden, und dass daher zu solchen Versuchen häufig momentane Ströme angewendet werden müssen. Die beobachteten Sinneseindrücke hängen dann aber weniger von der Dauer des Stroms als von seiner Intensität ab, und es ist nothwendig, beide zu kennen.

C. Wiederholung des AMPÈRE'*schen Fundamentalversuchs mit gemeiner Elektricität und Messung der Dauer des elektrischen Funkens bei Entladung einer Leidener Flasche.*

Aus dem Vorhergehenden ergiebt sich, dass die Wirkung eines Stroms auf das Dynamometer mehr von der Intensität des Stroms, deren

Quadrate sie proportional ist, als von der Dauer des Stroms, der sie einfach proportional ist, abhängt. Hieraus folgt, dass auch eine kleine Quantität Elektricität, wenn sie in recht kurzer Zeit durch das Dynamometer geführt wird, so also, dass sie zwar einen Strom von sehr kurzer Dauer aber sehr grosser Intensität bildet, eine wahrnehmbare Wirkung hervorbringen werde. Dies ist nun der Fall, wenn man die geringe Quantität Elektricität, welche sich in einer Leydener Flasche oder Batterie ansammeln lässt, bei der Entladung durch das Dynamometer führt. Hierdurch wurde es möglich, den bisher nur mit starken galvanischen Säulen gemachten Ampère'schen Fundamentalversuch, auch mit gemeiner Elektricität darzustellen.

Wurde dieselbe, in Leydener Flaschen angesammelte, Elektricität, welche durch das Dynamometer geführt wurde, noch ausserdem durch ein Galvanometer geleitet und die dadurch in beiden Instrumenten hervorgebrachte Elongation gemessen, so konnte daraus nach den oben gegebenen Regeln die Dauer des Stroms, d. i. die Dauer des elektrischen Funkens bei der Entladung der Leydener Flasche, und zugleich die Intensität des Stroms bestimmt werden, vorausgesetzt, dass man den Strom während seiner kurzen Dauer als gleichförmig betrachten dürfe.

Es ist bekannt, dass man bei solchen Versuchen die Entladung der Leydener Flaschen durch eine nasse Schnur bewirkt, um zu verhindern, dass die Entladung, statt durch die dünnen Drähte der beiden Instrumente, durch die Luft erfolge.

Auf diese Weise wurde eine Versuchsreihe gemacht, wo die Entladung einer Batterie von 8 Flaschen durch eine nasse hanfene Schnur von 7 Millimetern Dicke und verschiedener Länge bewerkstelligt wurde, woraus sich folgende Resultate ergaben:

Länge der Schnur.	Dauer des Funkens.
Millimeter	Sekunden
2000	0,0851
1000	0,0345
500	0,0187
250	0,0095

Die Dauer des Funkens war hiernach der Länge der Schnur nahe proportional; denn die beobachtete Dauer des Funkens ist:

Sekunden
0,0816 + 0,0035
0,0408 — 0,0063
0,0204 — 0,0017
0,0102 — 0,0007

Hierin ist der erste Theil der Funkendauer der Länge der Schnur genau proportional, der zweite Theil aber ist so klein, dass er auf Rech-

nung der Beobachtungsfehler, welche hierbei unvermeidlich waren, gesetzt werden kann.

Man sieht leicht, dass hiermit das von Wheatstone gefundene Resultat, wornach die Dauer des Funkens bei Entladungen durch blos metallische Leiter gegen die hier gefundene Dauer verschwindend klein ist, in vollkommenem Einklange steht.

D. Anwendungen des Dynamometers auf Intensitätsmessungen der Schallschwingungen.

Bei einem schnellen Wechsel positiver und negativer Ströme in einem Leitungsdrahte verwandelt sich die Strombewegung der Elektricität in eine *Schwingung.* Eine solche Schwingung der Elektricität lässt sich aber mit einem Galvanometer (z. B. mit einer Sinus- oder Tangentenbussole) nicht beobachten, weil hier die Wirkungen der auf einander folgenden entgegengesetzten Schwingungen sich aufheben.

Anders verhält es sich aber bei einem Dynamometer, in dessen beiden Ringen die Richtung der Schwingung immer gleichzeitig wechselt und die beobachtete Ablenkung dem Quadrate der Stromintensität proportional ist. Es ergiebt sich nämlich hieraus von selbst, dass der gleichzeitige Wechsel der Richtung in beiden Ringen keinen Einfluss auf die Wirkung habe, weil beim Dynamometer von einem durch beide Ringe geleiteten negativen Strom eine Ablenkung nach derselben Seite hervorgebracht wird, wie von einem durch beide Ringe geleiteten positiven Strom. Ob die Ablenkung des Dynamometers nach der einen oder nach der anderen Seite geschieht, hängt nicht wie beim Galvanometer von der Richtung des durchgehenden Stroms, sondern blos von der Verbindung der Drahtenden beider Ringe ab.

Nun lässt sich aber eine elektrische Schwingung in einem Leitungsdrahte durch einen stählernen magnetisirten Klangstab leicht hervorbringen, wenn ein Theil des Leitungsdrahts als Induktorring das frei schwingende Ende des Klangstabs so umgiebt, dass die Richtung der Schwingungen gegen die Ebene der Drahtwindungen senkrecht ist. Alle Schwingungen des Klangstabs nach der einen Seite induciren dann im Drahte positive Ströme, alle Schwingungen nach der anderen Seite negative Ströme, die so schnell auf einander folgen, wie die Schallschwingungen selbst.

Sind nun die Drahtenden des Induktorrings mit den Drahtenden des Dynamometers verbunden, so beobachtet man eine Ablenkung des letzteren während der Schwingung des Klangstabs, die sich genau messen lässt. Diese Ablenkung bleibt so lange unverändert, als die Intensität der Schallschwingungen unverändert bleibt, nimmt aber schnell ab bei abnehmender Intensität der Schallschwingungen, und beträgt,

wenn die Amplitude der Schallschwingungen auf die Hälfte herabgesunken ist, nur noch den vierten Theil.

Das Dynamometer bietet auf diese Weise ein Hülfsmittel, die Intensität der Schallschwingungen zu messen, welches von Wichtigkeit ist, weil es noch sehr an geeigneten Methoden für diese Messungen gebricht.

Ausser den bisher betrachteten auf den Gebrauch des Dynamometers begründeten Untersuchungen giebt es noch andere, welche in der Folge behandelt werden sollen, wobei auch einige Modifikationen in der Konstruktion dieses Instruments für besondere Zwecke genauer erörtert werden sollen.

Ueber den Zusammenhang des Grundprincips der Elektrodynamik mit dem der Elektrostatik.

Das Grundprincip der Elektrostatik ist, dass wenn zwei elektrische (positive oder negative) Massen, welche durch e und e' bezeichnet werden, in der Entfernung r von einander sich befinden, die Grösse der Kraft, mit welcher beide Massen auf einander wechselseitig wirken, durch den Ausdruck

$$\frac{ee'}{r^2}$$

gegeben sei, und zwar, dass Abstossung oder Anziehung Statt finde, je nachdem dieser Ausdruck einen positiven oder negativen Werth hat.

Das Grundprincip der Elektrodynamik ist dagegen folgendes: Wenn zwei Stromelemente von der Länge α und α' und der Intensität i und i' in der Entfernung $= r$ von einander so liegen, dass die Richtungen, nach denen sich die positive Elektricität in beiden Elementen bewegt, mit einander den Winkel ε und mit der verbindenden Gerade die Winkel ϑ und ϑ' einschliessen, so wird die Grösse der Kraft, mit welcher beide Stromelemente auf einander wechselseitig wirken, durch den Ausdruck

$$-\frac{\alpha\alpha' i i'}{r^2}(\cos\varepsilon - \tfrac{3}{2}\cos\vartheta\cos\vartheta')$$

bestimmt, und zwar Abstossung oder Anziehung, je nachdem dieser Ausdruck einen positiven oder negativen Werth hat. Die S. 229 und 230 entwickelten Ausdrücke für das von einem Ringe des Dynamometers auf den andern ausgeübte Drehungsmoment, sind sämmtlich aus diesem Grundprincipe abgeleitet.

Von den beiden angeführten Grundprincipen bezieht sich das *erstere* auf zwei elektrische Massen und deren Wechselwirkung, das *letztere* auf zwei Stromelemente und deren Wechselwirkung. Ein innerer Zu-

sammenhang zwischen beiden kann nur dadurch erzielt werden, dass man auch in den Stromelementen auf die Betrachtung der elektrischen Massen, welche in den Stromelementen sich befinden, und ihre Wechselwirkung zurückgeht.

Es fragt sich also zunächst, was für elektrische Massen in den beiden Stromelementen enthalten seien, und von welchen gegenseitigen Verhältnissen dieser Massen ihre gegenseitigen Wechselwirkungen abhängen können.

Bezeichnet man mit e die Masse der positiven Elektricität, welche in einem der Längeneinheit gleichen Stücke des Leitungsdrahts enthalten ist, und folglich mit αe die Masse der positiven Elektricität, welche in dem Stromelemente, dessen Länge $= \alpha$ ist, enthalten ist, und bezeichnet ferner u die Geschwindigkeit, mit welcher diese Masse sich bewegt, so drückt das Produkt eu diejenige Masse positiver Elektricität aus, welche während der Zeiteinheit durch jeden Querschnitt des Leitungsdrahts geht, mit welcher die Stromintensität i proportional zu setzen ist; folglich, wenn a einen konstanten Faktor bezeichnet,

$$aeu = i.$$

Ist nun αe die Masse der positiven Elektricität in dem Stromelemente α, und u ihre Geschwindigkeit, so ist $-\alpha e$ die Masse der negativen Elektricität in demselben Stromelemente, und $-u$ deren Geschwindigkeit.

Ebenso ergiebt sich, wenn

$$ae'u' = i'$$

gesetzt wird, $\alpha' e'$ als Masse der positiven Elektricität in dem zweiten Stromelemente α', und u' als deren Geschwindigkeit, und endlich $-\alpha' e'$ als Masse der negativen Elektricität, und $-u'$ als deren Geschwindigkeit.

Substituirt man nun für i und i' in dem Ausdrucke der Kraft, welche ein Stromelement auf das andere ausübt, ihre Werthe $i = aeu$ und $i' = ae'u'$, so erhält man dafür

$$-\frac{\alpha e \,.\, \alpha' e'}{r^2} \cdot a^2 uu' \cdot (\cos\varepsilon - \tfrac{3}{2}\cos\vartheta\cos\vartheta').$$

Betrachtet man nun *erstens* in diesem Ausdrucke $\alpha e \,.\, \alpha' e'$ als das Produkt der *positiv* elektrischen Massen αe und $\alpha' e'$ in den beiden Stromelementen, und uu' als das Produkt ihrer Geschwindigkeiten u und u', und bezeichnet man mit $r_{\prime}$ die veränderliche Entfernung dieser beiden sich bewegenden Massen, endlich noch mit $s_{\prime}$ und $s_{\prime}'$ die Länge eines Stücks von jedem der beiden Leitungsdrähte, zu denen die betrachteten Stromelemente α und α' gehören, von einem bestimmten Anfangspunkte an gerechnet, in der Richtung fortgegangen, in welcher die *positive* Elektricität strömt, bis zu dem betrachteten Stromelemente, so weiss man,

dass die Kosinusse der beiden Winkel ϑ und ϑ', welche die beiden Leitungsdrähte an der Stelle der betrachteten Stromelemente mit der verbindenden Geraden $r_{,}$ machen, durch die partiellen Differentialquotienten von $r_{,}$ in Beziehung auf $s_{,}$ und $s'_{,}$ dargestellt werden können, nämlich

$$\cos\vartheta = \frac{dr_{,}}{ds_{,}}, \qquad \cos\vartheta' = -\frac{dr_{,}}{ds'_{,}},$$

und es ergiebt sich dann für den Kosinus des Winkels ε, welchen die Richtungen der beiden Leitungsdrähte an den betrachteten Stellen mit einander bilden,

$$\cos\varepsilon = -r_{,}\frac{d^2r_{,}}{ds_{,}ds'_{,}} - \frac{dr_{,}}{ds_{,}}\frac{dr_{,}}{ds'_{,}}.$$

Substituirt man nun auch für die Kosinusse der drei Winkel ε, ϑ und ϑ' die angeführten Differentialquotienten, so erhält man für den Ausdruck der Kraft, mit welcher das eine Stromelement auf das andere wirkt,

$$-\frac{ae\,.\,a'e'}{r_{,}^2}\cdot a^2uu'\cdot\left(\frac{1}{2}\frac{dr_{,}}{ds_{,}}\frac{dr_{,}}{ds'_{,}} - r_{,}\frac{d^2r_{,}}{ds_{,}ds'_{,}}\right).$$

Betrachtet man *zweitens* in obigem Ausdrucke $-ae\,.\,a'e'$ als das Produkt der *positiv* elektrischen Masse ae des einen Stromelements a in die *negativ* elektrische Masse $-a'e'$ des anderen Stromelements a', und $-uu'$ als das Produkt ihrer Geschwindigkeiten u und $-u'$, bezeichnet ferner mit $r_{,,}$ die veränderliche Entfernung dieser beiden sich bewegenden Massen und mit $s_{,}$ und $s'_{,,}$ die Länge eines Stücks von jedem der beiden Leitungsdrähte, zu denen die betrachteten Stromelemente gehören, von einem bestimmten Anfangspunkte an gerechnet, in der Richtung fortgegangen, in welcher in dem ersten die *positive*, in dem zweiten die *negative* Elektricität strömt, bis zu dem betrachteten Stromelemente, so erhält man auf gleiche Weise

$$\cos\vartheta = \frac{dr_{,,}}{ds_{,}}, \qquad \cos\vartheta' = \frac{dr_{,,}}{ds'_{,,}}, \qquad \cos\varepsilon = r_{,,}\frac{d^2r_{,,}}{ds_{,}ds'_{,,}} + \frac{dr_{,,}}{ds_{,}}\frac{dr_{,,}}{ds'_{,,}}.$$

Substituirt man nun diese Werthe, so erhält man folgenden Ausdruck für die Kraft, mit welcher das eine Stromelement auf das andere wirkt,

$$+\frac{ae\,.\,a'e'}{r^2_{,,}}\cdot a^2uu'\cdot\left(\frac{1}{2}\frac{dr_{,,}}{ds_{,}}\frac{dr_{,,}}{ds'_{,,}} - r_{,,}\frac{d^2r_{,,}}{ds_{,}ds'_{,,}}\right).$$

Betrachtet man *drittens* in dem ursprünglichen Ausdrucke $ae\,.\,a'e'$ als das Produkt der *negativ* elektrischen Massen $-ae$ und $-a'e'$ in den beiden Stromelementen, und uu' als das Produkt ihrer Geschwindigkeiten $-u$ und $-u'$, und bezeichnet mit $r_{,,,}$ die veränderliche Entfernung dieser beiden sich bewegenden Massen, endlich noch mit $s_{,,}$ und $s'_{,,}$ die Länge eines Stücks von jedem der beiden Leitungsdrähte, zu denen

die betrachteten Stromelemente gehören, von einem bestimmten Anfangspunkte an gerechnet, in der Richtung fortgegangen, in welcher die *negative* Elektricität strömt, bis zu dem betrachteten Stromelemente, so erhält man

$$\cos\vartheta = -\frac{dr_{,,,}}{ds_{,,}}, \qquad \cos\vartheta' = \frac{dr_{,,,}}{ds'_{,,}}, \qquad \cos\varepsilon = -r_{,,,}\frac{d^2r_{,,,}}{ds_{,,}ds'_{,,}} - \frac{dr_{,,,}}{ds_{,,}}\frac{dr_{,,,}}{ds'_{,,}}.$$

Substituirt man nun diese Werthe, so erhält man für die Kraft, mit welcher das eine Stromelement auf das andere wirkt, einen dritten Ausdruck, nämlich:

$$-\frac{ae\,.\,a'e'}{r^2_{,,,}}\cdot a^2uu'\cdot\left(\frac{1}{2}\frac{dr_{,,,}}{ds_{,,}}\frac{dr_{,,,}}{ds'_{,,}} - r_{,,,}\frac{d^2r_{,,,}}{ds_{,,}ds'_{,,}}\right).$$

Betrachtet man endlich *viertens* in dem ursprünglichen Ausdrucke $-ae\,.\,a'e'$ als das Produkt der *negativ* elektrischen Masse $-ae$ des Stromelements a in die *positiv* elektrische Masse $a'e'$ des Stromelements a', und $-uu'$ als das Produkt ihrer Geschwindigkeiten $-u$ und u', bezeichnet ferner mit $r_{,,,,}$ die veränderliche Entfernung dieser beiden sich bewegenden Massen und mit $s_{,,}$ und $s'_{,}$ die Länge eines Stücks von jedem der beiden Leitungsdrähte, zu denen die betrachteten Stromelemente gehören, von einem bestimmten Anfangspunkte an gerechnet, in der Richtung fortgegangen, in welcher in dem ersten die *negative*, in dem zweiten die *positive* Elektricität strömt, so erhält man

$$\cos\vartheta = -\frac{dr_{,,,,}}{ds_{,,}}, \qquad \cos\vartheta' = -\frac{dr_{,,,,}}{ds'_{,}}, \qquad \cos\varepsilon = r_{,,,,}\frac{d^2r_{,,,,}}{ds_{,,}ds'_{,}} + \frac{dr_{,,,,}}{ds_{,,}}\frac{dr_{,,,,}}{ds'_{,}}.$$

Substituirt man nun diese Werthe, so erhält man für die Kraft, mit welcher ein Stromelement auf das andere wirkt, den vierten Ausdruck:

$$+\frac{ae\,.\,a'e'}{r^2_{,,,,}}\cdot a^2uu'\cdot\left(\frac{1}{2}\frac{dr_{,,,,}}{ds_{,,}}\frac{dr_{,,,,}}{ds'_{,}} - r_{,,,,}\frac{d^2r_{,,,,}}{ds_{,,}ds'_{,}}\right).$$

In dem Augenblicke nun, wo die betrachteten elektrischen Massen in den beiden Elementen a und a' sich befinden, haben die veränderlichen Entfernungen $r_{,}$, $r_{,,}$, $r_{,,,}$, $r_{,,,,}$ alle gleichen Werth, welcher mit r bezeichnet wird. Hierdurch verwandeln sich die vier gefundenen Ausdrücke der elektrodynamischen Kraft der beiden Stromelemente a und a' in folgende:

$$(1)\qquad -\frac{ae\,.\,a'e'}{r^2}\cdot a^2uu'\cdot\left(\frac{1}{2}\frac{dr_{,}}{ds_{,}}\frac{dr_{,}}{ds'_{,}} - r\frac{d^2r_{,}}{ds_{,}ds'_{,}}\right),$$

$$(2)\qquad +\frac{ae\,.\,a'e'}{r^2}\cdot a^2uu'\cdot\left(\frac{1}{2}\frac{dr_{,,}}{ds_{,}}\frac{dr_{,,}}{ds'_{,,}} - r\frac{d^2r_{,,}}{ds_{,}ds'_{,,}}\right),$$

$$(3)\qquad -\frac{ae\,.\,a'e'}{r^2}\cdot a^2uu'\cdot\left(\frac{1}{2}\frac{dr_{,,,}}{ds_{,,}}\frac{dr_{,,,}}{ds'_{,,}} - r\frac{d^2r_{,,,}}{ds_{,,}ds'_{,,}}\right),$$

$$(4)\qquad +\frac{ae\,.\,a'e'}{r^2}\cdot a^2uu'\cdot\left(\frac{1}{2}\frac{dr_{,,,,}}{ds_{,,}}\frac{dr_{,,,,}}{ds'_{,}} - r\frac{d^2r_{,,,,}}{ds_{,,}ds'_{,}}\right),$$

woraus sich noch der 5. Ausdruck bilden lässt, nämlich (5):

$$-\frac{ae\,.\,a'e'}{r^2}\cdot\frac{a^2}{4}\cdot uu'\cdot\left[\frac{1}{2}\left(\frac{dr_{,}}{ds_{,}}\frac{dr_{,}}{ds_{,}'}-\frac{dr_{,,}}{ds_{,}}\frac{dr_{,,}}{ds'_{,,}}+\frac{dr_{,,,}}{ds_{,,}}\frac{dr_{,,,}}{ds'_{,,}}-\frac{dr_{,,,,}}{ds_{,,}}\frac{dr_{,,,,}}{ds_{,}'}\right)\right.$$
$$\left.-r\left(\frac{d^2r_{,}}{ds_{,}ds'_{,}}-\frac{d^2r_{,,}}{ds_{,}ds'_{,,}}+\frac{d^2r_{,,,}}{ds_{,,}ds'_{,,}}-\frac{d^2r_{,,,,}}{ds_{,,}ds'_{,}}\right)\right].$$

Die vier veränderlichen Entfernungen $r_{,}$, $r_{,,}$, $r_{,,,}$, $r_{,,,,}$ sind nun respektive abhängig von der veränderlichen Grösse der Wege, $s_{,}$ und $s_{,}'$, $s_{,}$ und $s_{,,}'$, $s_{,,}$ und $s_{,,}'$, $s_{,,}$ und $s_{,}'$, welche die beweglichen Massen, auf welche sie sich beziehen, in den beiden gegebenen Leitungsdrähten zurückgelegt haben, und die folglich wiederum Funktionen der Zeit t sind. Entwickelt man ihre vollständigen Differentiale, so erhält man:

$$dr_{,}=\frac{dr_{,}}{ds_{,}}ds_{,}+\frac{dr_{,}}{ds_{,}'}ds_{,}',$$

$$dr_{,,}=\frac{dr_{,,}}{ds_{,}}ds_{,}+\frac{dr_{,,}}{ds'_{,,}}ds'_{,,},$$

$$dr_{,,,}=\frac{dr_{,,,}}{ds_{,,}}ds_{,,}+\frac{dr_{,,,}}{ds'_{,,}}ds'_{,,},$$

$$dr_{,,,,}=\frac{dr_{,,,,}}{ds_{,,}}ds_{,,}+\frac{dr_{,,,,}}{ds_{,}'}ds_{,}';$$

ferner:

$$d^2r_{,}=\frac{d^2r_{,}}{ds_{,}^2}ds_{,}^2+2\frac{d^2r_{,}}{ds_{,}ds_{,}'}ds_{,}ds_{,}'+\frac{d^2r_{,}}{ds_{,}'^2}ds_{,}'^2,$$

$$d^2r_{,,}=\frac{d^2r_{,,}}{ds_{,}^2}ds_{,}^2+2\frac{d^2r_{,,}}{ds_{,}ds'_{,,}}ds_{,}ds'_{,,}+\frac{d^2r_{,,}}{ds_{,,}'^2}ds'^2_{,,},$$

$$d^2r_{,,,}=\frac{d^2r_{,,,}}{ds^2_{,,}}ds^2_{,,}+2\frac{d^2r_{,,,}}{ds_{,,}ds'_{,,}}ds_{,,}ds'_{,,}+\frac{d^2r_{,,,}}{ds'^2_{,,}}ds'^2_{,,},$$

$$d^2r_{,,,,}=\frac{d^2r_{,,,,}}{ds^2_{,,}}ds^2_{,,}+2\frac{d^2r_{,,,,}}{ds_{,,}ds_{,}'}ds_{,,}ds_{,}'+\frac{d^2r_{,,,,}}{ds_{,}'^2}ds_{,}'^2.$$

Dividirt man diese Differentialwerthe resp. mit dem Zeitelemente dt und dessen Quadrate dt^2, und beachtet, dass

$$\frac{ds_{,}}{dt}=\frac{ds_{,,}}{dt}=u,\qquad\frac{ds_{,}'}{dt}=\frac{ds'_{,,}}{dt}=u'$$

ist, so erhält man:

$$\frac{dr_{,}}{dt}=u\frac{dr_{,}}{ds_{,}}+u'\frac{dr_{,}}{ds_{,}'},$$

$$\frac{dr_{,,}}{dt}=u\frac{dr_{,,}}{ds_{,}}+u'\frac{dr_{,,}}{ds'_{,,}},$$

$$\frac{dr_{,,,}}{dt} = u\frac{dr_{,,,}}{ds_{,,}} + u'\frac{dr_{,,,}}{ds'_{,,}},$$

$$\frac{dr_{,,,,}}{dt} = u\frac{dr_{,,,,}}{ds_{,,}} + u'\frac{dr_{,,,,}}{ds'_{,}};$$

ferner:

$$\frac{d^2r_{,}}{dt^2} = u^2\frac{d^2r_{,}}{ds_{,}^2} + 2uu'\frac{d^2r_{,}}{ds_{,}ds'_{,}} + u'^2\frac{d^2r_{,}}{ds'^2_{,}},$$

$$\frac{d^2r_{,,}}{dt^2} = u^2\frac{d^2r_{,,}}{ds_{,}^2} + 2uu'\frac{d^2r_{,,}}{ds_{,}ds'_{,,}} + u'^2\frac{d^2r_{,,}}{ds'^2_{,,}},$$

$$\frac{d^2r_{,,,}}{dt^2} = u^2\frac{d^2r_{,,,}}{ds_{,,}^2} + 2uu'\frac{d^2r_{,,,}}{ds_{,,}ds'_{,,}} + u'^2\frac{d^2r_{,,,}}{ds'^2_{,,}},$$

$$\frac{d^2r_{,,,,}}{dt^2} = u^2\frac{d^2r_{,,,,}}{ds_{,,}^2} + 2uu'\frac{d^2r_{,,,,}}{ds_{,,}ds'_{,}} + u'^2\frac{d^2r_{,,,,}}{ds'^2_{,}}.$$

Aus den vier letzten Gleichungen ergiebt sich unmittelbar:

$$2uu'\frac{d^2r_{,}}{ds_{,}ds'_{,}} = +\frac{d^2r_{,}}{dt^2} - u^2\frac{d^2r_{,}}{ds_{,}^2} - u'^2\frac{d^2r_{,}}{ds'^2_{,}},$$

$$-2uu'\frac{d^2r_{,,}}{ds_{,}ds'_{,,}} = -\frac{d^2r_{,,}}{dt^2} + u^2\frac{d^2r_{,,}}{ds_{,}^2} + u'^2\frac{d^2r_{,,}}{ds'^2_{,,}},$$

$$2uu'\frac{d^2r_{,,,}}{ds_{,}ds'_{,,}} = +\frac{d^2r_{,,,}}{dt^2} - u^2\frac{d^2r_{,,,}}{ds_{,,}^2} - u'^2\frac{d^2r_{,,,}}{ds'^2_{,,}},$$

$$-2uu'\frac{d^2r_{,,,,}}{ds_{,,}ds'_{,}} = -\frac{d^2r_{,,,,}}{dt^2} + u^2\frac{d^2r_{,,,,}}{ds_{,,}^2} + u'^2\frac{d^2r_{,,,,}}{ds'^2_{,}}.$$

Nun haben die Differentialquotienten $d^2r_{,}/ds_{,}^2$, $d^2r_{,,}/ds_{,}^2$, $d^2r_{,,,}/ds_{,,}^2$, $d^2r_{,,,,}/ds_{,,}^2$ einen gleichen, blos von der Lage und Gestalt des *ersten* Leitungsdrahts abhängigen Werth, welcher mit d^2r/ds^2 bezeichnet werden soll. Dasselbe gilt auch von den Differentialquotienten $d^2r_{,}/ds'^2_{,}$, $d^2r_{,,}/ds'^2_{,,}$, $d^2r_{,,,}/ds'^2_{,,}$, $d^2r_{,,,,}/ds'^2_{,}$, welche alle dieselbe blos von der Lage und Gestalt des *zweiten* Leitungsdrahts abhängige Grösse bezeichnen, für welche kurz d^2r/ds'^2 geschrieben werden soll. Summirt man, mit Rücksicht hierauf, die letzen vier Gleichungen, so erhält man:

$$2uu'\left(\frac{d^2r_{,}}{ds_{,}ds'_{,}} - \frac{d^2r_{,,}}{ds_{,}ds'_{,,}} + \frac{d^2r_{,,,}}{ds_{,,}ds'_{,,}} - \frac{d^2r_{,,,,}}{ds_{,,}ds'_{,}}\right) = \frac{d^2r_{,}}{dt^2} - \frac{d^2r_{,,}}{dt^2} + \frac{d^2r_{,,,}}{dt^2} - \frac{d^2r_{,,,,}}{dt^2}.$$

Aus den vier ersten Gleichungen ergiebt sich aber, nachdem man sie quadrirt hat:

$$2uu'\frac{dr_{,}}{ds_{,}}\frac{dr_{,}}{ds'_{,}} = +\frac{dr_{,}^2}{dt^2} - u^2\frac{dr_{,}^2}{ds_{,}^2} - u'^2\frac{dr_{,}^2}{ds'^2_{,}};$$

$$-2uu'\frac{dr_{,,}}{ds_{,}}\frac{dr_{,,}}{ds'_{,,}} = -\frac{dr_{,,}^2}{dt^2} + u^2\frac{dr_{,,}^2}{ds_{,}^2} + u'^2\frac{dr_{,,}^2}{ds'^2_{,,}},$$

$$2uu'\frac{dr_{,,,}}{ds_{,,}}\frac{dr_{,,,}}{ds_{,,}'}=+\frac{dr_{,,,}^2}{dt^2}-u^2\frac{dr'^{\,2}_{,,}}{ds_{,,,}^2}-u'^2\frac{dr_{,,,}^2}{ds'^{\,2}_{,,}},$$

$$-2uu'\frac{dr_{,,,,}}{ds_{,,}}\frac{dr_{,,,,}}{ds_{,}'}=-\frac{dr_{,,,,}^2}{dt^2}+u^2\frac{dr_{,,,,}^2}{ds_{,,}^2}+u'^2\frac{dr_{,,,,}^2}{ds_{,}'^2}.$$

Nun haben auch die Differentialquotienten $dr_{,}^2/ds_{,}^2$, $dr_{,,}^2/ds_{,}^2$, $dr_{,,,}^2/ds_{,,}^2$, $dr_{,,,,}^2/ds_{,,}^2$ gleichen Werth, welcher mit dr^2/ds^2 bezeichnet werde, und ebenso $dr_{,}^2/ds_{,}'^2$, $dr_{,,}^2/ds'^{\,2}_{,,}$, $dr_{,,,}^2/ds'^{\,2}_{,,}$, $dr_{,,,,}^2/ds_{,}'^2$, welcher mit dr^2/ds'^2 bezeichnet werde. Summirt man mit Rücksicht hierauf, so erhält man:

$$2uu'\left(\frac{dr_{,}}{ds_{,}}\frac{dr_{,}}{ds_{,}'}-\frac{dr_{,,}}{ds_{,}}\frac{dr_{,,}}{ds'_{,,}}+\frac{dr_{,,,}}{ds_{,,}}\frac{dr_{,,,}}{ds'_{,,}}-\frac{dr_{,,,,}}{ds_{,,}}\frac{dr_{,,,,}}{ds_{,}'}\right)=\frac{dr_{,}^2}{dt^2}-\frac{dr_{,,}^2}{dt^2}+\frac{dr_{,,,}^2}{dt^2}-\frac{dr_{,,,,}^2}{dt^2}.$$

Substituirt man diese Werthe in den gefundenen fünften Ausdruck der elektrodynamischen Kraft, so erhält man dafür:

$$-\frac{ae\,.\,a'e'}{r^2}\cdot\frac{a^2}{16}\left[\left(\frac{dr_{,}^2}{dt^2}-\frac{dr_{,,}^2}{dt^2}+\frac{dr_{,,,}^2}{dt^2}-\frac{dr_{,,,,}^2}{dt^2}\right)\right.$$
$$\left.-2r\left(\frac{d^2r_{,}}{dt^2}-\frac{d^2r_{,,}}{dt^2}+\frac{d^2r_{,,,}}{dt^2}-\frac{d^2r_{,,,,}}{dt^2}\right)\right],$$

ein Ausdruck, der sich in folgende vier Glieder auflösen lässt:

$$-\frac{ae\,.\,a'e'}{r_{,}^2}\cdot\frac{a^2}{16}\left(\frac{dr_{,}^2}{dt^2}-2r_{,}\frac{d^2r_{,}}{dt^2}\right),$$

$$+\frac{ae\,.\,a'e'}{r_{,,}^2}\cdot\frac{a^2}{16}\left(\frac{dr_{,,}^2}{dt^2}-2r_{,,}\frac{d^2r_{,,}}{dt^2}\right),$$

$$-\frac{ae\,.\,a'e'}{r_{,,,}^2}\cdot\frac{a^2}{16}\left(\frac{dr_{,,,}^2}{dt^2}-2r_{,,,}\frac{d^2r_{,,,}}{dt^2}\right),$$

$$+\frac{ae\,.\,a'e'}{r_{,,,,}^2}\cdot\frac{a^2}{16}\left(\frac{dr_{,,,,}^2}{dt^2}-2r_{,,,,}\frac{d^2r_{,,,,}}{dt^2}\right).$$

Jedes dieser vier Glieder bezieht sich nun ausschliesslich auf *zwei* von den vier in den beiden Stromelementen unterschiedenen elektrischen Massen, nämlich das *erste* Glied auf die beiden positiven Massen ae und $a'e'$, deren relative Entfernung $r_{,}$, Geschwindigkeit $dr_{,}/dt$ und Beschleunigung $d^2r_{,}/dt^2$ ist; das *zweite* auf die positive Masse ae im ersten und auf die negative Masse $-a'e'$ im zweiten Elemente, deren relative Entfernung $r_{,,}$, Geschwindigkeit $dr_{,,}/dt$ und Beschleunigung $d^2r_{,,}/dt^2$ ist u. s. f., und zwar sind alle vier Glieder aus den Massen, auf welche sie sich beziehen, deren Entfernung, Geschwindigkeit und Beschleunigung *auf ganz gleiche Weise* zusammengesetzt.

Hieraus ergiebt sich nun, dass, wenn der ganze Ausdruck der elektrodynamischen Kraft zweier Stromelemente als die Summe der Kräfte betrachtet wird, welche je zwei von den vier darin enthaltenen

elektrischen Massen auf einander ausüben, jene Summe in ihre *ursprünglichen Bestandtheile* zerlegt worden sei, indem die obigen vier Glieder einzeln die vier Kräfte darstellen, welche die vier elektrischen Massen in den beiden Elementen *paarweise* aufeinander ausüben.

Hiernach würde also die Kraft, mit welcher eine beliebige positive oder negative Masse E auf eine beliebige andere positive oder negative Masse E' in der Entfernung R, bei einer relativen Geschwindigkeit dR/dt und Beschleunigung d^2R/dt^2, wirkt, ausgedrückt werden können durch

$$-\frac{a^2}{16}\cdot\frac{EE'}{R^2}\left(\frac{dR^2}{dt^2}-2R\frac{d^2R}{dt^2}\right);$$

denn dieses Grundprincip ist nothwendig und genügt, um daraus die Ampère'schen elektrodynamischen Gesetze abzuleiten, welche durch obige Messungen bestätigt worden sind.

Dieses neue Grundprincip der Elektrodynamik ist aber seiner Natur nach ein *allgemeineres* als das früher von Ampère aufgestellte; denn letzteres bezieht sich blos auf den speciellen Fall, wo vier elektrische Massen zugleich gegeben sind, die sich unter den bei unveränderlichen und unverrückten Stromelementen vorausgesetzten Verhältnissen befinden, während eine solche Beschränkung auf die angegebenen Verhältnisse bei dem ersteren nicht Statt findet. Es gestattet also dieses Grundprincip auch eine Anwendung in solchen Fällen, wo jenes unanwendbar ist, und es beruht hierauf seine grössere Fruchtbarkeit.

Vergleicht man nun endlich das gefundene neue Grundprincip der Elektrodynamik mit dem zu Anfang erwähnten Grundprincipe der Elektrostatik, so ersieht man, dass jedes eine Kraft bestimmt, welche *zwei elektrische Massen* auf einander ausüben: dass aber in den bisher betrachteten Fällen eine von beiden Kräften jedesmal verschwindet, weshalb nur die andere berücksichtigt zu werden braucht. Dies findet nämlich *erstens* bei allen zur Elektrostatik gehörigen Fällen Statt, weil hier die durch das neue Princip der Elektrodynamik bestimmte Kraft stets verschwindet; dasselbe findet aber auch *zweitens* bei allen bisher betrachteten zur Elektrodynamik gehörigen Fällen Statt, wo stets solche Verhältnisse vorausgesetzt wurden, bei welchen sich alle durch das Princip der Elektrostatik bestimmten Kräfte wechselseitig aufhoben.

Beide Principe ergänzen also einander, und lassen sich daher zu einem allgemeinen Grundprincipe *für die ganze Elektricitätslehre*, welche Elektrostatik und Elektrodynamik zugleich umfasst, zusammenfügen.

Durch das Grundprincip der Elektrostatik wurde für zwei elektrische Massen E und E' in der Entfernung R eine Kraft gegeben

$$=\frac{EE'}{R^2};$$

fügt man also diese Kraft derjenigen noch hinzu, welche nach dem neuen Princip der Elektrodynamik gegeben ist:

$$=-\frac{a^2}{16}\cdot\frac{EE'}{R^2}\left(\frac{dR^2}{dt^2}-2\frac{d^2R}{dt^2}\right),$$

so erhält man als den allgemeinen Ausdruck zur vollständigen Bestimmung der Kraft, welche eine beliebige elektrische Masse E auf eine andere E' ausübt, sie mögen ruhen oder sich bewegen:

$$\frac{EE'}{R^2}\left(1-\frac{a^2}{16}\cdot\frac{dR^2}{dt^2}+\frac{a^2}{8}\cdot R\frac{d^2R}{dt^2}\right).$$

Für ein bestimmtes der Zeitmessung zum Grunde gelegtes Maass, für welches $a=4$ ist, verwandelt sich dieser Ausdruck in:

$$\frac{EE'}{R^2}\left(1-\frac{dR^2}{dt^2}+2R\frac{d^2R}{dt^2}\right).$$

Beachtet man ferner, dass R sowohl wie auch dR/dt Funktionen von t sind, und dass folglich dR/dt auch als Funktion von R anzusehen sei, welche mit $[R]$ bezeichnet werden soll, so kann man auch sagen, dass das *Potential* der Masse E, in Beziehung auf den Ort der Masse E',

$$=\frac{E}{R}(1-[R]^2)$$

sei; denn die partiellen Differentialquotienten dieses Ausdrucks nach den drei Koordinaten x, y, z geben die Komponenten der nach den Richtungen der drei Koordinatenaxen zerlegten beschleunigenden Kraft.

Versteht man endlich unter *reducirter relativer Geschwindigkeit* der Massen E und E' diejenige relative Geschwindigkeit, welche diesen Massen, denen in dem betrachteten Augenblicke die Entfernung R, die relative Geschwindigkeit dR/dt und Beschleunigung d^2R/dt^2 zukommt, *wenn die letzte konstant wäre*, in demjenigen Augenblicke haben würden, in welchen beide, dieser Voraussetzung gemäss, in einem Punkte zusammenträfen, und bezeichnet V diese *reducirte relative Geschwindigkeit*, so verwandelt sich obiger Ausdruck:

$$\frac{EE'}{R^2}\left(1-\frac{dR^2}{dt^2}+2R\frac{d^2R}{dt^2}\right),$$

in folgenden Ausdruck:

$$\frac{EE'}{R^2}(1-V^2),$$

was sich in Worten folgendermassen aussprechen: lässt *die von der Bewegung herrührende Verminderung der Kraft, mit welcher zwei elektrische Massen auf einander wirken würden, wenn sie nicht bewegt wären, ist dem Quadrate ihrer reducirten relativen Geschwindigkeit proportional.*

Die gegebenen Ausdrücke zur Bestimmung der Kraft, welche zwei elektrische Massen auf einander ausüben, haben nun schon ihre Bestätigung gefunden:

1. für das ganze Gebiet der Elektrostatik;
2. für dasjenige Gebiet der Elektrodynamik, welches die Kräfte unveränderlicher und unverrückter Stromelemente betrachtet;

es bleibt also

3. die Bestätigung derselben nur noch für alle diejenigen Gebiete der Elektrodynamik zu wünschen, die sich nicht blos auf unveränderliche und unverrückte Stromelemente beschränken.

Theorie der Volta-Induktion.

Es ist schon erwähnt worden, dass das von Ampère aufgestellte Princip der Elektrodynamik sich nur auf den speciellen Fall bezieht, wo vier elektrische Massen unter den bei zwei unveränderlichen und unverrückten Stromelementen vorausgesetzten Verhältnissen sich befinden. Unter Verhältnissen, wo diese Voraussetzungen nicht Statt finden, könne nur das neue Grundprincip zur Vorausbestimmung der Kräfte und Erscheinungen Anwendung finden und es werde sich gerade hierdurch die durch die grössere Allgemeinheit des neuen Princips bedingte grössere Fruchtbarkeit desselben zeigen.

Der Fall der Unanwendbarkeit des von Ampère aufgestellten Princips der Elektrodynamik tritt also schon dann ein, wenn das eine Stromelement verrückt oder seine Stromintensität variirt wird, wozu noch kommen kann, dass statt des anderen Stromelements blos ein Element eines Stromleiters, jedoch ohne einen darin vorhandenen Strom, gegeben ist. Aus der Erfahrung weiss man zwar, dass alsdann Ströme erregt oder *inducirt* werden, und man fasst die Erscheinungen dieser inducirten Ströme unter dem Namen der *Volta-Induktion* zusammen; keine von allen diesen Erscheinungen hat sich aber weder aus dem Princip der Elektrostatik noch aus dem von Amèere aufgestellten Principe der Elektrodynamik voraussagen oder vorausbestimmen lassen. Dagegen soll nun gezeigt werden, dass aus dem neuen Grundprincipe, wie dasselbe hier aufgestellt worden ist, auch die Gesetze zur Vorausbestimmung aller Erscheinungen der Volta-Induktion abgeleitet werden können. Es ergiebt sich, dass die so abgeleiteten Gesetze der Volta-Induktion richtig sind, soweit als nur bestimmte Beobachtungen darüber vorliegen.

Zum Zwecke dieser Ableitung sollen die dabei in Betracht kommenden Grössen auf folgende Weise bezeichnet werden.

α und α' bezeichnen die Länge zweier Elemente, von denen das

erstere a *ruhend* angenommen wird. Diese Annahme beschränkt die Allgemeinheit der Betrachtung nicht, weil jede Bewegung des Elements a auf a' übertragen werden kann, indem man ihr in a' die entgegengesetzte Richtung beilegt. In diesen beiden Elementen werden die vier folgenden elektrischen Massen unterschieden, nämlich:

$$+ae, \quad -ae, \quad +a'e', \quad -a'e'.$$

Die *erste* dieser Massen $+ae$ bewege sich mit der Geschwindigkeit $+u$ in der Richtung des ruhenden Elements a, welche mit der von a nach a' gezogenen Geraden den Winkel ϑ macht. Diese Geschwindigkeit ändere sich während des Zeitelements dt um $+du$.

Die *zweite* Masse $-ae$ bewege sich, den für einen galvanischen Strom geltenden Bestimmungen gemäss, in der nämlichen Richtung mit der Geschwindigkeit $-u$, das heisst rückwärts, und diese Geschwindigkeit ändere sich während des Zeitelements dt um $-du$.

Die *dritte* Masse $+a'e'$ bewege sich mit der Geschwindigkeit $+u'$ in der Richtung des Elements a', welche mit der von a nach a' gezogenen und verlängerten Geraden den Winkel ϑ' macht. Diese Geschwindigkeit ändere sich in dem Zeitelement dt um $+du'$. Ausserdem theile aber diese elektrische Masse die Bewegung des Elements a' selbst, welche mit der Geschwindigkeit v in einer Richtung geschieht, die mit der von a nach a' gezogenen, verlängerten Geraden den Winkel η macht, und in einer durch diese Gerade gelegten Ebene enthalten ist, welche mit der durch dieselbe Gerade parallel mit dem Elemente a gelegten Ebene den Winkel γ einschliesst. Die Geschwindigkeit v ändere sich während des Zeitelements dt um dv.

Die *vierte* Masse $-a'e'$ bewege sich, den Bestimmungen eines galvanischen Stroms gemäss, in der Richtung des Elements a' mit der Geschwindigkeit $-u'$, die sich in dem Zeitelement dt um $-du'$ ändert; theile aber ausserdem, wie die vorige Masse, die Geschwindigkeit v des Elements a' selbst in der schon bezeichneten Richtung.

Die Entfernungen der beiden ersteren Massen von den beiden letzteren sind sämmtlich, in dem betrachteten Augenblicke, der Entfernung r der beiden Elemente selbst gleich; da sie aber nicht gleich bleiben, sollen sie mit r_1, r_2, r_3, r_4 bezeichnet werden.

Legt man endlich durch die von a nach a' gezogene Gerade zwei Ebenen, die eine mit a, die andere mit a' parallel, so bezeichne ω den von diesen beiden Ebenen eingeschlossenen Winkel.

Man erhält dann für die *Summe* der Kräfte, welche auf die *positive* und *negative* Elektricität im Elemente a' wirken, d. i. für die Kraft, welche das Element a' selbst bewegt, durch Anwendung des neuen Princips, folgenden Ausdruck:

$$-\frac{a^2}{16}\cdot\frac{ae\,.\,a'e'}{r^2}\left\{\left(\frac{dr_1^{\,2}}{dt^2}+\frac{dr_2^{\,2}}{dt^2}-\frac{dr_3^{\,2}}{dt^2}-\frac{dr_4^{\,2}}{dt^2}\right)\right.$$
$$\left.-2r\left(\frac{d^2r_1}{dt^2}+\frac{d^2r_2}{dt^2}-\frac{d^2r_3}{dt^2}-\frac{d^2r_4}{dt^2}\right)\right\}.$$

Für die *Differenz* jener Kräfte aber, von welcher die *Induktion* abhängt, ergiebt sich folgender Ausdruck:

$$-\frac{a^2}{16}\cdot\frac{ae\,.\,a'e'}{r^2}\left\{\left(\frac{dr_1^{\,2}}{dt^2}-\frac{dr_2^{\,2}}{dt^2}+\frac{dr_3^{\,2}}{dt^2}-\frac{dr_4^{\,2}}{dt^2}\right)\right.$$
$$\left.-2r\left(\frac{d^2r_1}{dt^2}-\frac{d^2r_2}{dt^2}+\frac{d^2r_3}{dt^2}-\frac{d^2r_4}{dt^2}\right)\right\}.$$

Ferner findet man, wenn man ausser den Bewegungen der elektrischen Massen in ihren Leitern auch die ihnen mit ihren Leitern gemeinschaftlichen Bewegungen in Rechnung bringt, folgende Ausdrücke für die ersten Differentialkoefficienten:

$$\frac{dr_1}{dt}=-u\cos\vartheta+u'\cos\vartheta'+v\cos\eta,$$
$$\frac{dr_2}{dt}=+u\cos\vartheta-u'\cos\vartheta'+v\cos\eta,$$
$$\frac{dr_3}{dt}=-u\cos\vartheta-u'\cos\vartheta'+v\cos\eta,$$
$$\frac{dr_4}{dt}=+u\cos\vartheta+u'\cos\vartheta'+v\cos\eta.$$

Es ist also:

$$\left(\frac{dr_1^{\,2}}{dt^2}+\frac{dr_2^{\,2}}{dt^2}-\frac{dr_3^{\,2}}{dt^2}-\frac{dr_4^{\,2}}{dt^2}\right)=-8\,uu'\cos\vartheta\cos\vartheta',$$
$$\left(\frac{dr_1^{\,2}}{dt^2}-\frac{dr_2^{\,2}}{dt^2}+\frac{dr_3^{\,2}}{dt^2}-\frac{dr_4^{\,2}}{dt^2}\right)=-8\,uv\cos\vartheta\cos\eta.$$

Die zweiten Differentialkoefficienten findet man, wenn man auch die Variabilität der Geschwindigkeit u, u' v mit berücksichtigt:

$$\frac{d^2r_1}{dt^2}=+u\sin\vartheta\frac{d\vartheta_1}{dt}-u'\sin\vartheta'\frac{d\vartheta'_1}{dt}-v\sin\eta\frac{d\eta_1}{dt}$$
$$-\cos\vartheta\frac{du}{dt}+\cos\vartheta'\frac{du'}{dt}+\cos\eta\frac{dv}{dt},$$

$$\frac{d^2r_2}{dt^2}=-u\sin\vartheta\frac{d\vartheta_2}{dt}+u'\sin\vartheta'\frac{d\vartheta'_2}{dt}-v\sin\eta\frac{d\eta_2}{dt}$$
$$+\cos\vartheta\frac{du}{dt}-\cos\vartheta'\frac{du'}{dt}+\cos\eta\frac{dv}{dt},$$

$$\frac{d^2r_3}{dt^2}=+u\sin\vartheta\frac{d\vartheta_3}{dt}+u'\sin\vartheta'\frac{d\vartheta'_3}{dt}-v\sin\eta\frac{d\eta_3}{dt}$$
$$-\cos\vartheta\frac{du}{dt}-\cos\vartheta'\frac{du'}{dt}+\cos\eta\frac{dv}{dt},$$

$$\frac{d^2 r_4}{dt^2} = - u \sin\vartheta \frac{d\vartheta_4}{dt} - u' \sin\vartheta' \frac{d\vartheta'_4}{dt} - v \sin\eta \frac{d\eta_4}{dt}$$
$$+ \cos\vartheta \frac{du}{dt} + \cos\vartheta' \frac{du'}{dt} + \cos\eta \frac{dv}{dt}.$$

Es ist folglich:

$$\left(\frac{d^2 r_1}{dt^2} + \frac{d^2 r_2}{dt^2} - \frac{d^2 r_3}{dt^2} - \frac{d^2 r_4}{dt^2}\right) = + u \sin\vartheta \left(\frac{d\vartheta_1}{dt} - \frac{d\vartheta_2}{dt} - \frac{d\vartheta_3}{dt} - \frac{d\vartheta_4}{dt}\right)$$
$$- u' \sin\vartheta' \left(\frac{d\vartheta'_1}{dt} - \frac{d\vartheta'_2}{dt} + \frac{d\vartheta'_3}{dt} - \frac{d\vartheta'_4}{dt}\right)$$
$$- v \sin\eta \left(\frac{d\eta_1}{dt} + \frac{d\eta_2}{dt} - \frac{d\eta_3}{dt} - \frac{d\eta_4}{dt}\right)$$

und

$$\left(\frac{d^2 r_1}{dt^2} - \frac{d^2 r_2}{dt^2} + \frac{d^2 r_3}{dt^2} - \frac{d^2 r_4}{dt^2}\right) = + u \sin\vartheta \left(\frac{d\vartheta_1}{dt} + \frac{d\vartheta_2}{dt} + \frac{d\vartheta_3}{dt} + \frac{d\vartheta_4}{dt}\right)$$
$$- u' \sin\vartheta' \left(\frac{d\vartheta'_1}{dt} + \frac{d\vartheta'_2}{dt} - \frac{d\vartheta'_3}{dt} - \frac{d\vartheta'_4}{dt}\right)$$
$$- v \sin\eta \left(\frac{d\eta_1}{dt} - \frac{d\eta_2}{dt} + \frac{d\eta_3}{dt} - \frac{d\eta_4}{dt}\right)$$
$$- 4 \cos\vartheta \cdot \frac{du}{dt}.$$

Die Differentialkoefficienten $d\vartheta_1/dt$, $d\vartheta'_1/dt$, $d\eta_1/dt$ u. s. w. werden leicht nach bekannten trigonometrischen Sätzen entwickelt und es ergeben sich daraus folgende Ausdrücke für dieselben, nämlich:

$$r_1 \frac{d\vartheta_1}{dt} = + u \sin\vartheta - u' \sin\vartheta' \cos\omega - v \sin\eta \cos\gamma,$$
$$r_1 \frac{d\vartheta'_1}{dt} = - u' \sin\vartheta' + u \sin\vartheta \cos\omega - v \sin\eta \cos(\omega + \gamma),$$
$$r_1 \frac{d\eta_1}{dt} = - v \sin\eta + u \sin\vartheta \cos\gamma - u' \sin\vartheta' \cos(\omega + \gamma),$$
$$r_2 \frac{d\vartheta_2}{dt} = - u \sin\vartheta + u' \sin\vartheta' \cos\omega - v \sin\eta \cos\gamma,$$
$$r_2 \frac{d\vartheta'_2}{dt} = + u' \sin\vartheta' - u \sin\vartheta \cos\omega - v \sin\eta \cos(\omega + \gamma),$$
$$r_2 \frac{d\eta_2}{dt} = - v \sin\eta - u \sin\vartheta \cos\gamma + u' \sin\vartheta' \cos(\omega + \gamma),$$
$$r_3 \frac{d\vartheta_3}{dt} = + u \sin\vartheta + u' \sin\vartheta' \cos\omega - v \sin\eta \cos\gamma,$$
$$r_3 \frac{d\vartheta'_3}{dt} = + u' \sin\vartheta' + u \sin\vartheta \cos\omega - v \sin\eta \cos(\omega + \gamma),$$
$$r_3 \frac{d\eta_3}{dt} = - v \sin\eta + u \sin\vartheta \cos\gamma + u' \sin\vartheta' \cos(\omega + \gamma),$$

$$r_4 \frac{d\vartheta_4}{dt} = -u \sin\vartheta - u' \sin\vartheta' \cos\omega - v \sin\eta \cos\gamma,$$

$$r_4 \frac{d\vartheta'_4}{dt} = -u' \sin\vartheta' - u \sin\vartheta \cos\omega - v \sin\eta \cos(\omega + \gamma),$$

$$r_4 \frac{d\eta_4}{dt} = -v \sin\eta - u \sin\vartheta \cos\gamma - u' \sin\vartheta' \cos(\omega + \gamma).$$

Da nun für den betrachteten Augenblick $r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = r$ ist, so erhält man hieraus:

$$r\left(\frac{d\vartheta_1}{dt} - \frac{d\vartheta_2}{dt} - \frac{d\vartheta_3}{dt} + \frac{d\vartheta_4}{dt}\right) = -4u' \sin\vartheta' \cos\omega,$$

$$r\left(\frac{d\vartheta_1}{dt} + \frac{d\vartheta_2}{dt} + \frac{d\vartheta_3}{dt} + \frac{d\vartheta_4}{dt}\right) = -4v \sin\eta \cos\gamma;$$

ferner:

$$r\left(\frac{d\vartheta'_1}{dt} - \frac{d\vartheta'_2}{dt} + \frac{d\vartheta'_3}{dt} - \frac{d\vartheta'_4}{dt}\right) = +4u \sin\vartheta \cos\omega,$$

$$r\left(\frac{d\vartheta'_1}{dt} + \frac{d\vartheta'_2}{dt} - \frac{d\vartheta'_3}{dt} - \frac{d\vartheta'_4}{dt}\right) = 0;$$

endlich:

$$r\left(\frac{d\eta_1}{dt} + \frac{d\eta_2}{dt} - \frac{d\eta_3}{dt} - \frac{d\eta_4}{dt}\right) = 0,$$

$$r\left(\frac{d\eta_1}{dt} - \frac{d\eta_2}{dt} + \frac{d\eta_3}{dt} - \frac{d\eta_4}{dt}\right) = +4u \sin\vartheta \cos\gamma.$$

Substituirt man diese Werthe, so erhält man:

$$r\left(\frac{d^2r_1}{dt^2} + \frac{d^2r_2}{dt^2} - \frac{d^2r_3}{dt^2} - \frac{d^2r_4}{dt^2}\right) = -8uu' \sin\vartheta \sin\vartheta' \cos\omega,$$

$$r\left(\frac{d^2r_1}{dt^2} - \frac{d^2r_2}{dt^2} + \frac{d^2r_3}{dt^2} - \frac{d^2r_4}{dt^2}\right) = -8uv \sin\vartheta \sin\eta \cos\gamma,$$
$$-4r \cos\vartheta \cdot \frac{du}{dt}.$$

Mit diesen Werthen ergiebt sich nun die *Summe* der Kräfte, welche auf die *positive* und *negative* Elektricität im Elemente α' wirken,

$$= -\frac{aa'}{r^2} \cdot aeu \cdot a'e'u' (\sin\vartheta \sin\vartheta' \cos\omega - \tfrac{1}{2} \cos\vartheta \cos\vartheta' \eta).$$

Bezeichnet man hierin mit ε den Winkel, welchen die Richtungen der beiden Elemente α und α' mit einander einschliessen und setzt nach S. 238 i und i' an die Stelle von aeu und $a'e'u'$, so erhält man obige Summe nach einer leichten Umwandlung:

$$= -\frac{aa'ii'}{r^2} (\cos\varepsilon - \tfrac{3}{2} \cos\vartheta \cos\vartheta'),$$

den nämlichen Ausdruck, welchen Ampère für unveränderliche und unverrückte Stromelemente aufgestellt hat, d. h. die auf das ganze Element α' wirkende elektrodynamische Kraft wird bei bewegten Leitern und veränderlichen Stromintensitäten eben so bestimmt, wie wenn die Stromintensitäten unveränderlich und die Leiter unverrückt beharren. Das Ampère'sche Gesetz findet also hiernach zur Bestimmung der Kräfte, welche auf die ganzen Stromelemente bei gegebener Lage der Stromelemente und gegebenen Stromintensitäten wirken, allgemeine Anwendung. Nur erfordert die Anwendung dieses Gesetzes, dass die Stromintensitäten, wenn sie veränderlich sind, ebenso wie die Lage, wenn sie veränderlich ist, *für jeden einzelnen Augenblick* gegeben seien, und zwar die Stromintensitäten mit Einschluss des in Folge der *Induktion* in jedem Augenblicke hinzukommenden Theiles.

Was aber die *Differenz* der Kräfte betrifft, welche auf die *positive* und *negative* Elektricität im Element α' wirken, wodurch diese beiden Elektricitäten von einander geschieden und im Leiter nach entgegengesetzten Seiten bewegt werden, so ergiebt sich nun dieselbe:

$$= -\frac{\alpha\alpha'}{r^2}\cdot a e u \cdot a e' v\,(\sin\vartheta\sin\eta\cos\gamma - \tfrac{1}{2}\cos\vartheta\cos\eta)$$
$$-\frac{1}{2}\frac{\alpha\alpha'}{r}a^2 e e'\cos\vartheta\cdot\frac{du}{dt},$$

oder, weil $aeu = i$ und $ae\,.\,du = di$ ist,

$$= -\frac{\alpha\alpha'}{r^2}\,i\,(\sin\vartheta\sin\eta\cos\gamma - \tfrac{1}{2}\cos\vartheta\cos\eta)\,.\,a e' v - \frac{1}{2}\frac{\alpha\alpha'}{r}a e'\cdot\cos\vartheta\cdot\frac{di}{dt}.$$

Die hierdurch bestimmte Kraft sucht nun die *positive* und *negative* Elektricität im inducirten Elemente α' nach der Richtung der Geraden r zu scheiden. In dieser Richtung kann aber bei einem linearen Leiter die Scheidung nicht erfolgen, sondern nur in der Richtung des inducirten linearen Elements α' selbst, die mit der verlängerten Geraden r den Winkel ϑ' macht. Zerlegt man also jene ganze Scheidungskraft nach dieser Richtung, d. h. multiplicirt man obigen Werth mit $\cos\vartheta'$, so erhält man die Kraft, welche die wirkliche Scheidung bewirkt,

$$= -\frac{\alpha\alpha'}{r^2}\,i\,(\sin\vartheta\sin\eta\cos\gamma - \tfrac{1}{2}\cos\vartheta\cos\eta)\,.\,a e' v\cos\vartheta'$$
$$-\frac{1}{2}\frac{\alpha\alpha'}{r}a e'\cdot\cos\vartheta\cos\vartheta'\cdot\frac{di}{dt}.$$

Dieser Ausdruck, mit e' dividirt, giebt die vom inducirenden Elemente α auf das inducirte Element α' ausgeübte *elektromotorische* Kraft, im gewöhnlichen Sinne,

$$= -\frac{aa'}{r^2} i\,(\sin\vartheta \sin\eta \cos\gamma - \tfrac{1}{2}\cos\vartheta\cos\eta)\,.\,av\cos\vartheta'$$

$$-\frac{1}{2}\frac{aa'}{r} a\cos\vartheta\cos\vartheta' \cdot \frac{di}{dt}\,.$$

Dies ist also das *allgemeine Gesetz der Volta-Induktion, wie dasselbe durch Ableitung aus dem neu aufgestellten Grundprincipe der Elektricitätslehre sich von selbst ergiebt.*

Setzt man nun *erstens* den Fall, *dass keine Aenderung der Stromintensität Statt finde,* also:

$$\frac{di}{dt} = 0$$

sei, so findet sich das *Gesetz der Induktion eines konstanten Stromelements auf das dagegen bewegte Element eines Leiters;* es ergiebt sich nämlich dafür die *elektromotorische* Kraft:

$$= -\frac{aa'}{r^2} i\,(\sin\vartheta\sin\eta\cos\gamma - \tfrac{1}{2}\cos\vartheta\cos\eta)\,.\,av\cos\vartheta',$$

oder, wenn man mit ε den Winkel bezeichnet, welchen die Richtung des inducirenden Stromelements mit der Richtung, nach welcher das inducirte Element selbst bewegt wird, einschliesst, nach einer leicht zu machenden Transformation,

$$= -\frac{aa'}{r^2} i\,(\cos\varepsilon - \tfrac{3}{2}\cos\vartheta\cos\eta)\,.\,av\cos\vartheta'.$$

Je nachdem nun dieser Ausdruck einen *positiven* oder *negativen* Werth hat, ist der inducirte Strom *positiv* oder *negativ*, wo unter positivem Strome ein solcher verstanden wird, dessen positive Elektricität in derjenigen Richtung des Elements a' sich bewegt, welche mit der verlängerten Geraden r den Winkel ϑ' einschliesst.

Sind nun z. B. die Elemente a und a' einander parallel, und ist die Richtung, nach welcher das letztere mit der Geschwindigkeit v bewegt wird, in der Ebene jener beiden Parallelen enthalten und auf deren Richtung senkrecht, so ist, *wenn a' durch seine Bewegung von a sich entfernt,*

$$\vartheta = \vartheta', \qquad \cos\eta = \sin\vartheta, \qquad \cos\varepsilon = 0,$$

folglich die *elektromotorische* Kraft:

$$= +\frac{3}{2}\frac{aa'}{r^2} i\sin\vartheta\cos\vartheta^2\,.\,av.$$

Dieser Werth ist immer *positiv*, weil $\vartheta < 180^0$ zu nehmen ist, und dieser *positive* Werth bezeichnet hier einen inducirten Strom von gleicher

Richtung wie der inducirende, übereinstimmend mit dem, was die Erfahrung für diesen Fall ergeben hat.

Unter gleichen Verhältnissen, blos mit dem Unterschiede, dass *das Element a' durch seine Bewegung dem Elemente a genähert wird*, ergiebt sich:

$$\vartheta = \vartheta', \qquad \cos\eta = -\sin\vartheta, \qquad \cos\varepsilon = 0,$$

folglich die *elektromotorische* Kraft:

$$= -\frac{3}{2}\frac{aa'}{r^2}\,i\sin\vartheta\cos\vartheta^2 \,.\, av.$$

Der *negative* Werth dieser Kraft bezeichnet einen inducirten Strom von entgegengesetzter Richtung, wie der inducirende, ebenfalls übereinstimmend mit dem, was die Erfahrung für diesen Fall ergeben hat.

Die *Volta-Induktion* kann bekanntlich auf zwei wesentlich verschiedene Arten hervorgebracht werden: es können nämlich Ströme inducirt werden durch *konstante* Ströme und durch *veränderliche*. Durch *konstante* Ströme wird inducirt, entweder wenn der Leiter, durch welchen der Strom geht, gegen denjenigen Leiter bewegt wird, in welchem ein Strom inducirt werden soll, oder umgekehrt. Durch *veränderliche* Ströme kann inducirt werden, auch wenn der Leiter, durch welchen der veränderliche Strom geht, gegen denjenigen Leiter, in welchem ein Strom inducirt werden soll, unverrückt bleibt.

So wie nun aus dem oben abgeleiteten *allgemeinen Gesetze der Volta-Induktion* das besondere Gesetz für die erstere Art durch die Bedingungsgleichung

$$\frac{di}{dt} = 0$$

sich von selbst ergab, so ergiebt sich daraus eben so auch das besondere Gesetz für die letztere Art der Volta-Induktion durch die Bedingungsgleichung

$$v = 0.$$

Setzt man also *zweitens* diesen Fall, *wo keine Bewegung der Leiter gegeneinander Statt findet*, oder

$$v = 0$$

ist, so ergiebt sich *das Gesetz der Induktion eines veränderlichen Stroms auf das dagegen nicht bewegte Element eines Leiters*, oder der Werth der *elektromotorischen* Kraft:

$$= -\frac{1}{2}\frac{aa'}{r}\,a\cos\vartheta\cos\vartheta' \cdot \frac{di}{dt}\cdot$$

Die Induktion während des Zeitelements dt, d. h. das Produkt dieses Zeitelements in die wirkende elektromotorische Kraft, ist also:

$$= -\frac{a}{2} \cdot \frac{aa'}{r} \cos\vartheta \cos\vartheta' . di,$$

folglich die Induktion für irgend einen Zeitraum, in welchem die Intensität des inducirenden Stroms um i zunimmt, während r, ϑ und ϑ' unverändert bleiben,

$$= -\frac{a}{2} \cdot \frac{aa'}{r} i \cos\vartheta \cos\vartheta'.$$

Der *positive* Werth dieses Ausdrucks bezeichnet einen im Elemente a' inducirten Strom nach der Richtung von a', welche mit der verlängerten Geraden r den Winkel ϑ' macht, der *negative* Werth einen inducirten Strom von der entgegengesetzten Richtung.

Wenn die beiden Elemente a und a' einander parallel sind, und $\vartheta = \vartheta'$, so hat obiger Ausdruck für *wachsende* Stromintensität, oder für einen positiven Werth von i, einen *negativen* Werth, d. h. bei wachsender Stromintensität in a wird in a' ein Strom in entgegengesetzter Richtung erregt, als der inducirende Strom hat. Das Umgekehrte findet bei abnehmender Stromintensität Statt. Beide Resultate stimmen mit bekannten Thatsachen überein. Auch die Proportionalität der Induktion mit der Intensitätsänderung i des inducirenden Stroms ist der Erfahrung gemäss.

Geht man nun endlich von der Betrachtung dieser beiden besonderen Arten der *Volta-Induktion* wieder auf den allgemeinen Fall zurück, wo zugleich die Intensität des inducirenden Stroms veränderlich ist und auch die beiden Leiter gegen einander bewegt werden, so ergiebt sich die *elektromotorische* Kraft eines *variablen* Stromelements auf das *bewegte* Element eines Leiters einfach als die *Summe der elektromotorischen Kräfte*, welche Statt finden würde:

1. wenn das Element des Leiters in dem betrachteten Augenblicke *nicht bewegt* würde;
2. wenn das Element des Leiters zwar bewegt würde, aber die *Stromintensität* des inducirenden Elements in dem betrachteten Augenblicke sich *nicht* änderte.

VII.

Herr WILHELM WEBER legte eine Abhandlung *über die Erregung und Wirkung des Diamagnetismus nach den Gesetzen inducirter Ströme* vor.

[Berichte über die Verhandlungen der K. S. Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, Bd. 1 aus den Jahren 1846 und 1847, Leipzig 1848, p. 346—358.]

Ueber die Erregung und Wirkung des Diamagnetismus nach den Gesetzen inducirter Ströme.

Von

Wilhelm Weber.

(Aus den Berichten über die Verhandlungen der K. S. Gesellschaft der Wissenschaften. Sitzung am 28. Mai 1847 nebst einigen Zusätzen vom Verfasser.)

[Annalen der Physik und Chemie herausgegeben von J. C. Poggendorff, Bd. 73, Leipzig 1848, p. 241—256.] [1])

Die zuerst von BRUGMANS im Jahre 1778 beobachtete Abstossung des Wismuths durch einen Magnet ist fast unbeachtet geblieben, bis FARADAY sie von Neuem entdeckte und genauer untersuchte und dadurch den Grund zu der neuen Lehre vom *Diamagnetismus* legte, deren weitere Ausbildung eine wichtige physikalische Aufgabe geworden ist. Zur Lösung dieser Aufgabe lässt sich nun, bei der Kleinheit der diamagnetischen Kräfte der Körper, auch wenn sehr grosse Elektromagnete darauf wirken, von feineren Maassbestimmungen nur wenig erwarten und es ist daher mehr zu hoffen, die Natur des Diamagnetismus aus *verschiedenen Modifikationen* seiner Wirkungen kennen zu lernen, deren Entdeckung auch bei kleineren Kräften möglich ist. Die folgenden Versuche haben den Zweck, aus einigen besonderen Modifikationen der diamagnetischen Wirkungen eine schon von FARADAY zur Erklärung der diamagnetischen Erscheinungen aufgestellte Annahme sicherer und schärfer zu begründen, und sodann diese zur Erklärung der diamagnetischen Erscheinungen nöthige Annahme selbst wieder aus bekannten Gesetzen abzuleiten.

Das diamagnetische Wismuth stösst sowohl den Nordpol wie den Südpol eines Magnets ab und wird von ihnen abgestossen. Diese

[1]) [Diese beiden Abhandlungen stimmen dem Wortlaute nach überein bis auf eine Schlussbetrachtung, die in einem Nachtrage S. 266 besonders abgedruckt ist.]

indifferente Abstossung entgegengesetzter Pole dürfte wenig auffällig erscheinen, wenn man den Grund der magnetischen Kraft in den unveränderlichen metallischen Theilchen des Wismuths selbst sucht; denn wir sind gewohnt, von den ponderablen Körpern überhaupt anzunehmen, dass sie den Bewegungen sowohl der beiden entgegengesetzten magnetischen Fluida als auch der beiden elektrischen ohne Unterschied gleichen Widerstand leisten. Mehr als diese indifferente Wirkung dürfte aber die Wirkung *in die Ferne* auffallen, wenn man annimmt, dass die diamagnetische Kraft in den unveränderlichen metallischen Theilchen des Wismuths selbst ihren Grund habe, weil es der erste Fall wäre, wo die Wirkung eines ponderablen Körpers auf einen imponderablen *in die Ferne* beobachtet würde. Es scheint daher vor Allem wichtig, die Frage zu entscheiden, ob der Grund der in die Ferne wirkenden diamagnetischen Kraft in dem unveränderlichen ponderablen Bestandtheile der Körper enthalten sei, oder ob sie von einem *imponderablen Bestandtheile* ausgehe, und an eine gewisse *Vertheilung* desselben geknüpft sei.

Zur Entscheidung dieser Frage ist nun der von Herrn Reich angestellte, im 7. Hefte dieser Berichte S. 252 beschriebene Versuch von besonderer Wichtigkeit, wonach Nordpol und Südpol, wenn sie zugleich von derselben Seite her auf ein Stück Wismuth wirken, keineswegs dasselbe mit der Summe der Kräfte abstossen, welche sie einzeln ausüben würden, sondern vielmehr nur mit der Differenz dieser Kräfte.

Aus diesem einzigen Versuche dürfte schon mit grösster Wahrscheinlichkeit geschlossen werden, dass der Grund der diamagnetischen Kraft nicht in den unveränderlichen metallischen Wismuththeilchen, sondern in einem zwischen ihnen beweglichen imponderablen Bestandtheile zu suchen sei, welcher bei Annäherung eines Magnetpols verschoben und nach Verschiedenheit dieses Pols verschieden vertheilt wird. Der Grund der diamagnetischen Kraft wird hierdurch, statt in eine Wechselwirkung ponderabler und imponderabler Körper in die Ferne, vielmehr in eine solche Wechselwirkung zweier imponderablen Körper gesetzt, und die gleiche Wirkung auf entgegengesetzte Pole erklärt sich dann aus der verschiedenen Vertheilung jenes imponderablen Bestandtheils im Wismuth, welche durch den Gegensatz der Pole hervorgebracht wird. Die gleichzeitige Annäherung zweier entgegengesetzten Pole von derselben Seite her muss aber bewirken, dass der imponderable Bestandtheil im Wismuth weder die eine noch die andere Vertheilung annehmen kann, an welche das Hervortreten der diamagnetischen Kraft geknüpft ist, woraus sich das Verschwinden der diamagnetischen Kraft in diesem Falle von selbst ergiebt.

Fragt man nun aber weiter, was das für ein imponderabler Bestandtheil sei, welcher sich im Wismuth durch Annäherung eines Nord-

pols oder Südpols auf so verschiedene Weise vertheile, und dann bei dieser Vertheilung stets mit einer abstossenden Kraft auf den genäherten Pol zurückwirke, so bieten sich nur entweder die beiden magnetischen Fluida selbst, oder die beiden elektrischen Fluida in der Form von Molekularströmen dar. Jedenfalls müsste, um eine andere Annahme als zulässig erscheinen zu lassen, die Unmöglichkeit dargethan sein, durch das an bekannte Gesetze geknüpfte Verhalten der genannten Imponderabilien die fraglichen Erscheinungen zu erklären.

Hiernach ersieht man, dass der von Reich gemachte Versuch benutzt werden kann, um eine schon von Faraday (Poggendorff's Annalen, Bd. 70, S. 48, Art. 2429, 2430) aufgestellte Ansicht fester zu begründen. Faraday sagt nämlich daselbst: „Eine Erklärung der Bewegungen diamagnetischer Körper und all der dynamischen Erscheinungen, die aus der Wirkung der Magnete auf sie entspringen, möchte sich in der Annahme darbieten, dass die magnetische Induktion in ihnen einen entgegengesetzten Zustand hervorruft, wie er in magnetischen Körpern erzeugt wird, d. h. dass, wenn man von jeder Körperart ein Theilchen in das magnetische Feld brächte, beide magnetisch würden, und jedes seine Axe parallel der durch sie hingehenden magnetischen Resultante stellte, doch mit dem Unterschiede, dass die Theilchen des magnetischen Körpers ihre Nord- und Südpole den entgegengesetzten Polen des inducirenden Magneten zuwendeten, die Theilchen des diamagnetischen aber es umgekehrt machten. Daraus würde denn eine Näherung des einen Körpers und ein Zurückweichen des andern erfolgen."

„Nach Ampère's Theorie würde diese Annahme damit übereinkommen, dass, während in Eisen und dergleichen magnetischen Körpern Ströme parallel mit den im inducirenden Magnet oder galvanischen Apparat vorhandenen inducirt werden, im Wismuth, schwerem Glase und den übrigen diamagnetischen Körpern Ströme von entgegengesetzter Richtung aufträten. Dies würde den Strömen in diamagnetischen Körpern gleiche Richtung geben mit denen, welche zu *Anfange* des inducirenden Stroms in diamagnetischen Leitern inducirt werden, und den in magnetischen Körpern gleiche mit denen, welche beim *Aufhören* desselben inducirenden Stroms entstehen. Hinsichtlich nicht-leitender magnetischer und diamagnetischer Substanzen würde keine Schwierigkeit entspringen, weil die hypothetischen Ströme nicht in der Masse, sondern rings um die Theilchen der Substanz angenommen werden."

Diese scharfsinnige von Faraday zuerst aufgestellte Annahme, welche durch Reich's Versuche grössere Wahrscheinlichkeit gewonnen hat, soll nun durch die folgenden Versuche einer noch direkteren Prüfung unterworfen werden, die kaum noch einen Zweifel an der Richtigkeit übrig lassen dürften.

Alle bisher beobachteten diamagnetischen Kräfte wirkten abstossend, nie anziehend; aus der von Faraday aufgestellten Annahme folgt aber, dass auch diamagnetische Kräfte vorkommen müssen, welche *anziehend* auf einen Magnetpol wirken, und es lassen sich solche Fälle leicht näher bestimmen und an der Erfahrung prüfen.

Zu diesem Zwecke darf man aber nicht diejenige Kraft beobachten, welche das diamagnetische Wismuth auf denjenigen Magnetpol ausübt, von welchem es selbst diamagnetisirt worden ist, sondern man muss solche Kräfte beobachten, welche jenes Wismuth auf andere Magnetpole in der Ferne ausübt, welche keinen Einfluss auf seinen diamagnetischen Zustand haben.

Stelle ich nun ein Stück Wismuth in der Ebene auf, welche eine symmetrisch magnetisirte, an einem Kokonfaden aufgehangene kleine Magnetnadel rechtwinklig halbirt, so leuchtet ein, dass die Pole der kleinen Nadel auf den diamagnetischen Zustand des entfernten Wismuthsstücks nach Reich's Erfahrung gar keinen oder wenigstens keinen merklichen Einfluss haben werden. In der That kann man sich auch durch den Augenschein leicht überzeugen, dass die Nadel durch das Wismuth nicht die geringste Ablenkung erleidet.

Stellt man aber einen starken Hufeisenmagnet so auf, dass der Ort, welchen vorher das Wismuthstück einnahm, in dem freien Raum zwischen seinen beiden Polen liegt, und giebt dabei dem Magnete eine solche Stellung, dass seine magnetische Axe verlängert die Nadel halbirt, so wird dieser starke Magnet ein sehr grosses Drehungsmoment auf die Nadel ausüben. Kompensirt man aber dieses vom Hufeisenmagnet auf die Nadel ausgeübte Drehungsmoment durch ein anderes gleich grosses, aber entgegengesetztes Drehungsmoment eines der Nadel von der entgegengesetzten Seite genäherten Stabmagnets, so kann man bewirken, dass die Nadel ihren ursprünglichen Stand und ihre ursprüngliche Schwingungsdauer (Empfindlichkeit) wieder erhält, und dass es in Beziehung auf die Nadel so gut ist, wie wenn gar kein Magnet auf sie wirkte.

Bringt man nun nach diesen Vorbereitungen dasselbe Stück Wismuth, welches früher auf die Nadel gar nicht wirkte, an die nämliche Stelle wie früher, d. i. zwischen die beiden Pole des Hufeisenmagnets, so zeigt sich nun eine sehr wahrnehmbare und messbare Wirkung, nämlich eine Ablenkung der Nadel in Folge davon, dass der eine Pol abgestossen, der andere angezogen wird.

Kehrt man die Pole der Magnete, deren Wirkungen auf die Nadel sich kompensiren, um und wiederholt dann den Versuch, so findet man, dass das nämliche Stück Wismuth, an die nämliche Stelle und in die nämliche Lage gebracht, jetzt gerade die entgegengesetzte Ablenkung hervorbringt.

Vertauscht man endlich das Stück Wismuth mit Eisen, so findet man, dass die von ersterem hervorgebrachte Ablenkung der von dem letzteren hervorgebrachten entgegengesetzt ist.

Es lassen sich diese Versuche mehrfach abändern, wobei jedoch immer die Kraft des Wismuths an anderen Magnetpolen als dem, welcher den diamagnetischen Zustand des Wismuths bestimmt, beobachtet wird; überall bestätigt sich der Satz, dass Wismuth auf solche Pole stets entgegengesetzt wie Eisen an seiner Stelle wirkt, dass es also abstösst, wo das Eisen anzieht, und anzieht, wo das Eisen abstösst, kurz, dass an anderen Magnetpolen als dem, welches das Wismuth diamagnetisirt, eben so häufig anziehende wie abstossende Kräfte des Wismuths beobachtet werden[1]).

Hierdurch kann nun die Faraday'sche Annahme als bewiesen betrachtet werden, wenigstens in so fern, als sie den Grund der diamagnetischen Kraft nicht in die unveränderlichen metallischen Wismuththeilchen selbst, sondern in eine veränderliche Vertheilung setzt, welche im Wismuth Statt findet und auf andere Magnete gleich einer bestimmten Vertheilung magnetischer Fluida wirkt.

Um endlich auch jeden Zweifel darüber zu beseitigen, dass es wirklich nichts Anderes sei als entweder die magnetischen Fluida oder ihnen äquivalente Ampère'sche Ströme, welche jener veränderlichen Vertheilung im Wismuth unterworfen seien, kann noch verlangt werden, dass durch Versuche nicht blos die mit dem *Vorhandensein* des diamagnetischen und eines gewissen magnetischen Zustands verbundenen Wirkungen, sondern dass auch die mit der *Entstehung* beider Zustände verknüpften Wirkungen gleich befunden würden.

Es ist bekannt, dass nach den Gesetzen der von Faraday entdeckten Induktion die Bewegung der magnetischen Fluida in einem Körper, oder die Drehung der Ampère'schen Molekularströme, mit einer elektrischen Wirkung in die Ferne auf benachbarte Leiter verbunden ist, wodurch in letzteren ein elektrischer Strom erregt oder inducirt wird.

Sind daher wirklich in den diamagnetischen Körpern die beiden magnetischen Fluida oder ihnen äquivalente Ampère'sche Ströme vorhanden, welche unter dem Einflusse eines starken Magnets bewegt oder

[1]) [In dem in den Annalen der Physik und Chemie, herausgeg. von J. C. Poggendorff, Bd. 73, Leipzig 1848, S. 241—256 veröffentlichten Aufsatz findet sich folgender Zusatz]:

„Wurde z. B. das eine Ende des Wismuthstabs an das Nordende eines starken Magnets gebracht, während sein anderes Ende dem Nordende der Magnetnadel genähert wurde, so wurde letzteres angezogen; wurde aber dasselbe Ende des Wismuthstabs an das Südende des starken Magnets gebracht, so wurde das Nordende der Magnetnadel von dem anderen ihm genäherten Ende des Wismuthstabs abgestossen."

gedreht werden, so müsste auch von ihnen, in dem Augenblicke, wo diese Aenderung vor sich ginge, ein elektrischer Strom in einem benachbarten Leiter inducirt werden.

Um nun diesen inducirten Strom für sich zu beobachten, ist es nöthig, dass in demselben Leiter kein anderer Strom z. B. von dem starken Magnet inducirt werde, dem der Wismuthstab genähert wird. Zu diesem Zwecke ist also die Kraft dieses Magnets während der Versuche unverändert zu erhalten, was bei einem Elektromagnet einen unveränderlichen galvanischen Strom voraussetzt. Andererseits muss auch der Leiter, auf welchen vom Wismuth gewirkt werden soll, eine feste unveränderliche Stellung gegen jenen Magneten erhalten, wobei er ringförmig den Raum umschliesst, in welchen der Wismuthstab gebracht werden soll, um durch den Einfluss des Magneten die diamagnetische Vertheilung in ihm hervorzubringen. Dass endlich der vom Wismuth inducirte Strom beobachtet werden könne, wenn man die beiden Enden obigen ringförmigen Leiters fortführt und mit den Enden des Multiplikators eines empfindlichen Galvanometers verbindet, bedarf keiner weiteren Erörterung.

Was aber die Stärke dieses vom Wismuthstab inducirten Stroms betrifft, so lässt sich leicht im Voraus überschlagen, wie gering sie sein werde, wenn man beachtet, wie klein die diamagnetischen Kräfte im Vergleich zu den magnetischen Kräften des Eisens sind, welches an die Stelle des Wismuths gesetzt wird. Es ergiebt sich bei näherer Prüfung, dass der inducirte Strom so schwach sein müsse, dass er nicht mehr beobachtet werden könne, wenn nicht alle Umstände zu diesem Zwecke auf das Günstigste zusammenwirken.

Zur Erreichung dieses Zweckes, nämlich *galvanische Ströme durch Diamagnetisirung des Wismuths in einem benachbarten Leiter zu induciren und so inducirte Ströme wirklich zu beobachten,* wurden nun folgende Einrichtungen getroffen.

Ein mit dickem Kupferdrahte mehrfach umwundener 600 Millimeter langer Eisenkern diente als Elektromagnet. Auf die kreisförmige Endfläche von 50 Millimeter Durchmesser dieses Eisenkerns wurde der ringförmige Leiter befestigt, welcher aus einem auf hölzerner Rolle aufgewickelten 300 Meter langen, $^2/_3$ Millimeter dicken, umsponnenen Kupferdrahte bestand. Der von diesem ringförmigen Leiter eingeschlossene Raum, in welchen der Wismuthstab gebracht werden sollte, war 140 Millimeter lang und 15 Millimeter weit; der Stab von reinem präcipitirtem Wismuthe war etwas dünner. Die Enden des ringförmigen Leiters wurden zu einem Kommutator geführt, zu dem auch die Enden des Multiplikators eines sehr empfindlichen Galvanometers führten, dessen Magnetnadel mit Spiegel versehen war, in welchem durch ein darauf

gerichtetes Fernrohr das Bild einer entfernten Skale beobachtet wurde. Das Galvanometer war ausserdem mit einem so starken Dämpfer versehen, dass von einer Schwingung der Nadel kaum etwas bemerkt werden konnte.

Während nun ein möglichst starker und konstanter galvanischer Strom durch den dicken Draht des Elektromagneten ging, wurde der im ringförmigen Leiter befindliche Wismuthstab herausgezogen; darauf wurde der Kommutator gewechselt und der Wismuthstab wieder hineingeschoben; hierauf wurde der Kommutator wieder gewechselt und der Wismuthstab herausgezogen u. s. f. Während dieser etwa 1 Minute lang fortgesetzten Versuche wurde der Stand des Galvanometers etwa von 10 zu 10 Sekunden abgelesen.

Darauf folgte eine zweite Reihe, blos mit dem Unterschiede, dass der Kommutator beim Herausziehen des Wismuthstabs diejenige Stellung erhielt, welche er in der ersten beim Hineinschieben des Wismuthstabs gehabt hatte, und umgekehrt.

Die dritte Reihe war dann eine genaue Wiederholung der ersten u. s. f.

Vor dem Beginn jeder Reihe wurde der Galvanometerstand beobachtet, jedoch ohne abzuwarten bis derselbe ganz zur Ruhe gekommen wäre. Jede Reihe wurde mit Herausziehen des Wismuthstabs begonnen.

In der folgenden Tafel sind die sämmtlichen am Galvanometer gemachten Ablesungen zusammen gestellt. Die verschiedenen Reihen sind durch römische Ziffern, die beiden Kommutatorstände, welche in verschiedenen Reihen beim Herausziehen des Wismuthstabs Statt fanden, sind in der Ueberschrift durch *A* und *B* unterschieden. Ausserdem ist in der Ueberschrift der vor Beginn jeder Reihe abgelesene Galvanometerstand bemerkt.

I. A.	II. B.	III. A.	IV. B.	V. A.	VI. B.	VII. A.
512,3	517,4	515,9	517,2	517,0	523,0	524,7
513,3	513,0	519,5	517,1	518,2	522,0	526,0
514,1	512,9	520,7	517,5	518,7	519,0	528,0
514,5	512,8	519,1	516,2	525,0	518,5	530,0
515,3	514,2	519,2	516,7	525,1	519,0	530,7
515,6	515,2	518,3	517,7	523,0	521,0	530,0
516,7	516,0	515,5	—	—	—	528,5
514,92	514,02	518,72	517,04	522,00	519,90	528,87

Vergleicht man nun die in den Ueberschriften angegebenen Galvanometerstände in den ungeraden Reihen, wo der Kommutator beim Herausziehen des Wismuthstabs aus dem ringförmigen Leiter die Stellung *A* hatte, mit dem Mittelwerthe der darunter stehenden Beobachtungen, so ergiebt sich der letztere jedesmal etwas *grösser*. Es sind nämlich diese Mittelwerthe:

1. Reihe 514,92 = 512,3 + 2,62,
3. „ 518,72 = 515,9 + 2,82,
5. „ 522,00 = 517,0 + 5,00,
7. „ 528,87 = 524,7 + 4,17.

Dieselbe Vergleichung giebt für die geraden Reihen, wo der Kommutator beim Herausziehen des Wismuthstabs aus dem ringförmigen Leiter die Stellung *B* hatte, den Mittelwerth immer etwas *kleiner*. Es sind nämlich diese Mittelwerthe:

2. Reihe 514,02 = 517,4 — 3,38,
4. „ 517,04 = 517,2 — 0,16,
6. „ 519,90 = 523,0 — 3,10.

Es ist hierbei zu beachten, dass der vor Beginn jeder Reihe beobachtete Galvanometerstand nicht genau der Ruhestand der Nadel war. Um die hieraus hervorgehende Ungewissheit zu vermeiden, kann man diese jeder Reihe vorausgeschickte Ablesung von der Rechnung ganz ausschliessen, und kann sich auf die Vergleichung der Mittelwerthe der einzelnen Reihen allein beschränken. Die Vergleichung des Mittelwerths der 2. bis 6. Reihe mit dem Mittel aus der unmittelbar vorangehenden und nachfolgenden Reihe ergiebt dann folgende Resultate:

2. Reihe 514,02 = 516,82 — 2,80,
3. „ 518,72 = 515,53 + 3,19,
4. „ 517,04 = 520,36 — 3,32,
5. „ 522,00 = 518,47 + 3,53,
6. „ 519,90 = 525,43 — 5,53.

Auch hieraus ersieht man, dass in den ungeraden Reihen, wo der Kommutator den Stand *A* hatte, während der Wismuthstab aus dem ringförmigen Leiter herausgezogen wurde, der Galvanometerstand etwas höher war, und dass das Entgegengesetzte in den ungeraden Reihen Statt fand, wo der Kommutator beim Herausziehen des Wismuthstabs den Stand *B* hatte. Die Unterschiede sind für die letzten Reihen etwas grösser als für die ersten, was sich leicht daraus erklärt, dass die Induktionswechsel allmählig beschleunigt wurden.

Es wurden nun zum Zweck einer direkten Vergleichung Gegenversuche gemacht, wobei der Wismuthstab mit einem dünnen Eisenstäbchen vertauscht wurde. Der inducirte Strom war dann so stark, dass keine Repetition angewendet werden durfte wie beim Wismuth, und dass ferner das Eisenstäbchen auch nur mit dem äussersten Ende in den ringförmigen Leiter gebracht werden durfte. Aber auch dann war der inducirte Strom so stark, dass am Galvanometer nicht der Ausschlag der Nadel selbst, sondern nur die Richtung beobachtet wurde, ob nämlich der Galvanometerstand wuchs, d. i. von niederen Skalentheilen zu höheren ging, oder umgekehrt.

Erster Versuch.

Stellung des Kommutators *A*:

wachsende Zahlen beim Hineinschieben des Eisenstäbchens in den ringförmigen Leiter;

abnehmende Zahlen beim Herausziehen des Eisenstäbchens aus dem ringförmigen Leiter.

Zweiter Versuch.

Stellung des Kommutators *B*:

abnehmende Zahlen beim Hineinschieben des Eisenstäbchens in den ringförmigen Leiter;

wachsende Zahlen beim Herausziehen des Eisenstäbchens aus dem ringförmigen Leiter.

Zur Vergleichung dieser mit Eisen gemachten Versuche mit den früheren, welche sich auf Wismuth bezogen, diene die Stellung des Kommutators *A* und der Fall, wo das Eisenstäbchen aus dem ringförmigen Leiter herausgezogen wurde, für den also eine *Abnahme* des Galvanometerstandes beobachtet worden ist. Dieser Fall entspricht bei den obigen Versuchen mit dem Wismuth den ungeraden Reihen, für die sich bei in gleichem Sinne fortgesetzter Induktion ein *höherer* Galvanometerstand ergeben hat. Hieraus folgt also, dass das Wismuth einen positiven Strom inducirte unter den nämlichen Verhältnissen, unter welchen das Eisen einen negativen inducirte, und umgekehrt.

Hierdurch ist also die Induktion elektrischer Ströme durch Diamagnetisirung des Wismuths bewiesen, und man ersieht zugleich, dass die Richtung dieser Ströme stets der vom Eisen unter den nämlichen Verhältnissen inducirten Ströme entgegengesetzt ist, ganz so wie es sein müsste, wenn das Wismuth magnetische Fluida oder äquivalente Ampère'sche Ströme enthielte, die unter dem Einflusse starker Magnete gerade entgegengesetzt bewegt oder gedreht würden wie im Eisen, wodurch also auch der letzte Zweifel an der von Faraday aufgestellten Annahme gehoben zu sein scheint.

Obgleich nun aber hiernach eine Regel gefunden ist, nach welcher die veränderlichen diamagnetischen Zustände der Körper für alle Fälle so bestimmt werden, dass sämmtliche Wirkungen nach magnetischen und elektrodynamischen Gesetzen als nothwendige Folge davon erscheinen, so bleibt der *Grund* jener Regel doch noch unbekannt und nach magnetischen und elektrodynamischen Gesetzen unerklärt. Denn sind magnetische Fluida in den diamagnetischen Körpern wirklich enthalten, so muss bei Näherung eines Magnetpols das eine angezogen, das andere abgestossen werden, und die Richtung der Scheidung beider Fluida ist hiernach durch magnetische Gesetze nothwendig bestimmt. Diese Richtung

ist aber der in obiger Regel angegebenen gerade entgegengesetzt. Eben so verhält es sich auch mit der anderen Annahme, nach welcher in den diamagnetischen Körpern statt magnetischer Fluida AMPÈRE'sche Molekularströme vorausgesetzt werden, welche bei Annäherung eines Magnetpols in einem durch die elektromagnetischen Gesetze bestimmten Sinne gedreht werden müssen. Diese Drehung ist aber der in obiger Regel angegebenen gerade entgegengesetzt.

Es ist also ein Widerspruch vorhanden zwischen obiger Regel der *Erregung* und den Gesetzen der *Wirksamkeit* des diamagnetischen Zustands. Bis dieser Widerspruch gelöst ist, bleiben alle diamagnetischen Zustände der Körper eine Gruppe isolirter Fakta ausser Zusammenhang mit allen übrigen Erscheinungen, gerade so wie der Rotationsmagnetismus eine solche Gruppe bildete, bis FARADAY durch Entdeckung der Induktion den Schlüssel dazu gab.

Für unsere bisherigen Betrachtungen, welche sich auf die *Wirkungen* bezogen, war es gleichgültig, ob geschiedene magnetische Fluida oder gleichgerichtete AMPÈRE'sche Molekularströme den erregten diamagnetischen Zustand der Körper konstituirten[1]). Für die folgenden Betrachtungen, welche sich auf die *Ursachen* beziehen, d. i. auf die den diamagnetischen Zustand der Körper erregenden Kräfte, müssen aber jene beiden Fälle wohl unterschieden werden. Denn im ersten Falle lässt sich von den Kräften, welche den diamagnetischen Zustand der Körper erregen, gar keine Rechenschaft geben, im anderen Falle dagegen kann es auf folgende Weise geschehen.

Man unterscheidet *zwei Arten elektrischer Ströme*, nämlich Leiter durchlaufende Ströme und Molekule umkreisende Ströme. Ihr wesentlicher Unterschied besteht darin, dass der strömenden Elektricität der ersteren beim Vorübergehen an den Molekulen des Leiters ihre lebendige Kraft so schnell entzogen wird, dass sie in einer unmessbar kleinen Zeit zur Ruhe gelangen würden, wenn ihnen der erlittene Verlust nicht durch fortdauernde elektromotorische Kräfte immer wieder ersetzt würde, wonach sich dann ergiebt, dass diese Art von Strömen, den OHM'schen Gesetzen gemäss, stets der vorhandenen elektromotorischen Kraft proportional sind und augenblicklich mit der elektromotorischen Kraft verschwinden. Das Gegentheil wird von der anderen Art von Strömen behauptet, welche nicht durch einen Leiter von Molekule zu Molekule fortgehen, sondern sich um ein einziges Molekule herum bewegen, für die also jener Grund der Entziehung ihrer lebendigen Kraft wegfällt.

[1]) [Das Folgende ist in dem in den Annalen der Physik und Chemie, herausgegeben von J. C. POGGENDORFF, Bd. 73, Leipzig 1848, S. 241 bis S. 256 veröffentlichten Aufsatz durch den am Schlusse dieser Abhandlung abgedruckten Nachtrag ersetzt.]

Von diesen Strömen wird behauptet, dass sie ohne elektromotorische Kraft in gleicher Intensität beharren.

Man unterscheidet ferner *zwei Arten von Wirkungen* eines magnetischen Moments in Beziehung auf elektrische Ströme, nämlich die mit dem Wachsthum oder mit der Abnahme jenes Moments verknüpfte Wirkung und die mit der Fortdauer des vorhandenen Moments verbundene. Erstere erscheint als *elektromotorische Kraft*, unabhängig von vorhandenen Strömen; letztere als eine vorhandene Ströme ablenkende oder richtende Kraft, deren Existenz also an das Vorhandensein von Strömen geknüpft ist.

Betrachtet man jene *beiden* Arten von Strömen, welche die *elektromotorische Kraft* eines wachsenden oder abnehmenden magnetischen Moments hervorbringt, so folgt aus dem vorerwähnten Unterschiede, dass die inducirten Ströme der ersteren Art, wie bekannt, der Geschwindigkeit des Wachsthums des magnetischen Moments proportional *sind*, während die inducirten Ströme der letzteren Art der Geschwindigkeit des Wachsthums des magnetischen Moments proportional *wachsen*. Jene verschwinden augenblicklich, sobald das magnetische Moment aufhört zu wachsen, diese beharren, nachdem das magnetische Moment aufgehört hat zu wachsen, so lange in gleicher Intensität, bis das magnetische Moment wieder abzunehmen beginnt.

Diese Beharrung inducirter Molekularströme ist die Ursache von dem erregten diamagnetischen Zustande der Körper.

Denn ein unveränderliches magnetisches Moment sucht einen *vorhandenen Molekularstrom*, z. B. im weichen Eisen, so zu *lenken* oder zu *richten*, dass er eine Bahn beschreibt, die derjenigen gerade entgegengesetzt ist, welche ein *inducirter Strom* beschreibt, welcher durch das *Wachsthum* desselben magnetischen Moments erregt wird. Diese inducirten Ströme müssen also durch ihr Wachsthum und *Beharren*, gerade entgegengesetzte stromerregende (elektromotorische) und stromlenkende oder stromrichtende Kräfte ausüben als die ursprünglich, z. B. im weichen Eisen, vorhandenen in entgegengesetzte Bahnen gelenkten Molekularströme. Das entgegengesetzte Verhalten des diamagnetischen Zustands des Wismuths und des magnetischen Zustands des Eisens bei gleichen erregenden magnetischen Momenten ergiebt sich hiernach also aus bekannten Gesetzen von selbst.

Der wesentliche Unterschied zwischen Wismuth und Eisen würde also darein zu setzen sein, dass im Eisen, unabhängig von äusserer Erregung Molekularströme vorhanden sind, im Wismuth nicht. Uebrigens können Wismuth und Eisen insofern gleich gesetzt werden, als ein wachsendes magnetisches Moment in beiden neue beharrliche Molekularströme inducirt, die jedoch im Eisen viel schwächer sein müssen als die unabhängig von solcher Induktion darin vorhandenen.

[Nachtrag, enthalten in der Abhandlung Annalen der Physik und Chemie, herausgegeben von J. C. POGGENDORFF, Bd. 73, Leipzig 1848, S. 253. Siehe die Note auf S. 264.]

Dies ist nicht mehr der Fall bei den folgenden Betrachtungen, welche sich auf die *Ursachen* beziehen, d. h. auf die den diamagnetischen Zustand der Körper erregenden Kräfte.

Denn wäre es eine gewisse Vertheilung der magnetischen Fluida, welche den diamagnetischen Zustand der Körper konstituirte, so könnte, wie oben gezeigt worden, von den Kräften, die sie hervorbrächten, gar keine Rechenschaft gegeben werden, wenigstens aus den gegebenen *magnetischen Kräften*, welche auf jene Fluida wirken, liesse sich diese Vertheilung nicht erklären.

Anders verhält es sich aber, wenn es gleichgerichtete Molekularströme sind, welche den diamagnetischen Zustand der Körper konstituiren. Denn ein System gleichgerichteter Molekularströme kann auf *doppelte* Weise zu Stande kommen. *Erstens* nämlich ist es möglich, dass die Molekularströme selbst in dem Körper schon vorher existirt haben, und dass auf diese schon vorhandenen Ströme nur eine Kraft gewirkt hat, welche ihnen *gleiche Richtung* ertheilte; *zweitens* aber ist es auch möglich, dass die gleichgerichteten Ströme, welche den diamagnetischen Zustand der Körper bilden, vorher gar nicht existirten, sondern bei der Diamagnetisirung des Körpers erst *entstanden* oder *inducirt* worden sind. Fällt nun auch die erste von diesen beiden Möglichkeiten, wie oben gezeigt worden, aus gleichen Gründen weg, wie die der vorher betrachteten Vertheilung magnetischer Fluida, so bleibt doch für die Molekularströme noch die andere Möglichkeit übrig, wonach sie *durch Induktion* entstanden wären.

Nun ist zwar von *inducirten Molekularströmen* bisher nie die Rede gewesen, sondern nur von beharrlichen, unveränderlichen Molekularströmen, nach AMPÈRE's Definition, dem überhaupt die Entstehung von Strömen durch Induktion noch unbekannt war. Es leuchtet aber ein, dass, wenn die Existenz von Molekularströmen zugegeben wird, auch ferner einzuräumen sei, dass ihre Intensität müsse vermehrt oder vermindert, und dass selbst neue Ströme dieser Art müssen erzeugt werden können, und zwar durch die nämlichen Kräfte, welche Ströme in grösseren Kreisen hervorbringen.

Geht man zur Erklärung des Diamagnetismus auf *Induktion* zurück, so könnte man beim ersten Anblick selbst daran zweifeln, ob es wirklich nöthig sei, inducirte Molekularströme zu diesem Zwecke anzunehmen, oder ob nicht selbst die in grösseren Kreisen inducirten Ströme dazu genügten. In der That würden diese Ströme alle diamagnetischen Er-

scheinungen hervorbringen können, wenn sie *beharrlich* wären; da aber diese, den OHM'schen Gesetzen unterworfenen Ströme nicht beharrlich sind, sondern augenblicklich mit der inducirenden Kraft verschwinden und nur durch fortgesetzte Induktion erhalten werden, so können sie aus diesem einzigen Grunde nicht zur Erklärung des Diamagnetismus dienen.

Wenn nun aber in dem schnellen Verschwinden dieser Ströme wirklich der einzige Grund liegt, den diamagnetischen Zustand der Körper, welcher beharrlich ist, nicht daraus abzuleiten, so scheint gar kein Grund zu sein, warum man den beharrlichen diamagnetischen Zustand der Körper nicht *inducirten Molekularströmen* zuschreiben sollte, da sich diese in allen anderen Beziehungen ebenso wie jene Ströme verhalten müssen, und nur darin verschieden sind, dass ihnen die *Beharrlichkeit* zukommt, die jenen fehlt. Denn der Unterschied der Ströme, welche durch Leiter in grösseren Kreisen sich bewegen, von diesen Molekularströmen besteht nur darin, dass der strömenden Elektricität der ersteren beim Vorübergehen an den Molekulen des Leiters ihre lebendige Kraft so schnell entzogen wird, dass sie in einer unmessbar kleinen Zeit zur Ruhe gelangen würde, wenn ihr der erlittene Verlust nicht durch fortdauernde elektromotorische Kräfte immer wieder ersetzt würde, wonach sich dann ergiebt, dass diese Art von Strömen, den OHM'schen Gesetzen gemäss, stets der vorhandenen elektromotorischen Kraft proportional sind und augenblicklich mit der elektromotorischen Kraft verschwinden. Das Gegentheil gilt von den Molekularströmen, welche nicht von Molekule zu Molekule fortgehen, sondern sich um ein einziges Molekul herum bewegen, für die also jener Grund der Entziehung ihrer lebendigen Kraft wegfällt. Diese Ströme beharren also ohne elektromotorische Kraft in gleicher Intensität.

Ist nun eine *inducirende Kraft* gegeben, welche auf die Elektricität eines Leiters wirkt, so wird letztere in eine Strombewegung versetzt und diese Strombewegung vertheilt sich nach Proportion der Leitungsfähigkeit gesetzmässig unter allen Bahnen, die der Leiter darbietet; folglich muss ein Theil der Strombewegung seinen Weg auch um einzelne Molekule des Leiters einschlagen und *inducirte Molekularströme* bilden, welche, weil sie auf ihrem Wege um die Molekule herum keinen Widerstand finden, durch den sie aufgehalten würden, ungeschwächt fortdauern müssen, bis in Folge einer neuen entgegengesetzten Induktion neue inducirte Molekularströme hinzukommen, welche die älteren aufheben.

Spricht man also mit AMPÈRE in der Lehre vom Elektromagnetismus von *Molekularströmen*, so muss man jetzt auch konsequenterweise, nach Entdeckung der Induktion, in der Lehre von der Magneto-Elektricität von *inducirten Molekularströmen* sprechen, und muss allen, gleichgültig

ob sie immer vorhanden gewesen, oder durch Induktion erst entstanden sind, Beharrlichkeit zuschreiben. Dies vorausgesetzt ergiebt sich, dass auf alle Körper, an welchen diamagnetische Wirkungen beobachtet werden, Kräfte gewirkt haben, welche Molekularströme induciren mussten, und zwar solche, welche die dem Namen der diamagnetischen bezeichneten Wirkungen hervorbringen.

Letzteres folgt daraus, dass eine magnetische Kraft einen *vorhandenen* Strom so zu richten sucht, dass seine Bahn der eines durch *das Wachsthum jener magnetischen Kraft inducirten Stroms* gerade entgegengesetzt ist. Ist also dieser inducirte Strom ein Molekularstrom, welcher beharrt, so wird er auch beharrlich die entgegengesetzten Wirkungen haben, wie ein anderer Molekularstrom, der unabhängig von dem Wachsthum jener magnetischen Kraft schon existirte (z. B. im Eisen), aber durch diese Kraft seine gegenwärtige Richtung erhalten hat. Das entgegengesetzte Verhalten des diamagnetisirten Wismuths und des magnetisirten Eisens ergiebt sich hiernach von selbst aus bekannten Gesetzen. Der wesentliche Unterschied zwischen Wismuth und Eisen würde nur darin zu setzen sein, dass im Eisen, unabhängig von äusserer Erregung, Molekularströme vorhanden sind, deren Richtung aber nicht unveränderlich, sondern dem Einfluss äusserer Kräfte unterworfen ist, was beim Wismuth nicht der Fall wäre. Uebrigens können Wismuth und Eisen insofern gleichgesetzt werden, als eine wachsende oder abnehmende magnetische Kraft in beiden neue beharrliche Molekularströme inducirt, die jedoch im Eisen viel schwächer sein müssen, als die unabhängig von solcher Induktion darin vorhandenen.

VIII.

Bemerkungen zu Neumann's Theorie inducirter Ströme.

[Berichte über die Verhandlungen der K. S. Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, mathematisch-physische Klasse. Jahrgang 1849, p. 1—8.]

Sitzung am 17. März.

Herr Wilhelm Weber legt eine Abhandlung über *elektrodynamische Maassbestimmungen* als Fortsetzung seiner unter gleichem Titel in den bei Begründung der K. S. Gesellschaft der Wissenschaften von der Fürstl. Jablonowski'schen Gesellschaft herausgegebenen Abhandlungen enthaltenen Untersuchungen vor. Die erstere Abhandlung hatte die Maassbestimmungen der elektrodynamischen Kräfte, die letztere hat dagegen die Maassbestimmung der elektrodynamischen Widerstände zum Gegenstande. Die Abhandlung zerfällt in drei Theile: 1. Widerstandsmessung nach einem gegebenen Grundmaasse; 2. Zurückführung der Widerstandsmessungen auf absolutes Maass; 3. Zusammenhang der Widerstandsmessungen mit den übrigen elektrodynamischen Maassbestimmungen.

Da der Inhalt der Abhandlung zu einem kurzen Berichte sich nicht eignet, und die Abhandlung selbst bald gedruckt erscheinen wird, so soll gegenwärtige Mittheilung auf eine am Schlusse der Abhandlung beigefügte Bemerkung zu Neumann's Abhandlung beschränkt werden: „Ueber ein allgemeines Princip der mathematischen Theorie inducirter elektrischer Ströme.“ Aus den Schriften der Berliner Akademie der Wissenschaft von 1847 besonders abgedruckt. Reimer 1848. In dieser Abhandlung hat Neumann folgendes Theorem aufgestellt:

„Wird ein geschlossenes, unverzweigtes, leitendes Bogensystem $A_{\prime}$ durch eine beliebige Verrückung seiner Elemente, aber ohne Aufhebung der leitenden Verbindung derselben, in ein anderes $A_{\prime\prime}$ von neuer Form und Lage übergeführt, und geschieht diese Veränderung von $A_{\prime}$ in $A_{\prime\prime}$ unter dem Einflusse eines elektrischen Stromsystems $B_{\prime}$, welches gleichzeitig durch eine beliebige Verrückung seiner Elemente eine Veränderung in Lage, Form und Intensität von $B_{\prime}$ in $B_{\prime\prime}$ erfährt, so ist die Summe

der elektromotorischen Kräfte, welche in dem leitenden Bogensysteme durch die Veränderungen inducirt worden sind, gleich dem mit der Induktions-Konstante ε multiplicirten Unterschied der Potentialwerthe des Stroms $B_{''}$ in Bezug auf $A_{''}$ und des Stroms $B_{'}$ in Bezug auf $A_{'}$, wenn $A_{''}$ und $A_{'}$ von der Stromeinheit durchströmt gedacht werden."

Nachdem Neumann in den vier ersten Paragraphen seiner Abhandlung dieses Theorem nebst dessen Folgerungen entwickelt hat, fährt er § 5 fort: „W. Weber hat in seiner Abhandlung: Elektrodynamische Maassbestimmungen u. s. w. den Weg gebahnt, welcher über die Kluft in unserer Kenntniss der elektrostatischen und elektrodynamischen Wirkung der Elektricität führen wird. Er zeigt, wie die Ampère'schen Gesetze für die Wirkung zweier Stromelemente aus der Wirkung der positiven und negativen Elektricität des einen Elements auf die beiden Elektricitäten des anderen Elements abgeleitet werden können. Diese Analyse der Ampère'schen Gesetze führte zu dem Grundgesetz für die Wirkung zweier elektrischen Massen, nach welchem diese nicht allein von ihrer relativen Entfernung, sondern auch relativen Geschwindigkeit und deren Veränderung abhängig ist. Dieses Grundgesetz erklärt zugleich, wie Weber gezeigt hat, die Induktions-Erscheinungen und giebt ihre Gesetze. Der Gegenstand dieses Paragraphen ist, nachzuweisen, wie weit die im Vorhergehenden enthaltenen Resultate mit den aus Weber's Grundgesetz der elektrischen Wirkung abgeleiteten Induktionsgesetzen übereinstimmen." Neumann entwickelt nun aus dem Grundgesetze der „elektrodynamischen Maassbestimmungen" den allgemeinen Ausdruck der Induktion und wendet ihn sodann auf die verschiedenen Arten der Induktion an: 1. auf den Fall, wo weder die Strom- noch die Leiterelemente eine Ortsveränderung erleiden, und gelangt dafür zu einem Gesetz, was mit dem seinigen identisch ist; 2. auf den Fall, wo die Induktion allein durch Ortsveränderung der Leiterelemente erregt wird, die unter dem Einflusse eines ruhenden oder konstanten Stroms Statt findet; 3. auf den Fall, in welchem der inducirte Leiter ruht, und die Induktion durch die Verschiebung des ganzen Leiters eines konstanten Stroms erregt wird. In allen diesen Fällen ergeben sich die Gesetze mit Neumann's Gesetzen vollkommen übereinstimmend.

„Anders verhält es sich," fährt Neumann fort, „mit der Gleichung, welche die von einem einfachen Stromumgang inducirte elektromotorische Kraft unter der Annahme ausdrückt, dass derselbe aus einem bewegten Leiterstück und einem ruhenden besteht . . . Die Summe der elektromotorischen Kraft, welche während des Umlaufs der Elemente des Inducenten erregt wird, ist nach beiden Formeln dieselbe, die Richtung des inducirten Stroms aber die entgegengesetzte." Die Beobachtung entscheidet für Neumann's Formel. „Es muss also untersucht werden,

worin bei Ableitung der Formel aus Weber's Grundgesetz gefehlt worden ist. Der Umstand, dass der in Rede stehende Widerspruch nur bei Inducenten mit Gleitstellen eintritt, führt die Betrachtung sogleich auf diese. Hier treten neue Elemente in die Strombahn ein, oder heraus, in welchen also die Stromstärke sich innerhalb einer sehr kurzen Zeit von 0 bis i oder von i bis 0 verändert, und die durch diese ihre Intensitäts-Veränderung einen inducirenden Effekt ausüben, welcher in meinen Formeln schon enthalten ist, der aber bei der Anwendung des Weber'schen Grundgesetzes noch berücksichtigt werden muss."

Neumann findet hierauf wirklich den Fehler der Ableitung in der Vernachlässigung eines wesentlichen Theils der Induktion; die Differenz der Resultate wird aber durch Berücksichtigung dieses Fehlers nur zur Hälfte ausgeglichen.

Ungeachtet nun die von Herrn Neumann gemachten Versuche, welche von dem Verf. wiederholt worden sind, keinen Zweifel lassen, welches Resultat das richtige sei; so fährt Herr Neumann doch fort: „Weber's Grundgesetz der elektrischen Wirkung hat sich in so vielen und verschiedenartigen Fällen bewährt, dass dasselbe durch die vorstehenden Bemerkungen nicht zweifelhaft gemacht werden kann, vielmehr muss die Art, wie es auf den vorliegenden Fall zur Anwendung gebracht ist, in Zweifel gezogen werden."

Hieran schliesst sich nun die vom Verf. am Schlusse seiner Abhandlung gegebene Ergänzung der Neumann'schen Rechnung an. Herr Neumann hat nämlich, wie angeführt worden ist, aus dem Grundgesetze der „elektrodynamischen Maassbestimmungen" die Formeln für zwei Theile der elektromotorischen Kraft entwickelt, welche bei einem einfachen Stromumgange auf einen ruhenden Leiter ausgeübt wird, in dem Falle, wo die Kette des inducirenden Stroms aus einem bewegten Leiterstück und einem ruhenden besteht. Diese beiden Formeln sind in der That ganz richtig und stehen in vollständiger Uebereinstimmung mit den in den „elektrodynamischen Maassbestimmungen" für die nämlichen beiden Theile entwickelten Formeln. Nachdem der Verf. dieses nachgewiesen hat, zeigt derselbe, dass es sich wesentlich um die Frage handele, ob die beiden Theile der elektromotorischen Kraft, für welche diese Formeln gelten, einander so ergänzen, dass sie zusammen wirklich die ganze elektromotorische Kraft in dem betrachteten Falle darstellen, oder ob es in diesem Falle noch einen dritten Theil gebe, für welchen Neumann aus dem Grundgesetz der „elektrodynamischen Maassbestimmungen" die Formel noch nicht entwickelt habe. Der Verf. weist einen solchen dritten Theil wirklich nach, entwickelt dann aus dem Grundgesetz der „elektrodynamischen Maassbestimmungen" die Formel auch für diesen Theil und zeigt, wie die ganze Summe, welche die

Formeln aller drei Theile ergeben, in vollständiger Uebereinstimmung mit dem NEUMANN'schen Gesetze und also auch mit der Erfahrung steht.

In dem betrachteten Falle zerfällt nämlich die Kette, durch welche der inducirende Strom geht, in zwei wesentlich von einander zu unterscheidende Theile, nämlich in das bewegte Leiterstück und in das ruhende. Die erste Formel, welche NEUMANN aus dem Grundgesetz der „elektrodynamischen Maassbestimmungen" entwickelt hat, stellt denjenigen Theil der elektromotorischen Kraft dar, welchen die Elektricität, während sie das bewegte Leiterstück durchläuft, ausübt. Die zweite Formel stellt denjenigen Theil der elektromotorischen Kraft dar, welchen die Elektricität ausübt, während sie solche Elemente des ruhenden Leiterstücks durchläuft, durch welche der Strom vorher nicht gegangen war (oder während sie solche Elemente des ruhenden Leiterstücks zu durchlaufen aufhört, durch welche der Strom vorher gegangen war).

So wie es nun aber nicht genügt, wenn die Intensität eines inducirenden Stroms sich plötzlich ändert, die Bewegung der elektrischen Fluida vor und nach dieser Aenderung in Rechnung zu bringen, sondern auch der Uebergang der einen Bewegung in die andere nothwendig berücksichtigt werden muss, so genügt es auch nicht, dass in dem betrachteten Falle die Bewegungen der elektrischen Fluida sowohl während der Zeit, wo sie sich in dem bewegten Leiterstück, als auch während der Zeit, wo sie sich in dem ruhenden befinden, in Rechnung gebracht worden sind, sondern es muss endlich auch noch die Aenderung ihrer Bewegung bei dem Uebergange berücksichtigt werden, und diese giebt den dritten Theil der elektromotorischen Kraft in dem betrachteten Falle, wofür die Formel aus dem Grundgesetze der „elektrodynamischen Maassbestimmungen" von NEUMANN noch nicht entwickelt worden ist.

Ist α das Stromelement im Uebergangspunkte und bezeichnet u die Geschwindigkeit, mit welcher das Ende des bewegten Leiterstücks fortrückt, so leuchtet ein, dass z. B. die positive Elektricität, welche von dem bewegten Leiterstück zum ruhenden übergeht, in dem Zeitelemente dt, wo sie durch α fliesst, die Geschwindigkeit u verliert, was so viel ist, als wenn sie die Geschwindigkeit $-u$ erhielte; und dass die negative Elektricität, welche von dem unbewegten Leiterstück zum bewegten übergeht, in dem nämlichen Zeitelemente die Geschwindigkeit $+u$ erhält.

Bezeichnet man hiernach allgemein denjenigen Theil der Bewegung, welchen die elektrischen Fluida in einem Stromelemente mit ihrem Träger theilen, mit v, so wird, wenn die Geschwindigkeit dieses Trägers sich nicht ändert, in der Regel auch der mit v bezeichnete Theil der Bewegung der elektrischen Fluida keine Aenderung erleiden; diese Regel erleidet aber in dem betrachteten Falle in dem Uebergangselemente α

eine Ausnahme; denn aus dem Gesagten folgt, dass, während in der Bewegung des bewegten Leiterstücks sich gar nichts ändert, doch der mit v bezeichnete Theil der Bewegung der in α enthaltenen positiven Elektricität in dem Zeitelemente dt, wo sie α durchfliesst, eine Abnahme $-u$ erleidet, und der gleichfalls mit v bezeichnete Theil der Bewegung der in α enthaltenen negativen Elektricität in demselben Zeitelemente eine Zunahme $+u$ erleidet.

Genau genommen darf das Uebergangselement α gar nicht als ein Stromelement betrachtet werden, weil die Bewegungen der elektrischen Fluida in diesem Elemente denjenigen Bedingungen nicht Genüge leisten, welche in der Definition galvanischer Ströme enthalten sind.

Das für die elektrischen Wirkungen in den „elektrodynamischen Maassbestimmungen" aufgestellte Grundgesetz gilt nun zwar allgemein, welche Bewegungen auch die elektrischen Fluida haben mögen; die Anwendungen aber, welche von diesem Grundgesetze daselbst gemacht worden sind, beziehen sich, wie dort ausdrücklich bemerkt worden ist, nur auf solche elektrische Fluida, die sich in wirklicher Strombewegung befinden. Auch das daselbst entwickelte allgemeine Gesetz der Volta-Induktion giebt daher nur den Ausdruck der von einem wirklichen Stromelemente ausgeübten elektromotorischen Kraft und findet daher auf das Uebergangselement α in dem hier betrachteten Falle keine unmittelbare Anwendung.

Da nun aber für diese Beschränkung der Anwendung des allgemeinen Grundgesetzes kein anderer Grund vorlag, als dass die meisten anderen Bewegungen der elektrischen Fluida, ausser in den Stromelementen, für eine solche Anwendung noch nicht genau genug bestimmt waren, so leuchtet von selbst ein, dass, sobald diese Bestimmung für irgend einen anderen Fall, der in Stromelementen nicht vorkommt, gegeben wird, wie dies in dem Uebergangselemente des betrachteten Falls eben geschehen ist, der Anwendung des allgemeinen Grundgesetzes auch auf diesen Fall nichts entgegensteht.

Der Verf. entwickelt nun wirklich aus dem angeführten Grundgesetze den vollständigen Ausdruck der von dem Uebergangselemente ausgeübten elektromotorischen Kraft, und es ergiebt sich daraus ein aus drei Theilen zusammengesetzter Ausdruck, von denen die beiden ersten Theile mit dem in den „elektrodynamischen Maassbestimmungen" für ein Stromelement gegebenen Ausdrucke identisch sind. Der hinzukommende dritte Theil ist in dem von Neumann betrachteten Falle dem zweiten von jenen beiden Theilen gleich, dessen Werth dadurch verdoppelt wird, und diese Verdoppelung ist es, welche auch schon Neumann für nothwendig erkannt hat.

In den „elektrodynamischen Maassbestimmungen" ist folgender all-

gemeiner Ausdruck der von einem inducirenden Elemente a auf ein inducirtes Element a' ausgeübten elektromotorischen Kraft gegeben:[1])

$$-\frac{aa'}{r^2}\,i\,(\sin\vartheta\sin\eta\cos\varepsilon - \tfrac{1}{2}\cos\vartheta\cos\eta)\,av\cos\vartheta' - \frac{1}{2}\frac{aa'}{r}\,a\cos\vartheta\cos\vartheta'\cdot\frac{di}{dt}.$$

Dieser Ausdruck gilt blos für wirkliche inducirende Stromelemente. Sollen unter a auch solche Uebergangselemente umfasst werden, von denen oben die Rede war, so erhält man mit Anwendung derselben, a. a. O. Art. 30 erklärten Bezeichnungen folgenden Ausdruck:

$$-\frac{aa'}{r^2}\,i\,(\sin\vartheta\sin\eta\cos\varepsilon - \tfrac{1}{2}\cos\vartheta\cos\eta)\,av\cos\vartheta' - \frac{1}{2}\frac{aa'}{r}\,a\cos\vartheta\cos\vartheta'\cdot\frac{di}{dt}$$
$$+\frac{1}{4}\frac{aa'}{r}\,a^2e\,.\cos\vartheta\cos\vartheta'\left(\frac{dv}{dt}-\frac{dw}{dt}\right),$$

wo dv/dt und dw/dt die für die positive und negative Elektricität zu unterscheidende Aenderung desjenigen Theils ihrer Geschwindigkeit bezeichnet, welche ihr mit ihrem Träger gemeinsam ist. Für irgend ein wirkliches Stromelement a ist nun

$$\frac{dv}{dt}=\frac{dw}{dt},$$

wodurch dieser Ausdruck dem vorigen gleich wird. Für das oben betrachtete Uebergangselement ist aber

$$\frac{dv}{dt}=-\frac{dw}{dt},$$

und zwar ist für diejenige Dauer von dt, in welcher die Elektricität die Länge des Stromelements a durchläuft, das ist für $dt = a/u$,

$$dv = -dw = v,$$

wodurch folgender aus drei Gliedern bestehender Ausdruck erhalten wird:

$$-\frac{aa'}{r^2}\,i\,(\sin\vartheta\sin\eta\cos\varepsilon - \tfrac{1}{2}\cos\vartheta\cos\eta)\,av\cos\vartheta' - \frac{1}{2}\frac{aa'}{r}\,a\cos\vartheta\cos\vartheta'\cdot\frac{di}{dt}$$
$$+\frac{1}{2}\frac{a'}{r}\,a^2e\,.\cos\vartheta\cos\vartheta'\,.\,uv.$$

Für alle diejenigen Elemente a, von denen der erste von NEUMANN berechnete Theil der Induktion herrührt, fällt ausser dem dritten Gliede auch das zweite weg, weil bei ihm $di/dt = 0$ ist, und es bleibt nur das erste Glied

$$-\frac{aa'}{r^2}\,i\,(\sin\vartheta\sin\eta\cos\varepsilon - \tfrac{1}{2}\cos\vartheta\cos\eta)\,av\cos\vartheta'.$$

[1]) [WILHELM WEBER's Werke, Bd. III, p. 202.]

Für alle diejenigen Elemente α, von denen der zweite von NEUMANN berechnete Theil der Induktion herrührt, fällt ausser dem dritten Gliede auch das erste weg, weil bei ihnen $v = 0$ ist, und es bleibt nur das zweite Glied

$$-\frac{1}{2}\frac{\alpha\alpha'}{r} a \cos\vartheta \cos\vartheta' \cdot \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t},$$

und zwar ist für diejenige Dauer von $\mathrm{d}t$, in welcher im Elemente α der Strom i entsteht, d. i. für $\mathrm{d}t = -\alpha/v$,

$$\mathrm{d}i = aeu,$$

die elektromotorische Kraft also

$$-\frac{1}{2}\frac{\alpha\alpha'}{r} \cdot a^2 e \,.\, \cos\vartheta \cos\vartheta' \,.\, u,$$

oder, weil $\alpha = -v\mathrm{d}t$ ist,

$$+\frac{1}{2}\frac{\alpha'}{r} \cdot a^2 e \,.\, \cos\vartheta \cos\vartheta' \,.\, uv\mathrm{d}t.$$

Für die Uebergangselemente α endlich, für welche NEUMANN die Induktion nicht berechnet hat, erhält man bei Verkleinerung ihrer Länge, wodurch die beiden ersten Glieder verschwinden, den Grenzwerth

$$+\frac{1}{2}\frac{\alpha'}{r} \cdot a^2 e \,.\, \cos\vartheta \cos\vartheta' \,.\, uv,$$

oder den Betrag der elektromotorischen Kraft für die Dauer des Zeitelements $\mathrm{d}t$,

$$+\frac{1}{2}\frac{\alpha'}{r} \cdot a^2 e \,.\, \cos\vartheta \cos\vartheta' \,.\, uv\mathrm{d}t,$$

wonach dieser hinzukommende dritte Theil dem von NEUMANN berechneten zweiten Theile gleich ist, was zu beweisen war.

IX.

Messungen galvanischer Leitungswiderstände nach einem absoluten Maasse.

Von

Wilhelm Weber.

[Annalen der Physik und Chemie, herausgegeben von J. C. Poggendorff, Bd. 82, Leipzig 1851, p. 337—369.]

§ 1.

Erklärung der absoluten Maasseinheit für galvanische Leitungswiderstände.

Wie für die *Geschwindigkeit* kein eigenes *Grundmaass* aufgestellt zu werden braucht, wenn Raum- und Zeitmaass gegeben sind, so braucht auch kein eigenes *Grundmaass für den galvanischen Leitungswiderstand* aufgestellt zu werden, wenn Maasse für die elektromotorische Kraft und für die Stromintensität gegeben sind. Man kann dann nämlich *denjenigen Widerstand zur Maasseinheit nehmen, welchen ein geschlossener Leiter besitzt, in welchem die Maasseinheit der elektromotorischen Kraft die Maasseinheit der Stromintensität hervorbringt.* Hierauf beruht die Zurückführung der Messungen galvanischer Leitungswiderstände auf ein absolutes Maass.

Man könnte glauben, dass sich diese Zurückführung noch einfacher ausführen liesse, wenn man auf die räumlichen Dimensionen (Länge und Querschnitt) der galvanischen Leiter zurückginge und sich dabei an dasjenige Metall hielte, welches zu solchen Leitern am geeignetsten ist und am häufigsten dazu gebraucht wird, an das *Kupfer.* Unter der absoluten Maasseinheit des Leitungswiderstandes würde dann derjenige Widerstand verstanden werden, welchen ein kupferner Leiter besitzt, dessen Länge dem Längenmaasse und dessen Querschnitt dem Flächenmaasse gleich ist, wobei also, ausser Längen- und Flächenmaass, *der specifische Leitungswiderstand des Kupfers als Maasseinheit* für die specifischen Widerstände leitender Stoffe gegeben sein müsste. Es wäre dazu also ein eigenes *Grundmaass für specifische Widerstände* nöthig, dessen Einführung Bedenken haben würde, *erstens*, weil dadurch keine

Ersparniss in der Zahl der Grundmaasse erlangt wird, wenn, um das Grundmaass für den absoluten Widerstand entbehrlich zu machen, ein anderes Grundmaass eingeführt werden muss, welches sonst entbehrlich wäre. *Zweitens* aber ist weder das Kupfer noch ein anderes Metall ein geeigneter Stoff, um zur Feststellung eines Grundmaasses für specifische Widerstände zu dienen. Jacobi sagt darüber, dass bei den Widerständen auch der chemisch reinsten Metalle Unterschiede Statt fänden, welche durch eine Verschiedenheit der Dimensionen nicht erklärt werden könnten, und dass also, wenn der eine Physiker seine Widerstandsmesser und Multiplikatoren auf Kupferdraht von 1 Meter Länge und 1 Millimeter Dicke bezöge, die anderen Physiker immer noch nicht die Ueberzeugung hätten, ob sein Kupferdraht und der ihrige einen gleichen *Widerstandskoefficienten* besitze, d. h. ob der *specifische* Widerstand des Kupfers von allen diesen Drähten gleich sei. Die Zurückführung der Messungen galvanischer Leitungswiderstände auf ein absolutes Maass kann daher nur dann eine wesentliche Bedeutung haben und praktische Anwendung finden, wenn sie auf die zuerst angegebene Weise geschieht, wobei keine anderen Maasse als das für die *elektromotorische Kraft* und das für die *Stromintensität* vorausgesetzt werden.

Fs fragt sich aber dann ferner, welche Maasse für *elektromotorische Kräfte* und *Stromintensitäten* gegeben seien? Auch für die Messung dieser Grössen brauchen keine eigenen *Grundmaasse* aufgestellt zu werden, sondern sie können auf *absolutes Maass* zurückgeführt werden, wenn die magnetischen Maasse für *Stabmagnetismus* und *Erdmagnetismus* und *Raummaass* und *Zeitmaass* gegeben sind.

Unter der absoluten Maasseinheit der *elektromotorischen Kraft kann nämlich diejenige elektromotorische Kraft verstanden werden, welche die Maasseinheit des Erdmagnetismus auf einen geschlossenen Leiter ausübt, wenn derselbe so gedreht wird, dass die von seiner Projektion auf eine gegen die Richtung des Erdmagnetismus senkrechte Ebene begrenzte Fläche während des Zeitmaasses um das Flächenmaass zunimmt oder abnimmt.* — Unter der absoluten Maasseinheit der *Stromintensität kann die Intensität desjenigen Stroms verstanden werden, welcher, wenn er eine Ebene von der Grösse des Flächenmaasses umläuft, die nämlichen Wirkungen nach den elektromagnetischen Gesetzen in die Ferne ausübt, wie ein Magnetstab, welcher die Maasseinheit des Stabmagnetismus enthält.* — Die absoluten Maasse des *Stabmagnetismus* und des *Erdmagnetismus* sind aus der Abhandlung von Gauss: *Intensitas vis magneticae terrestris ad mensuram absolutam revocata. Gottingae 1833,* (Ann. Bd. XXVIII, S. 241 und 591 [1]) bekannt.

[1]) [Gauss' Werke, Bd. V, p. 79.]

Aus dieser Darstellung geht von selbst hervor, dass die Messungen galvanischer Leitungswiderstände auf ein absolutes Maass zurückgeführt werden können, wenn nur *Raummaass, Zeitmaass* und *Maassenmaass als Grundmaasse* gegeben *sind*; denn die zuletzt angeführten, von Gauss festgestellten absoluten Maasse des *Stabmagnetismus* und des *Erdmagnetismus* hängen bekanntlich blos von diesen drei Grundmaassen ab. Die nähere Betrachtung lehrt, dass selbst von diesen drei Grundmaassen das *Massenmaass* nicht in Betracht kommt, wie aus folgender Uebersicht der einfachen Relationen hervorgeht, welche durch diese Feststellung absoluter Maasse der hier betrachteten verschiedenen Grössenarten begründet werden.

Als Grundmaasse kommen dabei das *Längenmaass* R und das *Zeitmaass* S in Betracht; als *absolute Maasse* das Flächenmaass F und die Maasseinheiten des *Stabmagnetismus* M, des *Erdmagnetismus* T, der *elektromotorischen Kraft* E, der *Stromintensität* J und des *Leitungswiderstands* W.

Hiernach hat man *erstens*, wenn wW den Widerstand irgend eines geschlossenen Leiters, eE die elektromotorische Kraft, welche auf diesen Leiter wirkt, und iJ die Intensität des durch diese elektromotorische Kraft hervorgebrachten Stroms ausdrückt, zwischen den drei Zahlen w, e, i die Relation:

$$w = \frac{e}{i},$$

woraus einleuchtet, dass, wenn die Zahlen e und i durch Messung bestimmt sind, mittelbar auch die Zahl w dadurch gefunden wird, ohne dass es dazu einer besonderen Messung bedarf.

Wenn *zweitens* eE die elektromotorische Kraft ausdrückt, welche auf irgend einen geschlossenen (ebenen) Leiter wirkt, fJ den Flächenraum der von diesem Leiter umschlossenen Ebene, tT den Erdmagnetismus, von welchem jene elektromorische Kraft herrührt und sS den Zeitraum, in welchem die Ebene jener Leiter durch Drehung aus einer mit der Richtung des Erdmagnetismus parallelen in eine darauf senkrechte Lage in solcher Weise übergeführt wird, dass die von seiner Projektion auf eine gegen diese Richtung des Erdmagnetismus senkrechte Ebene begrenzte Fläche, mit der Zeit proportional, während des Zeitmaasses um das Flächenmaass wächst, so hat man zwischen den vier Zahlen e, f, t, s folgende Relation:

$$e = \frac{ft}{s},$$

und hieraus leuchtet ein, dass, wenn die drei Zahlen f, t, s durch Messung bestimmt sind, mittelbar auch die Zahl e dadurch gefunden wird, ohne dass es dazu einer besonderen Messung bedarf.

Wenn *drittens* iJ die Stromintensität in irgend einem geschlossenen (ebenen) Leiter ausdrückt, fT den Flächenraum der von diesem Leiter umschlossenen Ebene und mM den Magnetismus eines Stabs, welcher an die Stelle jenes Leiters gesetzt (seine magnetische Axe senkrecht gegen die Ebene des Leiters) dieselben Wirkungen nach elektromagnetischen Gesetzen in die Ferne ausübt, wie jener durchströmte Leiter; so hat man zwischen den drei Zahlen i, f, m folgende Relation:

$$i = \frac{m}{f},$$

woraus einleuchtet, dass, wenn die Zahlen f und m durch Messung bestimmt sind, mittelbar auch die Zahl i dadurch gefunden wird, ohne dass es dazu einer besonderen Messung bedarf.

Aus diesen drei Relationen ergiebt sich endlich

$$w = \frac{e}{i} = \frac{fft}{sm},$$

und hieraus folgt, dass, wenn die vier Zahlen f, s, m, t durch Messung bestimmt sind, mittelbar auch die Zahl w dadurch gefunden wird. Die Zahl f wird durch Ausmessung des Flächenraums der vom Leiter umschlossenen Ebene, die Zahl s durch Zeitmessung gefunden, und es bleiben also nur die Zahlen m und t übrig, welche durch eine Messung des Stabmagnetismus nach der von Gauss in der angeführten Abhandlung gegebenen Vorschrift gefunden werden. Die Unveränderlichkeit der Maasseinheit für galvanische Leitungswiderstände kann hiernach sicher so lange verbürgt werden, als die vier gegebenen Maasse: Flächenmaass, Zeitmaass und die Maasseinheiten für Stabmagnetismus und Erdmagnetismus unverändert erhalten werden; doch folgt daraus noch keineswegs, dass die Erhaltung dieser vier gegebenen Maasse eine nothwendige Bedingung für die Unveränderlichkeit der Maasseinheit galvanischer Leitungswiderstände sei, vielmehr reicht dazu schon die blosse Erhaltung derselben Maasseinheit für *Geschwindigkeiten* hin.

Bezeichnet nämlich tT den Erdmagnetismus, von welchem die elektromotorische Kraft herrührt, welche auf den geschlossenen Leiter wirkt, dessen Widerstand gemessen worden ist, ferner $m'M$ den Magnetismus eines Stabs (dessen magnetische Axe der Richtung des Erdmagnetismus parallel sei, während die von seinem Mittelpunkte zum Mittelpunkt der vom Leiter umschlossenen Ebene gezogene Gerade gegen die Richtung des Erdmagnetismus senkrecht ist), welcher nach magnetischen Gesetzen aus grosser Entfernung am Orte des Leiters genau gleiche Wirkung ausüben würde, wie der mit tT bezeichnete Erdmagnetismus, und endlich rR die Länge der von der Mitte dieses Stabs zur Mitte der vom Leiter umschlossenen Ebene gezogenen Geraden; so

hat man nach der „*Intensitas*“ zwischen den drei Zahlen t, m', r die einfache Relation:

$$t = \frac{m'}{r^3}.$$

Substituirt man diesen Werth von t in der Gleichung für w, so erhält man:

$$w = \frac{ff}{r^3} \cdot \frac{m'}{m} \cdot \frac{1}{s}.$$

Bezeichnet endlich $r'R$ die Seitenlänge eines Quadrats, dessen Flächenraum dem Flächenraume der vom Leiter umschlossenen Ebene gleich ist, woraus die Relation

$$f = r'^2$$

folgt, und setzt man auch diesen Werth von f in die obige Gleichung, so erhält man:

$$w = \frac{r'^3}{r^3} \cdot \frac{m'}{m} \cdot \frac{r'}{s}.$$

Auf den Werth des Faktors $(r'^3/r^3 \,.\, m'/m)$ hat nun, wie von selbst einleuchtet, eine Aenderung der gegebenen Maasse gar keinen Einfluss; dagegen hat eine Aenderung der gegebenen Raum- und Zeitmaasse auf den Werth des Faktors r'/s, und dadurch auf den Werth der Zahl w Einfluss, wenn nicht beide Maasse zugleich proportional vergrössert oder verkleinert werden. Der Werth der Zahl w ergiebt sich hieraus also unabhängig von allen Aenderungen der gegebenen Maasse, so lange dadurch keine Aenderung im *Geschwindigkeitsmaasse* verursacht wird. Wird aber durch eine Veränderung der gegebenen Maasse das Geschwindigkeitsmaass n Mal verkleinert oder vergrössert, so ergiebt sich für den Faktor r'/s und folglich auch für die Zahl w ein n Mal grösserer oder kleinerer Werth, was so viel heisst, als dass der Widerstand gegenwärtig nach einem n Mal kleineren oder grösseren Maasse ausgedrückt wird. Die Unveränderlichkeit der Maasseinheit für galvanische Leitungswiderstände hängt also nach der gegebenen Erklärung blos von der Unveränderlichkeit des gegebenen Geschwindigkeitsmaasses ab. Wird das Geschwindigkeitsmaass n Mal grösser oder kleiner genommen, so wird damit zugleich auch die Maasseinheit für galvanische Leitungswiderstände n Mal vergrössert oder verkleinert.

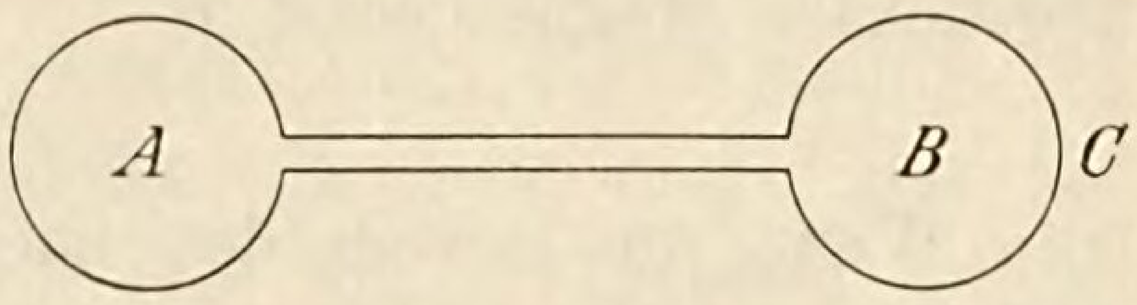
§ 2.

Schema für die Messung eines galvanischen Leitungswiderstands nach absolutem Maass.

Die Längen- und Zeitmessungen, welche nach dem vorigen Paragraphen zur Bestimmung des galvanischen Widerstands eines Leiters genügen, setzen Verhältnisse voraus, von deren zweckmässigen Anord-

nung die praktische Ausführbarkeit und Genauigkeit einer solchen Bestimmung abhängt. Zur einfachen Uebersicht der wesentlichen Verhältnisse diene folgendes Schema.

Aus dem galvanischen Leiter, dessen Widerstand gemessen werden soll, werden zwei kreisförmige Ringe A und B gebildet, welche auf die in der Figur dargestellte Weise zusammenhängen. Der ganze aus den beiden Kreisen A, B und den beiden Verbindungsstücken bestehende Leiter



bildet eine in sich zurücklaufende Linie, von welcher der Einfachheit wegen angenommen wird, dass sie in einer Ebene liege, und dass die die Mittelpunkte beider Kreise verbindende Gerade mit der Richtung des Erdmagnetismus zusammenfalle. T bezeichne die Stärke des Erdmagnetismus, wie sie nach absolutem Maasse ausgedrückt aus magnetometrischen Messungen gefunden wird, r bezeichne die der Einfachheit wegen einander gleich gesetzten Halbmesser der beiden Kreise. Projicirt man nun den Kreis A nach der Richtung des Erdmagnetismus AB auf eine gegen AB senkrechte Ebene, so ist der Flächenraum der von der Projektion begrenzten Ebene $= 0$. Die Beugsamkeit der die beiden Kreise verbindenden Drähte möge aber gestatten, den Kreis A zu drehen und gegen AB senkrecht zu stellen, wo dann der Flächenraum der von derselben Projektion begrenzten Ebene $= \pi r^2$ wird. Diese Drehung geschehe in einer kurzen Zeit s auf solche Weise, dass der Flächenraum der von der Kreisprojektion begrenzten Ebene in dieser Zeit von 0 bis πr^2 gleichförmig wachse. Es ergiebt sich dann nach den *magnetoelektrischen* Gesetzen eine *elektromotorische Kraft*, welche der Erdmagnetismus T auf den gedrehten kreisförmigen Leiter A während der Zeit s ausübt, und welche nach der im vorigen Paragraphen erklärten Maasseinheit durch eE ausgedrückt wird, wo die Zahl e durch die Gleichung

$$e = \frac{\pi r^2}{s} \cdot T$$

bestimmt ist. Durch diese elektromotorische Kraft wird während der Zeit s ein durch den ganzen geschlossenen Leiter gehender Strom hervorgebracht, dessen *Intensität* nach der im vorigen Paragraphen erklärten Maasseinheit mit iJ bezeichnet werden soll. Dieser Strom geht auch durch den Kreis B und wirkt von hier aus auf eine entfernte Magnetnadel in C, deren Drehungsaxe, auf der Richtung des Erdmagnetismus AB senkrecht, in der Ebene der Kreises liegt. C liege in der verlängerten Richtung AB [1]). Es ergiebt sich nun aus den *elektromotorischen*

[1]) d. h., in der die Centra der Kreise A und B verbindenden Linie.

Gesetzen, dass das von dem durch den Kreis B gehenden Strom auf die Nadel in C ausgeübte Drehungsmoment dem von einem Magnetstabe ausgeübten Drehungsmomente gleich ist, welcher im Mittelpunkte des Kreises B so aufgestellt würde, dass seine magnetische Axe auf der Kreisebene senkrecht wäre, wenn sein nach absolutem Maasse ausgedrückter Magnetismus M

$$M = \pi r^2 i$$

ist. Wenn nun ferner der nach gleichem Maasse ausgedrückte Magnetismus der Nadel in $C = m$ und $BC = R$ ist und φ den Winkel bezeichnet, welchen die magnetische Axe der Nadel in C mit der Richtung des Erdmagnetismus AB macht, so wird das von dem Stabmagnetismus M auf den Stabmagnetismus m ausgeübte Drehungsmoment nach bekannten *magnetischen* Gesetzen durch

$$\frac{Mm}{R^3} \cdot \cos\varphi = \frac{\pi r^2}{R^3} \cdot im\cos\varphi$$

ausgedrückt. Hieraus ergiebt sich, wenn K das Trägheitsmoment der Nadel bezeichnet, die *Acceleration* der Drehung:

$$\frac{d^2\varphi}{ds^2} = \frac{\pi r^2}{R^3} \cdot \frac{im}{K} \cdot \cos\varphi,$$

und folglich, wenn die Nadel vorher in Ruhe und $\varphi = 0$ war, die *Drehungsgeschwindigkeit* am Ende der kurzen Zeit s

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{\pi r^2}{R^3} \cdot \frac{im}{K} \cdot s.$$

Aus dieser Geschwindigkeit findet man endlich für die aus *unmittelbarer Beobachtung* bekannte grösste Elongation a der dadurch in Schwingung gesetzten Nadel, nach den bekannten Schwingungsgesetzen durch Multiplikation mit der Schwingungsdauer t und durch Division mit der Zahl π, folgenden Ausdruck:

$$a = \frac{r^2}{R^3} \cdot \frac{im}{K} \cdot st.$$

Für die Schwingungsdauer t hat man aber die bekannte Gleichung:

$$mT = \frac{\pi^2 K}{t^2},$$

woraus

$$\frac{mt}{K} = \frac{\pi^2}{tT}$$

und also

$$a = \frac{\pi^2 r^2}{R^3} \cdot \frac{is}{tT}.$$

Nun ist a durch unmittelbare Beobachtung gefunden, folglich erhält man hieraus zur Bestimmung der Zahl i

$$i = \frac{R^3}{\pi^2 r^2} \cdot \frac{t}{s} \cdot Ta.$$

Man könnte nun ferner, indem man beachtet, dass der durch den Kreis B gehende Strom auch den Kreis A durchläuft, auch die Wirkung des Kreisstroms A auf die Nadel in C berechnen; indessen möge hier der Einfachheit wegen angenommen werden, dass die Entfernung AC so gross sei, dass diese Wirkung gegen die Wirkung des Kreisstroms B verschwinde: es giebt dann die *wirklich beobachtete* Elongationsweite der Nadel in C unmittelbar den Werth von a.

Sonach wird also von der nach absolutem Maasse ausgedrückten *elektromotorischen Kraft* eE, für welche

$$e = \frac{\pi r^2}{s} \cdot T$$

gefunden worden ist, in dem ganzen geschlossenen Leiter, dessen Raum gemessen werden soll, ein Strom hervorgebracht, dessen *Intensität* nach absolutem Maasse durch iJ ausgedrückt wird, wo

$$i = \frac{R^3}{\pi^2 r^2} \cdot \frac{t}{s} \cdot Ta$$

gefunden worden ist. Der *gesuchte Widerstand* des ganzen geschlossenen Leiters wird aber nach der im vorigen Paragraphen erklärten Maasseinheit durch wW ausgedrückt, wo die Zahl w durch das Verhältniss der gefundenen Zahlen e und i bestimmt ist, nämlich:

$$w = \frac{e}{i} = \frac{\pi^3 r^4}{R^3 t a}.$$

Die Ausführung der Messung eines galvanischen Leitungswiderstands nach absolutem Maasse beruht hiernach auf der Messung der Grössen

$$r,\ R,\ t,\ a,$$

oder, mit anderen Worten, der Widerstand des ganzen geschlossenen Leiters kann nach absolutem Maasse ausgedrückt werden, wenn man durch Beobachtungen *erstens* die Zahl a gefunden hat, welche die Elongationsweite der Nadel in Theilen des Halbmessers angiebt, *zweitens* die Zahl r/R, welche den Halbmesser der beiden Kreise in Theilen der Entfernung BC angiebt, *drittens* die Geschwindigkeit r/t, mit welcher der Halbmesser jener Kreise während einer Schwingung der Nadel durchlaufen wird. Auch hieraus sieht man wieder, dass das *Geschwindigkeitsmaass* das einzige Maass ist, welches gegeben sein muss, wenn der Widerstand eines Leiters nach absolutem Maasse durch Messung bestimmt werden soll.

§ 3.

Beobachtungen.

Von den vier Grössen, welche, nach dem vorigen Paragraphen zum Zwecke der Bestimmung eines galvanischen Leitungswiderstands nach absolutem Maasse, durch *Beobachtungen* gefunden werden sollen, können drei wirklich leicht mit grosser Genauigkeit gemessen werden, nämlich der Halbmesser r der beiden Kreise, die Entfernung $BC = R$ des Kreises B von der Nadel in C und die Schwingungsdauer der Nadel t. Es bleibt also nur die vierte Grösse, nämlich die in Theilen des Halbmessers ausgedrückte Elongationsweite der Nadel a, übrig, welche gewöhnlich so klein ist, dass sie nicht beobachtet werden kann. Dies ist der Grund, warum bei der wirklichen Ausführung der Beobachtungen von der im vorigen Paragraphen beschriebenen Anordnung etwas abgewichen werden muss. Um nämlich einen so grossen Werth von a zu erhalten, dass er genau beobachtet werden könne, ist es *erstens* nöthig, dass die Magnetnadel, auf welche der Kreisstrom B wirken soll, statt in einer grossen Entfernung $BC = R$, im Mittelpunkte des Kreisstroms B selbst aufgestellt werde, wo die Wirkung desto grösser ist, je kleiner der Halbmesser r, im Vergleich mit R, ist. Nur muss dabei darauf geachtet werden, dass die Länge der Nadel viel kleiner sei, als der Durchmesser des Kreises, damit die eigenthümliche Vertheilungsweise des Magnetismus in der Nadel nicht genauer in Rechnung gebracht zu werden brauche, weil die Erforschung dieser Vertheilungsweise mit Schwierigkeiten verbunden ist. *Zweitens* ist es nöthig, dass die beiden Kreise, statt aus einer Umwindung, aus vielen Umwindungen des Leiters zusammengesetzt werden, wodurch sie sich in Ringe von grösserem Querschnitt verwandeln. Es muss dann aber der Einfluss aller Umwindungen einzeln in Rechnung gebracht werden, weil sie verschiedene Halbmesser haben und nicht alle in einer Ebene mit der Nadel liegen.

Es wurde daher zu dem galvanischen Leiter, dessen Widerstand gemessen werden sollte, ein sehr langer und dicker Kupferdraht gewählt, der 169 Kilogramm wog. Davon wurden 16 Kilogramm zum Ringe A verwendet, welcher aus 145 Umwindungen bestand, die zusammen eine Fläche von nahe 105 Quadratmetern begrenzten. Dieser Ring wurde vertikal aufgestellt und konnte um seinen vertikalen Durchmesser durch eine Kurbel schnell im Halbkreise gedreht werden, so dass das Perpendikel auf der Ringebene am Anfang und am Ende der Drehung mit dem magnetischen Meridian zusammenfiel. — Die übrigen 153 Kilogramm wurden zu dem Ringe B verwendet, welcher aus 1854 Umwindungen bestand, die zusammen einen 202 Millimeter breiten und 70,9 Millimeter hohen Querschnitt geben. Der innere Halbmesser

dieses Ringes war 303,51, der äussere 374,41 Millimeter. Dieser zweite Ring wurde fest aufgestellt und seine Ebene fiel mit dem magnetischen Meridian zusammen. Im Mittelpunkte dieses zweiten Ringes B wurde nun eine kleine, 60 Millimeter lange Magnetnadel mit Spiegel (wie in einem kleinen Magnetometer) an einem Kokonfaden aufgehängt und die Schwingungen und Elongationen der Nadel mit einem auf den Spiegel gerichteten Fernrohre an einer nahe 4 Meter von dem Spiegel entfernten Skale beobachtet.

Die Beobachtungen wurden auf folgende Weise gemacht. Der Ring A wurde zuerst so gestellt, dass seine Ebene mit dem magnetischen Meridian zusammenfiel und die im Mittelpunkte des Ringes B aufgestellte Magnetnadel wurde dabei in Ruhe gebracht. Darauf wurde der Ring A plötzlich um 90^0 gedreht. Dadurch wurde die im Mittelpunkte des Ringes B befindliche Magnetnadel in Schwingung gesetzt und es wurde mit dem Fernrohr der Stand der Nadel bei ihrer grössten (positiven) Elongation, welche sie nach einer halben Schwingungsdauer erreichte, an der Skale beobachtet. Eine Schwingungsdauer später, also $1\frac{1}{2}$ Schwingungsdauer nach dem Anfang, gelangte die Nadel zu ihrer grössten (negativen) Elongation nach der entgegengesetzten Seite, welche ebenfalls an der Skale beobachtet wurde. Hierauf wurde in dem Augenblicke, wo die wieder vorwärts schwingende Nadel ihren ursprünglichen Ruhestand passirte, also zwei Schwingungsdauern nach dem Beginn der Versuche, der Ring A um 180^0 zurück gedreht. Die schwingende Nadel wurde dadurch mitten in ihrer Bewegung arretirt und rückwärts geworfen, worauf nun wieder zuerst ihre grösste negative und sodann ihre grösste positive Elongation an der Skale beobachtet wurde. Nach Verlauf von vier Schwingungsdauern von Anfang, d. i. in dem Augenblicke, wo die Nadel von ihrer letzten Elongation zurückkehrend ihren ursprünglichen Ruhestand passirte, wurde der Ring wieder um 180^0 vorwärts gedreht und sodann die nämliche Elongation wieder beobachtet, wie das erste Mal, und auf diese Weise wurden die Versuche so lange fortgesetzt, bis eine hinreichende Beobachtungsreihe erhalten worden war. Die folgende Tafel enthält vier solcher Beobachtungsreihen. Für jede Reihe sind in der *ersten* Kolumne die an der Skale beobachteten Elongationen der Reihe nach unter einander gestellt; in der *zweiten* Kolumne sind die Mittelwerthe aus je zwei auf einander folgenden, positiven oder negativen, Elongationen beigefügt worden. In der *dritten* Kolumne sind die Differenzen der auf positive und negative Elongation sich beziehenden Mittelwerthe, d. i. die Grösse der ganzen Schwingungsbogen, bemerkt worden.

Erste Reihe			Zweite Reihe			Dritte Reihe			Vierte Reihe		
467,1			467,1			463,0			462,0		
540,7	543,70		540,5	543,65		536,7	539,65		534,7	538,20	
546,7		80,10	546,8		79,65	542,6		80,40	541,7		80,00
461,4	463,60		461,3	464,00		456,6	459,25		455,3	458,20	
465,8		79,75	466,7		79,55	461,9		80,35	461,1		79,75
540,6	543,35		540,8	543,55		537,6	539,60		535,1	537,95	
546,1		79,25	546,3		79,90	541,6		79,55	540,8		79,50
462,3	464,10		461,8	463,65		458,3	460,05		456,0	458,45	
465,9		79,45	465,5		80,00	461,8		79,70	460,9		79,50
541,4	543,55		542,1	543,65		537,7	539,75		535,3	537,95	
545,7		79,75	545,2		79,70	541,8		79,95	540,6		80,05
462,3	463,80		462,8	463,95		457,9	459,80		456,0	457,90	
465,3		79,70	465,1		79,85	461,7		79,85	459,8		79,85
542,0	543,50		542,3	543,80		537,6	539,65		536,1	537,75	
545,0		79,45	545,3		80,10	541,7		79,70	539,4		79,55
462,8	464,05		462,7	463,70		458,2	459,95		456,8	458,20	
465,3		79,45	464,7		79,80	461,7		80,10	459,6		79,65
542,0	543,50		542,3	543,50		537,6	540,05		536,0	537,85	
545,0		79,65	544,7		79,75	542,5		80,05	539,7		79,70
462,9	463,85		462,8	463,75		457,3	460,00		456,5	458,15	
464,8		79,85	464,7		79,60	462,7		79,50	459,8		79,60
542,7	543,70		541,9	543,35		536,6	539,50		535,8	537,75	
544,7		79,45	544,8		79,75	542,4		79,75	539,7		79,55
463,4	464,25		462,3	463,60		457,2	459,75		456,4	458,20	
465,1		79,70	464,9		79,85	462,3			460,0		79,55
542,6	543,95		541,3	543,45					535,7	537,75	
545,3		79,75	545,6						539,8		
462,8	464,20										
465,6											
Mittel 79,64			Mittel 79,79			Mittel 79,90			Mittel 79,69		

Der Mittelwerth aus diesen vier Reihen zusammen ist 79,755 Skalentheile = 79,4 Millimeter, welcher noch um $\frac{1}{2}$ Millimeter zu vergrössern ist, wenn man auf den Einfluss Rücksicht nimmt, welchen es hatte, dass die Drehung des Ringes A nicht in einer so kurzen Zeit bewerkstelligt werden konnte, welche gegen die Schwingungsdauer der Nadel vernachlässigt werden durfte. Hieraus ergiebt sich für a der Werth:

$$a = \frac{79,9}{8175},$$

indem der doppelte Horizontalabstand des Spiegels von der Skale genau 8175 Millimeter betrug.

Die Schwingungsdauer der Nadel war aus 300 Schwingungen

$$t = 10,2818''$$

gefunden worden, wobei der von der Elasticität des Aufhängungsfadens herrührende Theil der Direktionskraft den 1770. Theil der magnetischen Direktionskraft betrug, also

$$\frac{1}{1+\vartheta} = \frac{1770}{1771}$$

war. Endlich wurde noch, wegen der grossen Entfernung der beiden Ringe in einem nicht eisenfreien Lokale, die Schwingungsdauer einer und derselben Nadel am Orte der beiden Ringe verglichen und ihr Verhältniss wie 2,9126 : 2,9095 gefunden, woraus sich ergiebt, dass wenn T' den Erdmagnetismus für A, T'' für B bezeichnet,

$$T' : T'' = 470 : 471.$$

Diese Beobachtungen genügen, um den Widerstand des ganzen geschlossenen Leiters nach absolutem Maasse zu bestimmen und es wird daraus nach genauer Berechnung

$$w = 2166 \,.\, 10^8$$

gefunden.

§ 4.

Anwendung des Princips der Dämpfung.

Statt den *Erdmagnetismus* zu benutzen, um eine auf absolutes Maass zurückführbare elektromotorische Kraft darzustellen, kann man auch den *Stabmagnetismus* in Anwendung bringen, und es leuchtet dann von selbst ein, dass die zweckmässigste Stelle für den Magnetstab, dessen Magnetismus dazu in Anwendung kommen soll, im *Mittelpunkte* des vom inducirten Leiter gebildeten Ringes sein werde. Dabei kann dann entweder der Magnetstab feststehen und der Ring um seinen auf der magnetischen Axe des Magnetstabs senkrechten Durchmesser hin und her gedreht werden, oder es kann umgekehrt der Ring feststehen und der Magnetstab um jenen Durchmesser hin und her gedreht werden. Im letzteren Falle kann eine starke im Mittelpunkte des Ringes aufgehangene *schwingende Magnetnadel* benutzt werden.

Der Strom, welcher durch die von dem Stabmagnetismus einer im Mittelpunkte des Ringes schwingenden Magnetnadel herrührende elektromotorische Kraft in dem geschlossenen Leiter hervorgebracht wird, wirkt nun aber nach dem Principe der *Dämpfung* selbst wieder rückwärts auf die schwingende Nadel und bringt eine Abnahme ihrer Schwingungsbogen hervor, welche mit grosser Genauigkeit beobachtet werden kann, und die *Intensität* dieses Stroms lässt sich aus diesen Beobachtungen ebenfalls nach absolutem Maasse bestimmen. Es leuchtet daraus ein, dass der Strom alsdann gar nicht durch einen zweiten, als Galvanometer dienenden Ring geleitet zu werden braucht, um die Intensität des Stroms zu messen. Es kann daher der ganze Leiter, dessen Widerstand gemessen werden soll, zur Bildung eines einzigen Rings, welcher zugleich als Induktor und Multiplikator dient, benutzt werden.

Nach dieser Vereinfachung genügt *die Beobachtung der Schwingungsbogen einer im Mittelpunkte des Ringes schwingenden Magnetnadel*, durch deren *Grösse* die Stärke der elektromotorischen Kraft, welche auf den

geschlossenen Leiter wirkt, und durch deren *Abnahme* die Intensität des von jener elektromotorischen Kraft in dem geschlossenen Leiter hervorgebrachten Stroms bestimmt werden kann.

Bei der Ausführung der Beobachtungen nach diesem Principe der *Dämpfung* kommt es hauptsächlich darauf an, dass der Magnetismus der im Mittelpunkte des Ringes schwingenden Nadel recht stark sei, um eine starke Dämpfung zu bewirken, dass aber zugleich auch die Länge der Nadel im Vergleich mit dem Durchmesser des Rings recht klein sei, damit zur Berechnung des Widerstands des geschlossenen Leiters keine genaue Kenntniss der Vertheilungsweise des Magnetismus in der Nadel erforderlich sei, deren genauere Erforschung Schwierigkeiten findet. In dem jetzt allein gebrauchten Ringe, welcher der nämliche ist, welcher vorher mit B bezeichnet wurde und 303,51 Millimeter inneren, und 374,41 Millimeter äusseren Halbmesser und 202 Millimeter Höhe hatte, wurde nun eine bei 90 Millimeter Länge möglichst starke Magnetnadel aufgehangen und damit begonnen, dass die Enden des den Ring bildenden Drahts von einander *gelöst* wurden. Die Nadel wurde alsdann in Schwingung gesetzt und nach der von Gauss in den „Resultaten aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins im Jahre 1837“ gegebenen Anleitung [1]) die Schwingungsdauer der Nadel und die Abnahme ihrer Schwingungsbogen, oder das logarithmische Dekrement dieser Abnahme, bestimmt. Darauf wurde der ringförmige Leiter *geschlossen* und die nämlichen Beobachtungen wiederholt. Sodann wurde der Leiter wieder *gelöst* und auf diese Weise mehrmals abgewechselt. Die Resultate dieser Beobachtungen sind in der folgenden Tafel zusammengestellt, wo in der *ersten* Kolumne unter A das logarithmische Dekrement der Abnahme der Schwingungsbogen bei *geschlossenem* Leiter, in der *zweiten* Kolumne unter B das nämliche bei *offenem* Leiter, in der *dritten* Kolumne unter t die dabei beobachtete *Schwingungsdauer* angegeben ist. Darunter sind die Mittelwerthe bemerkt.

A	B	t
0,028 645	0,000 460	9,112 8
0,027 955	0,000 360	9,114 8
0,028 565	0,000 380	9,110 7
0,028 388	0,000 400	9,112 8

Hieraus ergiebt sich also der von der Dämpfung herrührende Theil des logarithmischen Dekrements, nach dem Briggs'schen Systeme = 0,028 388 — 0,000 400 = 0,027 988, oder, nach dem natürlichen Systeme,

$$\lambda = 0{,}064\,445.$$

[1]) [Gauss' Werke, Bd. V, p. 374.]

Der Stabmagnetismus der schwingenden Nadel M, aus magnetometrischen Messungen bestimmt, war nach absolutem Maasse im Verhältniss zum horizontalen Theile der erdmagnetischen Kraft T gefunden worden:

$$\frac{M}{T} = 20\,733\,000.$$

Der von der Elasticität des Aufhängungsfadens herrührende Theil der Direktionskraft der Nadel endlich war 68 Mal kleiner als der vom Magnetismus herrührende gefunden worden, oder

$$\frac{1}{1+\vartheta} = \frac{68}{69}.$$

Für die Berechnung des Leitungswiderstandes aus diesen nach dem Principe der Dämpfung ausgeführten Beobachtungen ergeben sich folgende Regeln.

Nach dem Gesetze der magnetischen Induktion ist die *elektromotorische Kraft* eines im Mittelpunkte eines kreisförmigen Leiters schwingenden kleinen Magnets, dessen magnetische Axe mit der Kreisebene den Winkel φ macht, seinem Magnetismus M, dem Kosinus des Winkels φ und der Drehungsgeschwindigkeit $d\varphi/dt$ direkt, dem Halbmesser des Kreises r umgekehrt proportional, und wird, wenn M nach absolutem Maasse ausgedrückt ist, ebenfalls nach absolutem Maasse bestimmt durch:

$$e = \frac{2\pi M}{r} \cdot \cos\varphi \frac{d\varphi}{dt}.$$

Nach elektromagnetischem Gesetze dagegen ist das *Drehungsmoment*, welches der im kreisförmigen Leiter inducirte Strom auf den im Mittelpunkte schwingenden kleinen Magnet ausübt, dem Magnetismus M, dem Kosinus des Winkels φ und der Stromintensität i direkt, dem Halbmesser r umgekehrt proportional, und wird, wenn auch i nach absolutem Maasse ausgedrückt ist, ebenfalls nach absolutem Maasse bestimmt durch:

$$D\frac{d\varphi}{dt} = \frac{2\pi M}{r} \cdot i \cos\varphi.$$

Für kleine Schwingungen, bei welchen φ wenig von 0 abweicht, ist

$$e = \frac{2\pi M}{r} \cdot \frac{d\varphi}{dt},$$

$$D\frac{d\varphi}{dt} = \frac{2\pi M}{r} \cdot i.$$

Bezeichnet K das Trägheitsmoment des schwingenden Magnets, auf welchen die vom horizontalen Theile der erdmagnetischen Kraft her-

rührende Direktionskraft MT wirkt, so ergiebt sich die Gleichung seiner Bewegung:

$$0 = \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{MT}{K}\varphi + \frac{D}{K}\frac{d\varphi}{dt}$$

und hieraus durch Integration:

$$\varphi = p + Ae^{-\frac{Dt}{2K}} \sin(t - B)\sqrt{\frac{MT}{K} - \frac{1}{4}\frac{D^2}{K^2}}.$$

Hierin ist $D/2K$ das auf die Zeiteinheit reducirte logarithmische Dekrement der Abnahme der Schwingungsbogen nach dem natürlichen Systeme; also ist, wenn τ die Schwingungsdauer unter dem Einflusse der Dämpfung bezeichnet:

$$\lambda = \frac{D\tau}{2K} = \frac{\pi M}{rK} \cdot \frac{dt}{d\varphi} \cdot \tau i$$

und die *Stromintensität:*

$$i = \frac{rK\lambda}{\pi M\tau} \cdot \frac{d\varphi}{dt}.$$

Es folgt hieraus zur Berechnung des Leitungswiderstandes

$$w' = \frac{e}{i} = \frac{2\pi^2 M^2}{r^2 K\lambda} \cdot \tau.$$

Aus obiger Gleichung für φ ergiebt sich aber zur Bestimmung der Schwingungsdauer unter dem Einfluss der Dämpfung

$$\tau\sqrt{\frac{MT}{K} - \frac{1}{4}\frac{D^2}{K^2}} = \pi = \tau\sqrt{\frac{MT}{K} - \frac{\lambda^2}{\tau^2}},$$

woraus

$$\frac{M\tau}{K} = \frac{\pi^2 + \lambda^2}{\tau T},$$

also

$$w' = \frac{2\pi^2}{r^2} \cdot \frac{\pi^2 + \lambda^2}{\lambda\tau} \cdot \frac{M}{T}.$$

Hiernach berechnet, mit Rücksicht auf die aus der Zusammensetzung des Dämpfers aus vielen Umwindungen, und aus der Elasticität des Aufhängungsfadens sich ergebende Korrektion, findet man aus obigen Beobachtungen:

$$w' = 1898 \,.\, 10^8.$$

§ 5.

Vergleichung der nach absolutem Maasse bestimmten Leitungswiderstände mit Jacobi's *Widerstands-Etalon.*

Zur Vergleichung des Widerstandes zweier Leiter giebt es sehr verschiedene Methoden, auf deren Erörterung hier nicht eingegangen

zu werden braucht. Nach einer solchen in der Abhandlung näher erörterten Methode sind die beiden in den vorhergehenden Paragraphen betrachteten Leitungswiderstände verglichen und gefunden worden:

$$w : w' = 1138 : 1000.$$

Reducirt man nach diesem Verhältnisse den ersteren Widerstand auf den letzteren, so hat man dafür

$$w' = \frac{1000}{1138} w = 1903 \,.\, 10^8,$$

während die unmittelbare Bestimmung im vorigen Paragraphen

$$w' = 1898 \,.\, 10^8$$

gegeben hat. Aus diesen beiden, nach ganz verschiedenen Methoden gefundenen, sehr nahe übereinstimmenden Angaben soll in der Folge

$$19 \,.\, 10^{10}$$

als mittlerer Werth für diesen Widerstand angenommen werden.

Auf die Wichtigkeit, welche die Einführung eines bestimmten, von allen Physikern angenommenen Maasses für die Leitungswiderstände, wie auch für die elektromotorischen Kräfte und Stromintensitäten, gegenwärtig habe, wo so viele galvanische Untersuchungen mit so mannigfaltigen Instrumenten gemacht werden, deren Vergleichung unter einander oft von grossem Interesse ist, hat besonders Jacobi aufmerksam gemacht, und hat zu diesem Zwecke für den Leitungswiderstand ein *Grundmaass* in einem Kupferdrahte vorgeschlagen, welchen er mehreren Physikern, die sich mit galvanischen Messungen beschäftigen, mit der Aufforderung zugesandt hat, diesen Widerstands-Etalon mit ihren Widerstandsmessern zu vergleichen und ihre Messungen künftig nach diesem Messer anzugeben.

Dieser Widerstands-Etalon ist ein Kupferdraht von $7619\frac{3}{4}$ Millimeter Länge und $\frac{2}{3}$ Millimeter Dicke, welcher $22\,449\frac{3}{10}$ Milligramm wiegt.

Dieses von Jacobi eingeführte Widerstandmaass, welches, wie zu hoffen, allgemeine Annahme finden wird, wird keineswegs durch das hier erörterte *absolute Maass* verdrängt; denn es ist nicht möglich, jeden Widerstand nach diesem absoluten Maasse unmittelbar zu bestimmen, während jeder Widerstand mit dem Jacobi'schen Maasse unmittelbar verglichen werden kann. Bei der Bedeutung aber, welche die absoluten Maassbestimmungen für viele Untersuchungen haben, ist es von Wichtigkeit, alle nach dem Jacobi'schen Maasse gemachten Angaben auf absolutes Maass reduciren zu können, was durch eine Vergleichung des oben nach absolutem Maasse bestimmten Widerstandes mit dem Widerstande des Jacobi'schen Etalons leicht geschehen kann.

Eine solche Vergleichung ist nun zu diesem Zwecke wirklich ausgeführt worden und hat ergeben, dass diese beiden Leitungswiderstände

sich nahe wie 32 : 1 verhalten, oder genauer wie 19000 : 598. Da nun also der erstere Leitungswiderstand nach absolutem Maasse zu 19000 Millionen Einheiten gefunden worden ist, so entspricht das Jacobi'sche Widerstandsmaass 5980 Millionen Einheiten, oder man erhält ganz nahe die nach Jacobi's Maasse bestimmten Leitungswiderstände durch Multiplikation mit 6 Milliarden nach absolutem Maasse ausgedrückt. Es würde nach dieser Bestimmung möglich sein, das Jacobi'sche Maass, auch wenn es verloren ginge, näherungsweise wieder herzustellen.

§ 6.

Ueber den von Kirchhoff *gefundenen Werth der Konstanten, von welcher die Intensität inducirter elektrischer Ströme abhängt.*

Die von Neumann in seiner Aufstellung der mathematischen Gesetze der inducirten elektrischen Ströme mit ε bezeichnete *Induktions-Konstante* hat folgende Bedeutung. Bezeichnet man mit W die oben für galvanische Leitungswiderstände aufgestellte absolute Maasseinheit, mit W' dagegen dasjenige Widerstandsmaass, dessen man sich wirklich bedient, ferner mit C das Geschwindigkeitsmaass, welches bei Aufstellung obiger absoluter Maasse zum Grunde liegt (1 Millimeter in 1 Sekunde), mit C' dagegen dasjenige Geschwindigkeitsmaass, dessen man sich bei Messung der inducirenden Bewegungen und Wirkungen der inducirten Ströme wirklich bedient (1 preussischer Zoll = 26,154 Millimeter in 1 Sekunde bei Kirchhoff); so ist

$$\varepsilon = 2\frac{C'W}{CW'}.$$

Es geht daraus hervor, dass wenn der Werth dieser Induktionskonstanten ε einmal bestimmt ist, jeder nach dem gewählten Maasse gegebene Widerstand auf absolutes Maass zurückgeführt werden kann.

Bei der von Kirchhoff im 76. Bande dieser Annalen gegebenen Bestimmung der Induktions-Konstanten ε ist zum Widerstandsmaasse der Widerstand eines *Kupferdrahts* gewählt worden, dessen Länge 1 preussischer Zoll = 26,154 Millimeter und dessen Querschnitt 1 preussischer Quadratzoll = 684 Quadratmillimeter ist. Leider ist hierdurch kein ganz bestimmtes Widerstandsmaass gegeben, weil verschiedene Stücke Kupfer bei den nämlichen Dimensionen verschiedenen Widerstand haben, und es folgt daraus, dass auch der Werth der Induktions-Konstanten ε innerhalb der jener Variabilität des Kupferwiderstands entsprechenden Grenzen dabei unbestimmt gelassen wird. Kirchhoff bemerkt daher selbst: „Da die Leitungsfähigkeit des Kupfers zwischen gewissen Grenzen variirt, so ist bei der Angabe des Zahlenwerths von ε nur eine beschränkte

Genauigkeit von Interesse.“ KIRCHHOFF wollte nur einen Näherungswerth von ε geben, welcher für seinen Zweck genügte, und er begnügte sich damit um so eher, als die von ihm gebrauchten Methoden und Instrumente auch dann, wenn er ein ganz bestimmtes Widerstandsmaass aufgestellt hätte, eine feinere Bestimmung des Zahlenwerths von ε kaum gestattet haben würden.

Es ist aber von Wichtigkeit, das Interesse, welches eine genaue Bestimmung des Zahlenwerths von ε hat, das aber durch jene Unbestimmtheit in der Wahl des Widerstandsmaasses verschwindet, durch Hebung dieser Unbestimmtheit wieder herzustellen, und dies geschieht, wenn man sich nicht an *Kupfer im Allgemeinen*, sondern blos an das von KIRCHHOFF bei seinen Messungen *wirklich gebrauchte Stück Kupfer* hält und den Widerstand eines Draths von *diesem Kupfer*, dessen Länge 26,154 Millimeter und dessen Querschnitt 684 Quadratmillimeter ist, zum Widerstandsmaass wählt und also das von KIRCHHOFF gefundene Resultat nur auf das hierdurch genau bestimmte Maass und die damit gemachten oder darauf reducirten Messungen bezieht.

Für dieses Maass fand nun KIRCHHOFF, indem er 1 preussischen Zoll in 1 Sekunde zum Geschwindigkeitsmaasse genommen hatte:

$$\varepsilon = \frac{1}{192},$$

woraus folgt (da $C' = 26{,}154\,C$ war), dass derjenige Widerstand, welcher 52,308 Einheiten des oben aufgestellten absoluten Maasses beträgt, der 192. Theil des Widerstands eines Drahts von dem KIRCHHOFF'schen Kupfer ist, dessen Länge 26,154 Millimeter und dessen Querschnitt 584 Quadratmillimeter ist, oder mit anderen Worten, dass das von KIRCHHOFF gewählte Widerstandsmaass 10 043 Mal grösser ist, als das oben aufgestellte absolute Maass.

Wenn nun auch diese Angabe des Zahlenwerths von ε nur als eine approximative betrachtet werden soll, so hat es doch Interesse, dieselbe mit anderen Angaben, welche auf ganz anderen Wegen und mit verschiedenen Instrumenten gefunden worden sind, zu vergleichen, weil dadurch eine Prüfung der verschiedenen dabei zu Hülfe genommenen Naturgesetze an einander gewonnen wird. KIRCHHOFF's Messungen beziehen sich nämlich auf Ströme, welche durch *Volta-Induktion* erzeugt waren, und es sind daher bei ihm die Gesetze der Volta-Induktion, welche zur Bestimmung des Zahlenwerths von ε zu Hülfe genommen worden sind; während die von mir gemachten Messungen sich auf Ströme beziehen, welche durch *Magnet-Induktion* erzeugt waren, und es daher die Gesetze der Magnet-Induktion sind, welche bei mir zur Bestimmung des Zahlenwerths von ε führen sollen.

Es soll daher zunächst der Zahlenwerth von ε gegeben werden,

welcher aus den von mir gemachten Messungen sich ergiebt. Dass nämlich aus diesen Messungen der Werth von ε bestimmt werden könne, sobald nur der Widerstand des KIRCHHOFF'schen Kupferdrahts mit dem Widerstande des JACOBI'schen Etalons verglichen worden ist, leuchtet von selbst ein. Diese Vergleichung habe ich nun aber ausgeführt, nachdem ich jenen Draht von KIRCHHOFF gütigst mitgetheilt erhalten habe, und bin dadurch in den Stand gesetzt, das Resultat dieser Vergleichung hier nachträglich mitzutheilen. Das Resultat dieser Vergleichung ist folgendes:

Ein Stück von KIRCHHOFF's Draht, welches 13,573 preussische Zoll lang war und 0,4061 Quadratlinien Querschnitt hatte, besass einen Widerstand, der sich zum Widerstande des JACOBI'schen Etalons verhielt wie:

$$1 : 106.$$

Hieraus folgt das Verhältniss des Widerstandes des von KIRCHHOFF gewählten (oben näher bestimmten) Maasses zu dem Widerstande des JACOBI'schen Etalons wie:

$$1 : 106 \,.\, 13{,}573 \cdot \frac{144}{0{,}4061} \cdot$$

Bezeichnet man also den Widerstand des JACOBI'schen Etalons mit J und denjenigen von KIRCHHOFF's Widerstandsmaass mit W', so ist

$$\frac{J}{W'} = 510\,180.$$

Nun ist aber der Widerstand des JACOBI'schen Etalons gleich 5 980 Millionen Einheiten des absoluten Maasses oben gefunden worden; folglich ist, wenn das absolute Widerstandsmaass mit W bezeichnet wird

$$\frac{J}{W} = 5\,980\,000\,000;$$

folglich

$$\frac{W'}{W} = 11\,720.$$

Nun ist $C'/C = 26{,}154$, folglich

$$\varepsilon = 2\frac{C'W}{CW'} = \frac{1}{224},$$

d. i. um $\frac{1}{7}$ kleiner als KIRCHHOFF gefunden hat. Eine grössere Uebereinstimmung liess sich nicht erwarten, weil KIRCHHOFF's Angabe blos als Näherungswerth Geltung haben soll.

Es möge hier noch endlich eine Bestimmung des *specifischen Widerstands der verschiedenen Sorten von Kupfer* beigefügt werden, welche zum JACOBI'schen Etalon, dem KIRCHHOFF'schen Drahte und dem von mir gebrauchten Dämpfer verwendet worden sind.

Man pflegt den *specifischen Widerstand* eines Körpers nach einer absoluten Einheit anzugeben, indem man zu dieser Einheit den specifischen Widerstand eines solchen Körpers nimmt, dessen absoluter Leitungswiderstand bei der Länge = 1 und bei dem Querschnitt = 1 dem festgesetzten Widerstandsmaasse gleich ist. Die Bestimmung des specifischen Widerstandes nach dieser Einheit findet aber besonders bei feinen Drähten eine praktische Schwierigkeit in der genauen Ausmessung ihres Querschnitts, und Kirchhoff hat daher zur Beseitigung dieser Schwierigkeit den Querschnitt seines Drahts auf indirektem Wege durch Bestimmung seines absoluten und specifischen Gewichts und seiner Länge ermittelt.

Nun liegt aber der Bestimmung specifischer Widerstände nach dieser Einheit die Voraussetzung zum Grunde, dass der Leitungswiderstand eines und desselben Drahts von unveränderter Länge, wenn derselbe seiner Dicke nach ausgedehnt oder zusammengedrückt werde, im verkehrten Verhältniss des Querschnitts variire, was aber auf keine Weise nachgewiesen worden ist, auch bei den geringen Aenderungen des Querschnitts, die man durch Drucke hervorbringen kann, schwerlich nachgewiesen werden kann. Man hat daher eben so viel Grund, anzunehmen, dass sobald nur die Masse und die Länge des Drahts unverändert bleibe, der Leitungswiderstand auch bei veränderlichem Querschnitte nicht variire. Unter dieser Annahme musste aber die absolute Einheit auf andere Weise festgestellt werden, nämlich als der specifische Widerstand eines solchen Körpers, dessen absoluter Leitungswiderstand bei der Länge = 1 und bei der Masse = 1 dem festgesetzten Widerstandsmaasse gleich ist. Man bestimmt darnach den specifischen Widerstand irgend eines Körpers dadurch, dass man den nach dem festgesetzten Widerstandsmaasse ausgedrückten Leitungswiderstand eines daraus gebildeten Drahts mit seiner Masse multiplicirt und mit dem Quadrate seiner Länge dividirt.

Nach der so festgesetzten Einheit sollen nun die specifischen Widerstände der drei Kupfersorten, welche von Jacobi, Kirchhoff und von mir gebraucht worden sind, bestimmt werden, weil, auch abgesehen von den obigen Bedenken, diese Bestimmung jedenfalls die praktisch ausführbarste und anwendbarste ist. Folgende Tafel giebt die Uebersicht von diesen Bestimmungen.

Kupfersorte zu	Länge in Millim.	Masse in Milligramm	Widerstand nach absolutem Maasse	Specif. Widerstand	ε
Jacobi's Draht	7 620	22 435	5 980 000 000	2 310 000	$\frac{1}{270}$
Kirchhoff's „	355	4 278	58 500 000	1 916 000	$\frac{1}{224}$
Weber's „	3 946 000	152 890 000	190 000 000 000	1 865 600	$\frac{1}{218}$

Man sieht hieraus, dass zwischen dem von Kirchhoff und von mir gebrauchten Kupfer nur ein geringer Unterschied Statt findet, während das von Jacobi gebrauchte viel mehr abweicht, indem es eine bedeutend geringere Leitungsfähigkeit besitzt. In der Vermuthung, dass Jacobi zu seinem Etalon vielleicht galvanoplastisch niedergeschlagenes Kupfer angewendet habe, habe ich einen Draht von solchem Kupfer, den ich durch die Güte des Herrn Professor Schellbach in Berlin erhielt, einer Prüfung unterworfen und folgende Resultate gefunden, welche im Gegensatze mit obiger Vermuthung beweisen, dass das galvanoplastisch gewonnene und zu Draht ausgezogene Kupfer sogar noch etwas grössere Leitungsfähigkeit besitzt.

Ein Draht von galvanoplastisch niedergeschlagenem Kupfer.	Länge in Millim.	Masse in Milligramm	Widerstand nach absolutem Maasse	Specif. Widerstand	ε
	12 780	221 295	1 243 000 000	1 684 000	$\frac{1}{196}$

In der letzten Kolumne hier und in der oberen Tafel sind unter ε die verschiedenen Zahlenwerthe bemerkt, welche für die Neumann'sche Induktions-Konstante erhalten wurden, wenn man sich an die von Kirchhoff gewählten Maasse hält, dabei aber die verschiedenen hier betrachteten Kupfersorten in Anwendung bringen wollte. Hält man sich dagegen an die oben festgesetzten absoluten Maasse, so ist $C' = C$, $W' = W$ und ε hat stets den Werth 2.

§ 7.

Ueber die Konstanten der elektrischen Gesetze, welche von der Wahl der Maasse abhängen.

Das von Neumann aufgestellte Gesetz inducirter elektrischer Ströme stellt die Intensität dieser Ströme als abhängig von einer Konstanten dar, deren Zahlenwerth aus den Maassen bestimmt werden muss, nach welcher die in Betracht gezogenen Grössen gemessen werden. Diese Konstante hat Neumann die *Induktionskonstante* genannt. Eine solche Konstante kommt nun in dem allgemeinen Ausspruch jedes Naturgesetzes vor, welcher angiebt, wie eine Grösse durch andere bestimmt werde. Es möge hier eine Uebersicht dieser Konstanten für alle Grundgesetze folgen, welche sich auf *elektromotorische Kräfte*, *Stromintensitäten* und *galvanische Leitungswiderstände* beziehen. Jedes dieser Gesetze stellt die gesuchte Grösse als einen Ausdruck anderer messbaren Grössen dar, welcher eine Konstante zum Faktor hat, deren Zahlenwerth aus den gewählten Maassen zu bestimmen ist.

1. Das Grundgesetz der VOLTA'schen Säule stellt die Intensität des Stromes i als einen Ausdruck der elektromotorischen Kraft e und des Widerstands w dar, nämlich, wenn die Konstante, deren Zahlenwerth aus den gewählten Maassen zu bestimmen ist, mit a bezeichnet wird:

$$i = a \cdot \frac{e}{w}.$$

Die Konstante a hat folgende Bedeutung. Bezeichnet man mit J, E, W die oben festgesetzten absoluten Maasse für Stromintensitäten, elektromotorische Kräfte und Leitungswiderstände, und mit J', E', W' diejenigen Maasse, deren man sich wirklich bedient, so ist

$$a = \frac{JE'W}{J'EW'},$$

folglich, wenn man sich der absoluten Maasse selbst bedient,

$$a = 1.$$

2. Das Grundgesetz des Elektromagnetismus stellt die elektromotorische Kraft F als einen Ausdruck der Masse magnetischen Fluidums μ, der Länge ds und Intensität i des Stromelements, der Entfernung beider von einander r, und einer Zahl dar, welche durch den Winkel φ gegeben ist, den r mit ds bildet, nämlich, wenn die Konstante, deren Zahlenwerth aus den gewählten Maassen zu bestimmen ist, mit β bezeichnet wird:

$$F = \beta \cdot \frac{\mu i ds}{r^2} \sin \varphi.$$

Die Konstante β hat folgende Bedeutung. Bezeichnet man mit P die absolute Maasseinheit für Drehungsmomente (das Produkt eines Millimeters in diejenige Kraft, welche in einer Sekunde der Masse eines Milligramms die absolute Maasseinheit der Geschwindigkeit ertheilt), mit M die absolute Maasseinheit des magnetischen Fluidums und mit J das absolute Maass für Stromintensitäten, ferner mit P', M', J' diejenigen Maasse, deren man sich wirklich bedient, so ist:

$$\beta = \frac{PM'J'}{P'MJ},$$

folglich, wenn man sich der absoluten Maasse selbst bedient,

$$\beta = 1.$$

3. Das AMPÈRE'sche Grundgesetz der Elektrodynamik stellt die elektrodynamische Anziehungskraft F als einen Ausdruck der Stromintensitäten zweier Elemente i, i' und einer Zahl dar, welche durch die Verhältnisse der Länge der beiden Stromelemente zu ihrer Entfernung ds/r, ds'/r und durch die drei Winkel ε, ϑ, ϑ' gegeben ist,

welche ds und ds' mit einander und mit r bilden, nämlich, wenn die Konstante, deren Zahlenwerth aus den gewählten Maassen zu bestimmen ist, mit γ bezeichnet wird:

$$F = \gamma \cdot ii' \cdot \frac{ds\,ds'}{r^2}\,(\cos\varepsilon - \tfrac{3}{2}\cos\vartheta\cos\vartheta').$$

Die Konstante γ hat folgende Bedeutung. Bezeichnet man mit F das absolute Kraftmaass (diejenige Kraft, welche in einer Sekunde der Masse eines Milligramms die Geschwindigkeit von ein Millimeter in einer Sekunde ertheilt), mit J das absolute Maass für Stromintensitäten, und mit F', J' diejenigen Maasse, deren man sich wirklich bedient, so ist

$$\gamma = \frac{FJ'J'}{F'JJ},$$

folglich, wenn man sich der absoluten Maasse selbst bedient,

$$\gamma = 2.$$

4. Das Grundgesetz der Magnet-Induktion stellt die elektromotorische Kraft e als einen Ausdruck der Masse magnetischen Fluidums μ, der Geschwindigkeit der inducirenden Bewegung c, der Länge des inducirten Elements ds und dessen Entfernung r von μ, und einer Zahl dar, welche durch die beiden Winkel φ, ψ gegeben ist, die ds mit r und c mit der Normale der Ebene rds bildet, nämlich, wenn die Konstante, deren Zahlenwerth aus den gewählten Maassen zu bestimmen ist, mit δ bezeichnet wird:

$$e = \delta \cdot \frac{\mu c\,ds}{r^2}\sin\varphi\cos\psi.$$

Die Konstante δ hat folgende Bedeutung. Bezeichnet man mit E die absolute Maasseinheit für elektromotorische Kräfte, mit M die absolute Masseneinheit des magnetischen Fluidums, mit S die Zeitsekunde, und mit E', M', S' diejenigen Maasse, deren man sich wirklich bedient, so ist

$$\delta = \frac{EM'S}{E'MS'},$$

folglich, wenn man sich der absoluten Maasse selbst bedient,

$$\delta = 1.$$

5. Das Grundgesetz der Volta-Induktion stellt die elektromotorische Kraft e als einen Ausdruck der Stromintensität i und deren Aenderung di/dt, der Geschwindigkeit der inducirenden Begwegung c und der Entfernung des inducirten Elements vom inducirenden r und mehreren Zahlen dar, welche durch die Verhältnisse der Länge der beiden Ele-

mente zu ihrer Entfernung ds/r, ds'/r und durch die vier Winkel ε, ϑ, ϑ', φ gegeben sind, welche ds und c mit einander und mit r, und ds' mit r bilden, nämlich, wenn die Konstante, deren Zahlenwerth aus den gewählten Maassen zu bestimmen ist, mit ζ bezeichnet wird:

$$e = \zeta \cdot \left[ci \cdot \frac{ds\,ds'}{r^2} (\cos\varepsilon - \tfrac{3}{2}\cos\vartheta\cos\vartheta')\cos\varphi + \frac{1}{2}\frac{di}{dt}\frac{ds\,ds'}{r}\cos\vartheta\cos\varphi \right].$$

Die Konstante ζ hat folgende Bedeutung. Bezeichnet man mit E und J die absoluten Maasseinheiten für elektromotorische Kräfte und Stromintensitäten und mit C das absolute Geschwindigkeitsmaass (ein Millimeter in einer Sekunde), und mit E', J', C' diejenigen Maasse, deren man sich wirklich bedient, so ist:

$$\zeta = 2 \cdot \frac{EJ'C'}{E'JC},$$

folglich, wenn man sich der absoluten Maasse selbst bedient,

$$\zeta = 2.$$

6. Das allgemeine Grundgesetz der elektrischen Wirkung stellt die elektrische Kraft F als einen Ausdruck der elektrischen Massen v, v', ihrer Entfernung r, ihrer relativen Geschwindigkeit dr/dt und deren Aenderung ddr/dt^2 dar, nämlich, wenn die Konstante, deren Zahlenwerth aus den gewählten Maassen zu bestimmen ist, mit η bezeichnet wird:

$$F = \eta \cdot \frac{vv'}{r^2}\left[1 - \frac{1}{aa}\left(\frac{dr^2}{dt^2} - 2r\frac{d^2r}{dt^2}\right)\right].$$

(a bezeichnet die Zahl, welche das Verhältniss derjenigen Geschwindigkeit angiebt, mit welcher zwei elektrische Massen gegen einander bewegt werden müssen, wenn sie gar keine Kraft auf einander ausüben sollen, zu der Geschwindigkeit von ein Millimeter in einer Sekunde.) Die Konstante η hat folgende Bedeutung. Bezeichnet man mit F das absolute Kraftmaass, mit N die absolute Masseneinheit des elektrischen Fluidums (diejenige Masse des elektrischen Fluidums, welche auf eine gleiche Masse in ein Millimeter Entfernung die absolute Einheit der Kraft ausübt), mit R ein Millimeter, und mit F', N', R' diejenigen Maasse, deren man sich wirklich bedient, so ist:

$$\eta = \frac{FN'^2R^2}{F'N^2R'^2},$$

folglich, wenn man sich der absoluten Maasse selbst bedient,

$$\eta = 1.$$

Jede elektrische Kraft kann aber als elektromotorische Kraft wirken und diese letztere e wird dann nach dem allgemeinen Grundgesetze der

elektrischen Wirkung als ein Ausdruck der elektrischen Masse v, der Länge des Elements ds, in welchem die elektrische Masse, auf welche gewirkt wird, enthalten ist, der Entfernung beider von einander r, ihrer relativen Geschwindigkeit dr/dt und deren Aenderung ddr/dt^2 und des Winkels φ, welchen ds mit r bildet, dargestellt, nämlich, wenn die Konstante, deren Zahlenwerth aus den gewählten Maassen zu bestimmen ist, mit k bezeichnet wird:

$$e = k \cdot \frac{v\,ds}{r^2}\left[a - \frac{1}{a}\left(\frac{dr^2}{dt^2} - 2r\frac{d^2r}{dt^2}\right)\right]\cos\varphi.$$

Die Konstante k hat folgende Bedeutung. Bezeichnet man mit E die absolute Maasseinheit für elektromotorische Kräfte, mit N die absolute Masseneinheit des elektrischen Fluidums, mit C die absolute Einheit der Geschwindigkeit (ein Millimeter in der Sekunde), mit R ein Millimeter, und mit E', N', C', R' diejenigen Maasse, deren man sich wirklich bedient, so ist:

$$k = \frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{EN'C'R}{E'NCR'},$$

folglich, wenn man sich der absoluten Maasse selbst bedient,

$$k = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

X.

Elektrodynamische

Maassbestimmungen

insbesondere

Widerstandsmessungen.

Von

Wilhelm Weber.

[Abhandlungen der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften, mathematisch-physische Klasse, Bd. 1, Leipzig 1852, p. 199—381.]

I.

Widerstandsmessungen nach einem gegebenen Grundmaasse.

1.

Die Ausführung der Widerstandsmessungen setzt, wie die Ausführung anderer Messungen, dreierlei voraus, nämlich *erstens* eine Definition der zu messenden Grössenart, *zweitens* ein bestimmtes Maass und *drittens* eine Methode zur Vergleichung der Grössen dieser Art unter einander.

Erstens die *Definition* des Widerstands, von welchem hier gehandelt wird, lässt sich auf folgende Weise aussprechen. Nach den von Ohm aufgestellten Gesetzen der galvanischen Kette hat bei *unverändertem geschlossenem Leiter* der Quotient aus der gemessenen *elektromotorischen Kraft* und aus der gemessenen *Stromintensität* immer gleichen Werth und dieser Werth hängt blos von der Grösse und Beschaffenheit des Leiters ab. Dies vorausgesetzt, wird nun Dasjenige, was in der Grösse und Beschaffenheit des Leiters liegt und wovon der Werth jenes konstanten Quotienten abhängt, mit dem Namen des *Widerstands* des Leiters bezeichnet und als *eine jenem Quotienten proportionale Grösse* betrachtet. Hierdurch ist die Möglichkeit von Widerstandsmessungen vermittelst der Bestimmung jenes Quotienten gegeben.

Was *zweitens* das *Maass* des Widerstands betrifft, so soll hier das von Jacobi in Petersburg aufgestellte und unter dem 30. August 1846 mit folgenden Bemerkungen an Herrn Professor Poggendorff in Berlin übersendete *Grundmaass* angenommen werden. Herr Jacobi schreibt: „Ich habe mich schon bei einer früheren Gelegenheit darüber geäussert, wie interessant und wichtig es wäre, wenn die Physiker bei ihren galvanischen Untersuchungen ihre Strommessungen nach elektrolytischem, also absolutem Maasse angäben. Es wäre dazu nur nöthig, die Boussolen, mit denen man arbeitet, auf elektrolytische Aktionen zu beziehen, um durch Publicirung der angestellten Versuche Auskunft über den Grad der Genauigkeit zu geben, den das gewählte Instrument oder die gewählte Methode gewährt. Indessen behalte ich, dieses näher zu erörtern, einer anderen Gelegenheit vor. Nicht minder wichtig, als die Absolutheit der Strommessungen, ist es, wenn die Physiker das Maass der Leitungswiderstände, die sie messen, durch eine gemeinschaftliche Einheit ausdrücken. Hier aber kann keine absolute Bestimmung Statt finden, weil es scheint, dass bei den Widerständen auch der chemisch

reinsten Metalle Unterschiede Statt finden, welche durch eine Verschiedenheit der Dimensionen allein nicht erklärt werden können. Gesetzt also, Sie hätten Ihre Widerstandsmesser und Multiplikatoren auf Kupferdraht von 1 Meter Länge und 1 Millimeter Dicke bezogen, so hätten wir immer noch nicht die Ueberzeugung, ob Ihr Kupferdraht und der unsrige einen gleichen Widerstandscoefficienten besitzen. Alle diese Schwierigkeiten nun werden gehoben, wenn man einen beliebig gewählten Kupfer- oder anderen Draht bei den Physikern umherwandern lässt und diese bittet, ihre Widerstandsmessinstrumente darauf zu beziehen und ihre Messungen künftig nur nach diesem Maasse anzugeben. Herr Professor MAGNUS wird Ihnen also ein kleines schwarzes, mit zwei Schrauben versehenes Kistchen überreichen, in welchem ein auf einem Brete aufgewundener Kupferdraht durch einen aus Wachs und Harz bestehenden Mastix eingekittet und vor Nässe und Feuchtigkeit geschützt ist. Diesen Widerstands-Etalon bitte ich mit Ihren Widerstandsmessern zu vergleichen, zu einem solchen Vergleiche aber auch Herrn Professor WEBER und andere Physiker, die sich mit galvanometrischen Messungen beschäftigen, aufzufordern. Der Kupferdraht, der in diesem Kästchen befindlich ist, ist zwischen den Schrauben genau 25′ russisch-englisch lang, wiegt 22,5495 g und seine Dicke beträgt nach den mit einem guten Münchener, mit Mikrometer versehenen Mikroskope gemachten Messungen an einem Ende 0,0265″ englisch und am anderen 0,0260″, im Mittel also 0,02625″ englisch. Diese Messungen selbst sind das Mittel aus 3 sehr nahe übereinstimmenden Beobachtungen. Bemerken will ich noch, dass die gewogene Drahtlänge $25\frac{1}{2}'$ betrug (also $25\frac{1}{2}' = 22{,}5495$ g), und dass $\frac{3}{4}''$ auf jeder Seite an den Schrauben angelöthet sind. In französischem Maasse ausgedrückt, würde die Länge des Drahtes $25' = 7{,}61975$ m und seine Dicke $0{,}02625'' = 0{,}000667$ m sein."

Was endlich *drittens* die Vergleichung des Widerstands zweier Leiter oder die Bestimmung ihres Widerstandsverhältnisses betrifft, zum Beispiel die Vergleichung einer Kopie mit dem gegebenen Grundmaasse, so sind dazu zwei Instrumente nebst mehreren Leitern erforderlich, nämlich 1) ein *Elektromotor*, mit welchem galvanische Ströme erregt werden, 2) ein *Galvanometer*, mit welchem die Intensität der erregten Ströme gemessen wird. In dem ersten Instrumente bildet derjenige Leiter, in welchem der Strom erregt wird, in dem zweiten Instrumente derjenige Leiter, durch welchen der Strom gehen muss, um gemessen zu werden, einen wesentlichen Bestandtheil. Fügt man zu diesen beiden in den beiden Instrumenten schon enthaltenen Leitern noch diejenigen hinzu, deren Widerstandsverhältniss bestimmt werden soll, so hat man eine vollständige Uebersicht aller zu einer Widerstandsvergleichung noth-

wendigen Hülfsmittel. Nach dieser Uebersicht sollen nun 1) der bei den folgenden Versuchen gebrauchte *Elektromotor*, 2) das *Galvanometer*, 3) die *Leiter* und *deren* Kombinationen besonders betrachtet werden.

2.
Der Elektromotor.

Bei der Wahl des Elektromotors kommt es hauptsächlich auf die Entscheidung darüber an, ob man sich *fortdauernder* oder *momentaner* Ströme bedienen will. Im *ersteren* Falle leuchten die Vorzüge der sogenannten *konstanten* Säulen, wie sie von Daniell, Grove und Bunsen angegeben worden sind, zum Zweck solcher Messungen von selbst ein. Im *zweiten* Falle dagegen bedient man sich zur Stromerregung mit weit grösserem Vortheile der *Induktion beharrlicher Magnete*, weil es bei der Anwendung momentaner Ströme weder auf die Intensität dieser Ströme, noch auf die Dauer derselben allein, sondern auf den Werth des Produkts beider ankommt, welches man den *Integralwerth der Stromintensität* nennen kann. Dieser Integralwerth kann aber nur auf dem Wege der Induktion durch beharrliche Magnete in immer gleicher Grösse dargestellt werden.

Bei den folgenden Versuchen ist den momentanen Strömen und folglich der magnetischen Induktion der Vorzug gegeben worden aus folgenden zwei Gründen. *Erstens* gewährt bei feinen Messungen die Anwendung metallischer Leiter, z. B. die Anwendung von lauter Kupferdrähten, ohne dass ein feuchter Leiter, wie Wasser, Säure oder eine Salzlösung, in die Kette eingeschaltet zu werden braucht, eine weit grössere Sicherheit. Es ist bekannt, dass die Polarisationserscheinungen an den in einen feuchten Leiter eingetauchten metallischen Oberflächen die Messungen stören. Solche Störungen vermeidet man durch Anwendung geschlossener Drahtketten, in denen man Ströme inducirt, indem man sie gegen beharrliche Magnete bewegt. Jede Wiederholung einer solchen Bewegung bringt einen Strom von dem nämlichen Integralwerthe hervor, so kurz auch die Dauer desselben sei. *Zweitens* würde bei Anwendung fortdauernder Ströme, wie sie mit konstanten Säulen erhalten werden, die Temperatur der Leiter, deren Widerstandsverhältniss bestimmt werden soll, steigen und dieses Steigen in den verschiedenen Leitern verschieden sein. Mit der Temperatur wächst aber der Widerstand der Leiter und diese Veränderlichkeit des Widerstands würde die Bestimmung des Widerstandsverhältnisses unsicher machen, was durch die Anwendung momentaner Ströme, welche von so kurzer Dauer sind, dass gar keine merkliche Temperaturänderung eintreten kann, vermieden wird.

Die zweckmässige Einrichtung und der Gebrauch *magnetischer Induktoren* zu Messungen im Allgemeinen ist bei einer anderen Gelegenheit schon erörtert worden. Siehe darüber „*Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins im Jahre 1838*", S. 86.[1]) Die besondere Einrichtung, welche dem bei den folgenden Versuchen gebrauchten Induktor gegeben worden war, findet man am Ende dieser Abhandlung in Beilage *A* genauer beschrieben und daselbst in Fig. 1 abgebildet.

3.
Das Galvanometer.

Zur Messung der Intensität eines *fortdauernden* Stroms kann man sich sowohl der sogenannten Sinusboussole als auch der Tangentenboussole bedienen; um aber die Intensität eines inducirten *momentanen* Stroms, d. h. die Stärke eines sogenannten Induktionsstosses, zu messen, kann man sich nur der Tangentenboussole bedienen, weil der Gebrauch der Sinusboussole ein Beharren der Nadel in ihrer abgelenkten Lage voraussetzt, was bei einem Induktionsstosse nicht der Fall ist; denn die Nadel wird durch einen Induktionsstoss, welchen sie in ihrer Ruhelage erhält, blos in Schwingung gesetzt und erhält dadurch keine bleibende Ablenkung. Am genauesten und bequemsten lassen sich die Elongationen der durch Induktionsstösse erregten Nadelschwingungen an einem mit Multiplikator versehenen *Magnetometer* beobachten, wozu Gauss die Anleitung in den „*Resultaten aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins im Jahre 1837*" gegeben hat. Nur ist zu beachten, dass zu den vorliegenden Messungen ein grosser Multiplikator mit *grossem Leitungswiderstande*, womit gewöhnlich die grösseren Magnetometer versehen sind, von Nachtheil sein würde. Zu den folgenden Versuchen wurde daher ein Magnetometer von sehr kleinen Dimensionen, dessen Nadel nur 100 Millimeter lang war, gebraucht, welches mit einem kleinen Multiplikator von mässigem Widerstande versehen war.

Die Ausführung der Beobachtungen, zumal wenn sie oft und schnell hinter einander wiederholt werden sollen, wird sehr erleichtert, wenn das Magnetometer ausser mit dem Multiplikator auch mit einem starken Dämpfer versehen wird, welcher die in Schwingung versetzte Nadel nach einer kleinen Zahl von Schwingungen zur Ruhe zurückführt. Da die Wirksamkeit dieses Dämpfers hauptsächlich auf der magnetischen Kraft der schwingenden Nadel beruht, so muss man dazu das Magnetometer mit einer sehr stark magnetisirten Nadel versehen. Zugleich ist es aber nöthig, dass die Schwingungsdauer der Nadel nicht unter

[1]) [Wilhelm Weber's Werke, Bd. II, p. 105.]

10 bis 12 Sekunden betrage, wenn die Beobachtungen mit Genauigkeit ausgeführt werden sollen. Diesen Zweck kann man auch bei einer starken Magnetisirung der Nadel dadurch erreichen, dass man der Nadel eine verhältnissmässig zu ihrer geringen Länge grosse Dicke giebt, z. B. von 15 Millimeter bei 100 Millimeter Länge. Die genauere Beschreibung des hier gebrauchten Galvanometers findet man am Ende der Abhandlung in Beilage *B*, wo auch in Fig. 2, 3, 4 eine Abbildung gegeben ist.

4.

Kombinationen der vier Leiter.

Die vier Leiter sind der *Induktordraht*, der *Multiplikatordraht*, der Draht des *Original-Widerstandsmaasses* und der Draht der *Kopie*. Von diesen vier Leitern sind die beiden ersten zu allen Versuchen nothwendig und bilden die Kette entweder allein oder zusammen mit dem einen oder mit den beiden anderen Drähten, wobei folgende *Kombinationen* Statt finden können.

1. Die Enden des Induktor- und Multiplikatordrahts werden unmittelbar mit einander verbunden, und diese beiden Drähte bilden allein die Kette.

2. Die vorige Kette wird an einer Stelle gelöst und daselbst der Draht des Original-Widerstandsmaasses eingeschaltet.

3. Statt des Drahtes des Original-Widerstandsmaasses wird der Draht der Kopie eingeschaltet.

4. Der Draht des Original-Widerstandsmaasses und der Kopie werden *an einander* gesetzt und in die Kette hinter einander eingeschaltet.

5. Der Draht des Original-Widerstandsmaasses und der Kopie werden *neben einander* gesetzt und, am Anfang und am Ende mit einander verbunden, in die Kette eingeschaltet.

6. Die Enden des Induktor- und Multiplikatordrahts werden mit einander unmittelbar verbunden, bilden aber nicht wie unter (1) die Kette allein, sondern zwischen ihre beiden Verbindungsstellen wird der Draht des Orignal-Widerstandsmaasses eingeschaltet, so dass der vom Induktordrahte zugeleitete Strom zwischen diesem letzteren und dem Multiplikatordrahte getheilt wird.

7. Statt des Drahts des Original-Widerstandsmaasses wird der Draht der Kopie zwischen den beiden Verbindungsstellen des Induktors und Multiplikators eingeschaltet.

8. Der Draht des Original-Widerstandsmaasses und der Kopie werden *an einander* gesetzt und zwischen den beiden Verbindungsstellen des Induktors und Multiplikators eingeschaltet.

9. Der Draht des Original-Widerstandsmaasses und der Kopie

werden *neben einander* gesetzt und, am Anfang und am Ende mit einander verbunden, zwischen den beiden Verbindungsstellen des Induktors und Multiplikators eingeschaltet.

Von diesen 9 verschiedenen Kombinationen sind nur die 4 letzten bei den folgenden Versuchen benutzt worden, weil bei den 5 ersten die Wirkung zu stark war, um die Elongation der Nadel mit derselben Skale zu messen. Die Berechnung der Beobachtungen wird jedoch nachher zeigen, dass schon 3 von jenen Kombinationen zur Bestimmung des Widerstandsverhältnisses des Originals und der Kopie genügen und die vierte blos zur Kontrole der Genauigkeit der Messung dient.

5.

Beobachtungsmethoden.

Die Anwendung der beschriebenen Instrumente zu den Beobachtungen lässt sich nach verschiedenen Methoden machen, die sich theils durch ihre Genauigkeit, theils durch ihre Bequemlichkeit, theils durch die Regeln, nach welchen die Beobachtungen zu berechnen sind, von einander unterscheiden. Statt der einfachen Beobachtung der Elongation der Nadel, nachdem sie von der Ruhe ab durch einen Induktionsstoss in Bewegung gebracht worden ist, lässt sich mit grossem Vortheil ein System von Elongationsbeobachtungen ausführen, während der Nadel in vorgeschriebenen Augenblicken wiederholte Induktionsstösse ertheilt werden. Für diese Wiederholungen lässt sich allgemein die Regel aufstellen, dass alle Induktionsstösse nur in solchen Augenblicken Statt finden dürfen, wo die schwingende Nadel die Lage passirt, in welcher sie ruhend beharren würde. Es ist dies nämlich die nothwendige Bedingung, wenn die Berechnung der Beobachtungen auf einfache Regeln gebracht werden soll.

Zum Zwecke aller feineren galvanischen Messungen, sowohl in Beziehung auf fortdauernde, als auch auf momentane Ströme, ist es von Wichtigkeit, von den verschiedenen Methoden der Anordnung der Beobachtungen und Versuche und von deren Berechnung eine klare Uebersicht zu erhalten und insbesondere, wenn das Galvanometer wie in unserem Falle mit einem Dämpfer versehen ist, die Regeln kennen zu lernen, nach denen die Beobachtungen berechnet werden müssen, wenn der Einfluss der Dämpfung berücksichtigt werden soll. Um jedoch hier nicht bei einer Zusammenstellung der verschiedenen Beobachtungsmethoden und der ihnen entsprechenden Berechnungsarten zu verweilen, soll dieselbe am Ende der Abhandlung in der Beilage *C* gegeben werden, wo insbesondere der Unterschied der hier gebrauchten *Multiplikationsmethode* und *Zurückwerfungsmethode* näher erörtert werden

wird, die beide zulässig sind, wenn momentane Ströme angewendet werden. Die ersten hier anzuführenden Beobachtungsreihen sind nach der Multiplikationsmethode ausgeführt worden.

6.

Beobachtungen.

Die Nadel im Galvanometer war Anfangs in Ruhe und ihr Stand wurde an der Skale beobachtet. Der *erste* positive Induktionsstoss ertheilte darauf der Nadel eine positive Geschwindigkeit, und es wurde die grösste Elongation oder der höchste Stand an der Skale beobachtet, welchen die Nadel hierauf erreichte. Der *zweite* negative Induktionsstoss wurde in dem Augenblicke gegeben, wo die zurückschwingende Nadel den Ruhestand passirte, und es wurde der niedrigste Stand an der Skale beobachtet, welchen die Nadel hierauf erreichte. Der *dritte* wieder positive Induktionsstoss wurde in dem Augenblicke gegeben, wo die wieder vorwärts schwingende Nadel den Ruhestand passirte, und es wurde nun wieder der höchste Stand an der Skale beobachtet, welchen die Nadel hierauf erreichte. Auf diese Weise wurden die Beobachtungen in der Regel bis zum 12. Induktionsstosse fortgesetzt und zuletzt, als die Nadel wieder zur Ruhe gekommen, ihr Stand an der Skale nochmals bemerkt. Dergleichen Beobachtungsreihen wurden nun bei den verschiedenen Kombinationen der Drähte mehrmals hinter einander gemacht. Diese verschiedenen Reihen sollen nun mit *A, B, C, D* bezeichnet werden, so dass *A* sich auf die 6., *B* auf die 7., *C* auf die 9. und *D* auf die 8. der oben angeführten Kombinationen der Leiter bezieht. Folgende Tafel giebt die Uebersicht der nach diesen Reihen geordneten Beobachtungen.

	D	*C*	*B*	*A*	*B*	*A*	*B*	*C*	*D*
Stand	494,8	492,9	493,2	493,7	493,7	493,0	494,3	494,1	494,3
1.	821,8	587,8	672,7	676,3	673,2	675,3	673,1	588,8	821,2
2.	88,3	376,1	271,8	268,8	272,2	268,1	273,1	377,8	88,1
3.	918,0	614,6	723,3	726,7	724,1	726,6	724,4	614,7	916,2
4.	64,5	370,5	260,4	257,0	260,9	257,5	261,9	372,7	64,5
5.	922,9	616,3	725,7	731,1	726,7	729,5	726,7	616,9	923,2
6.	64,0	369,8	259,5	256,1	259,9	257,5	261,7	371,9	62,9
7.	923,3	616,4	726,0	730,7	726,3	730,2	727,2	617,2	922,7
8.	63,4	369,8	259,6	256,2	259,9	257,3	261,6	371,6	62,6
9.	922,5	616,6	726,2	730,8	726,5	730,5	727,2	617,8	923,7
10.	62,9	370,2	259,2	255,7	260,0	257,5	261,9	371,5	61,7
11.	922,9	616,5	724,2	731,1	725,9	730,9	726,9	617,7	923,3
12.	61,9	370,2	262,7	255,7	260,3	257,2	261,7	371,6	62,9
Stand	492,7	493,2	493,6	493,7	492,9	494,2	494,1	494,3	493,7

Die Beobachtungen sind in dieser Tafel nach der Reihenfolge geordnet, wie sie unmittelbar nach einander in einem Zeitraume gemacht worden sind, welcher keine ganze Stunde betrug. Die Wiederholungen der nämlichen Beobachtungsreihen sind so symmetrisch gestellt, dass die kleineren, von der Zeit abhängigen Einflüsse (z. B. der Einfluss der Variation der erdmagnetischen Direktionskraft) durch Kombination derselben fast ganz eliminirt werden können.

Aus obiger Tafel der unmittelbaren Ablesungen ergiebt sich die folgende Tafel, wenn man 1) von jeder an der Skale abgelesenen Zahl den Mittelwerth des zu Anfang und am Ende der Reihe beobachteten Ruhestands abzieht; 2) von allen korrespondirenden Beobachtungen der mit *A*, oder der mit *B*, oder der mit *C*, oder der mit *D* bezeichneten Reihen den Mittelwerth sucht, und 3) diese Mittelwerthe der an der Skale beobachteten Ablenkungen, welche nach der Theorie des Magnetometers den Tangenten der doppelten Ablenkungswinkel proportional sind, so reducirt, dass sie den Ablenkungswinkeln selbst proportional werden. Dabei ist zu bemerken, dass der horizontale Abstand des Spiegels von der Skale 2150 Skalentheile betrug, wonach, wenn x den beobachteten Werth bezeichnet, der reducirte Werth erhalten wird, wenn man den beobachteten um $x^3/13\,867\,500$ verkleinert.

No.	*D*	*C*	*B*	*A*
1.	+ 325,05	+ 94,64	+ 178,96	+ 181,72
2.	— 400,87	— 116,53	— 220,49	— 224,38
3.	+ 417,74	+ 120,92	+ 229,42	+ 232,09
4.	— 423,70	— 121,87	— 231,67	— 235,45
5.	+ 423,45	+ 122,87	+ 231,82	+ 235,69
6.	— 424,22	— 122,62	— 232,36	— 235,89
7.	+ 423,40	+ 123,07	+ 231,96	+ 235,84
8.	— 425,13	— 122,77	— 232,36	— 235,94
9.	+ 423,50	+ 122,47	+ 232,09	+ 236,04
10.	— 425,81	— 122,62	— 232,36	— 236,09
11.	+ 423,50	+ 123,37	+ 231,13	+ 236,39
12.	— 425,72	— 122,57	— 231,17	— 236,24

Man sieht in dieser Tafel, dass die beobachteten Elongationen der Magnetnadel im Galvanometer zwar Anfangs schnell wachsen, sich aber bald einem Grenzwerthe nähern, in Folge des mit der Schwingungsweite der Nadel wachsenden Einflusses des *Dämpfers*, mit welchem das Galvanometer versehen war. Um alle einzelnen Beobachtungen auf diesen Grenzwerth zu reduciren, musste das logarithmische Dekrement der Abnahme der Schwingungsbögen bestimmt werden, wozu besondere Versuche unmittelbar vor und nach obiger Beobachtungsreihe gemacht

worden waren. Das logarithmische Dekrement hatte sich aus diesen Versuchen im Mittel ergeben

$$= 0{,}633\,95,$$

oder es verhalten sich zwei auf einander folgende Elongationen der Nadel wie

$$1 : 0{,}2323.$$

Da die Abweichungen von diesem Mittelwerthe für die einzelnen Reihen nicht gross sind, so genügt es, diesen Mittelwerth statt der wahren Werthe hier in Rechnung zu bringen. Hiernach wird nun die erste Beobachtung auf den Grenzwerth reducirt, indem man sie nach dem Verhältnisse von

$$0{,}7677 : 1,$$

und die n^{te} Beobachtung, indem man sie nach dem Verhältnisse von

$$(1 - 0{,}2323^n) : 1$$

vergrössert. Folgende Tafel giebt die Uebersicht dieser reducirten Werthe und die für *A, B, C, D* daraus gezogenen Mittel.

	D	*C*	*B*	*A*
1.	+ 423,41	+ 123,28	+ 233,11	+ 236,71
2.	— 423,73	— 123,18	— 233,07	— 237,18
3.	+ 423,05	+ 122,46	+ 232,33	+ 235,04
4.	— 424,93	— 122,22	— 232,34	— 236,13
5.	+ 423,73	+ 122,95	+ 231,98	+ 235,85
6.	— 424,29	— 122,64	— 232,40	— 235,93
7.	+ 423,42	+ 123,07	+ 231,97	+ 235,85
8.	— 425,13	— 122,77	— 232,36	— 235,94
9.	+ 423,50	+ 122,47	+ 232,09	+ 236,04
10.	— 425,81	— 122,62	— 232,36	— 236,09
11.	+ 424,50	+ 123,37	+ 231,13	+ 236,39
12.	— 425,72	— 122,57	— 231,17	— 236,24
Mittel	± 424,19	± 122,80	± 232,19	± 236,13

Dieselbe Versuchsreihe ist auf gleiche Weise 3 Mal, an 3 auf einander folgenden Tagen, gemacht worden, und die folgende Tafel giebt die Uebersicht der aus allen 3 Versuchsreihen gefundenen Werthe von *A, B, C, D*.

	D	*C*	*B*	*A*
I.	424,19	122,80	232,19	236,13
II.	424,80	123,27	232,25	235,93
III.	423,00	122,59	231,38	235,53
Mittel	424,00	122,89	231,94	235,86

7.

Berechnung der Beobachtungen.

Durch die eben beschriebenen Beobachtungen sind die 4 mit A, B, C, D bezeichneten Werthe genau bestimmt worden, und es fragt sich nun ferner, wie aus diesen 4 Werthen das gesuchte Widerstandsverhältniss des Original-Widerstandsmaasses a zu der Kopie b abgeleitet werden könne? Der Einfachheit wegen werde zunächst angenommen, dass der von der Kette selbst herrührende Theil der Dämpfung gegen den von der Kette unabhängigen Theil so klein sei, dass der vernachlässigt werden, folglich die *Dämpfung für alle Beobachtungen* A, B, C, D *gleich* angenommen werden dürfe. Für diesen Fall überzeugt man sich leicht, dass die reducirte Elongationsbeobachtung der *Geschwindigkeit* proportional ist, welche der Nadel des Galvanometers in dem Augenblicke, wo sie den Ruhestand passirt, durch den von einem Induktionsstosse herrührenden Strom im Multiplikator des Galvanometers ertheilt wird, und dass jene Geschwindigkeit selbst dem *Integralwerthe* dieses Stroms proportional ist. Hiernach können die beobachteten Elongationen als Maasse dieser Ströme benutzt werden.

Der durch den *Multiplikator* des Galvanometers gehende und *gemessene* Strom war aber bei obigen Versuchen nicht der ganze Strom, welcher durch einen Induktionsstoss im *Induktor* hervorgebracht wurde, sondern nur ein Bruchtheil desselben, welcher *nach dem Gesetze der Stromtheilung* ausgedrückt wird durch das Verhältniss des Widerstands des eingeschalteten Drahts zur Summe der Widerstände des eingeschalteten Drahts und des Multiplikatordrahts. Bezeichnet m den Widerstand des *Multiplikatordrahts*, a den Widerstand des *Grundmaasses* und b den Widerstand der *Kopie*, so ist der Widerstand der eingeschalteten Drähte

für die Beobachtung $A = a$,

„ „ „ $B = b$,

„ „ „ $C = \frac{ab}{a+b}$,

„ „ „ $D = a + b$,

und folglich die entsprechenden Bruchtheile

für $A = \frac{a}{a+m}$,

„ $B = \frac{b}{b+m}$,

„ $C = \frac{ab}{ab+am+bm}$,

„ $D = \frac{a+b}{a+b+m}$.

Der *ganze* Strom wird aber, nach dem Ohm'schen Gesetze, durch einen Bruch dargestellt, dessen Zähler K für alle Versuche gleich ist und von der einem Induktionsstosse entsprechenden elektromotorischen Kraft abhängt, während der Nenner durch den Widerstand der Kette, durch welche der Strom geht, gegeben ist. Bezeichnet man den Widerstand des *Induktordrahts* mit r, so ergiebt sich der Widerstand der ganzen Kette

$$\text{für die Beobachtung } A = r + \frac{am}{a+m},$$

$$\text{„ „ „ } B = r + \frac{bm}{b+m},$$

$$\text{„ „ „ } C = r + \frac{abm}{ab+am+bm},$$

$$\text{„ „ „ } D = r + \frac{(a+b)m}{a+b+m}.$$

Man erhält hiernach folgende Gleichungen für die mit dem Galvanometer beobachteten Stromintensitäten, welche mit A, B, C, D bezeichnet werden sollen:

$$A = \frac{a}{a+m} \cdot \frac{K}{r + \frac{am}{a+m}} = \frac{aK}{am+ar+mr},$$

$$B = \frac{b}{b+m} \cdot \frac{K}{r + \frac{bm}{b+m}} = \frac{bK}{bm+br+mr},$$

$$C = \frac{ab}{ab+am+bm} \cdot \frac{K}{r + \frac{abm}{ab+am+bm}} = \frac{abK}{ab(m+r)+(a+b)mr}$$

$$D = \frac{a+b}{a+b+m} \cdot \frac{K}{r + \frac{(a+b)m}{a+b+m}} = \frac{(a+b)K}{(a+b)(m+r)+mr}.$$

Setzt man hierin Kürze halber

$$\frac{1}{mr} \cdot K = \alpha, \qquad \frac{1}{m} + \frac{1}{r} = \beta,$$

so ergiebt sich:

$$A\left(\beta + \frac{1}{a}\right) = B\left(\beta + \frac{1}{b}\right) = C\left(\beta + \frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = D\left(\beta + \frac{1}{a+b}\right) = \alpha,$$

und hieraus:

$$\frac{\frac{1}{b}B - \frac{1}{a}A}{A-B} = \frac{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)C - \frac{1}{a}A}{A-C} = \frac{\frac{1}{a+b}D - \frac{1}{a}A}{A-D} = \beta,$$

woraus zur Bestimmung des gesuchten Widerstandsverhältnisses der Kopie zum Grundmaasse $b : a$ folgende zwei Gleichungen erhalten werden:

$$(a - b)\, AB - aAC + bBC = 0,$$
$$(a^2 - b^2)\, AB + b^2 AD - a^2 BD = 0,$$

oder:

$$\frac{b}{a} = \frac{AB - AC}{AB - BC},$$
$$\frac{b^2}{a^2} = \frac{AB - BD}{AB - AD}.$$

Zwischen den vier Beobachtungen A, B, C, D findet also, den Ohm'schen Gesetzen gemäss, folgende Relation Statt:

$$\frac{A^3}{B^3} = \left(\frac{A - C}{B - C}\right)^2 \cdot \frac{A - D}{B - D},$$

welche sich ergiebt, wenn man a und b aus den vorhergehenden Gleichungen eliminirt.

Nach der gegebenen Entwickelung gelten die hier aufgestellten Formeln zunächst nur für diejenigen Fälle, wo die Beobachtungen A, B, C, D die inducirten und durch den Multiplikator gehenden Ströme nach gleichem Maasse ausgedrückt geben, d. i. wo die Dämpfung der Galvanometernadel für die verschiedenen Beobachtungen nicht merklich verschieden ist. Diese Formeln bedürfen aber noch einer besonderen Prüfung, um sie auch auf die übrigen Fälle anzuwenden, in welchen *die Dämpfung variirt,* weil dann nämlich die beobachteten Elongationen A, B, C, D, wie man leicht einsieht, zwar ebenfalls der Stromstärke proportional, ausserdem aber der Stärke der Dämpfung umgekehrt proportional sind.

Die Dämpfung besteht nun aus einem für alle Beobachtungen *konstanten* Theile, welcher von dem unveränderlichen ringförmigen Dämpfer, mit welchem das Galvanometer versehen ist, herrührt und $= 1$ gesetzt werden möge, und aus einem *variablen,* von der Schliessung des Multiplikators abhängigen Theile, welcher dem Widerstande der vom Multiplikator ausgehenden und zu ihm zurückkehrenden Kette umgekehrt proportional ist. Der Widerstand dieser Kette ist aber:

$$\text{für } A = m + \frac{ar}{a + r},$$
$$\text{„ } B = m + \frac{br}{b + r},$$
$$\text{„ } C = m + \frac{abr}{ab + ar + br},$$
$$\text{„ } D = m + \frac{(a + b)r}{a + b + r};$$

es kann folglich der variable Theil der Dämpfung dargestellt werden, wenn man $1/m + 1/r = \beta$ setzt und γ einen konstanten Faktor bezeichnet,

$$\text{für } A \text{ durch } \gamma \cdot \frac{\frac{1}{r} + \frac{1}{a}}{\beta + \frac{1}{a}},$$

$$\text{„ } B \text{ „ } \gamma \cdot \frac{\frac{1}{r} + \frac{1}{b}}{\beta + \frac{1}{b}},$$

$$\text{„ } C \text{ „ } \gamma \cdot \frac{\frac{1}{r} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{\beta + \frac{1}{a} + \frac{1}{b}},$$

$$\text{„ } D \text{ „ } \gamma \cdot \frac{\frac{1}{r} + \frac{1}{a+b}}{\beta + \frac{1}{a+b}}.$$

Für die Fälle nun, wo dieser variable Theil der Dämpfung gegen den konstanten $= 1$ nicht vernachlässigt werden darf, müssen in den oben entwickelten Formeln statt A, B, C, D ihre Produkte in die zugehörigen Werthe der Dämpfung gesetzt werden, d. h.

$$\text{statt } A \text{ ist zu setzen } A \left[1 + \gamma \cdot \frac{\frac{1}{r} + \frac{1}{a}}{\beta + \frac{1}{a}}\right],$$

$$\text{„ } B \text{ „ „ „ } B \left[1 + \gamma \cdot \frac{\frac{1}{r} + \frac{1}{b}}{\beta + \frac{1}{b}}\right],$$

$$\text{„ } C \text{ „ „ „ } C \left[1 + \gamma \cdot \frac{\frac{1}{r} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{\beta + \frac{1}{a} + \frac{1}{b}}\right],$$

$$\text{„ } D \text{ „ „ „ } D \left[1 + \gamma \cdot \frac{\frac{1}{r} + \frac{1}{a+b}}{\beta + \frac{1}{a+b}}\right].$$

Durch diese Substitution erhält man aber:

$$A\left[\beta+\frac{1}{a}+\gamma\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{a}\right)\right]=B\left[\beta+\frac{1}{b}+\gamma\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{b}\right)\right]=C\left[\beta+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\gamma\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\right]$$

$$=D\left[\beta+\frac{1}{a+b}+\gamma\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{a+b}\right)\right]=\alpha$$

und hieraus:

$$\frac{A\left(\beta+\frac{1}{a}\right)-B\left(\beta+\frac{1}{b}\right)}{B\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{b}\right)-A\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{a}\right)}=\frac{A\left(\beta+\frac{1}{a}\right)-C\left(\beta+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)}{C\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)-A\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{a}\right)}$$

$$=\frac{A\left(\beta+\frac{1}{a}\right)\quad-D\left(\beta+\frac{1}{a+b}\right)}{D\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{a+b}\right)-A\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{a}\right)}=\gamma,$$

woraus

$$AB\left(\beta-\frac{1}{r}\right)\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)+AC\left(\beta-\frac{1}{r}\right)\frac{1}{b}-BC\left(\beta-\frac{1}{r}\right)\frac{1}{a}=0,$$

$$AB\left(\beta-\frac{1}{r}\right)\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)+AD\left(\beta-\frac{1}{r}\right)\left(\frac{1}{a+b}-\frac{1}{a}\right)-BD\left(\beta-\frac{1}{r}\right)\left(\frac{1}{a+b}-\frac{1}{b}\right)=0$$

folgt, oder, indem der gemeinschaftliche Faktor $(\beta-1/r)$ herausfällt, die nämlichen Gleichungen wie früher erhalten werden, nämlich:

$$\frac{b}{a}=\frac{AB-AC}{AB-BC},$$

$$\frac{b^2}{a^2}=\frac{AB-BD}{AB-AD}.$$

Wendet man endlich die gefundenen Regeln auf die Werthe von A, B, C, D an, welche sich aus den oben beschriebenen Versuchen ergeben haben, nämlich:

$$A=235{,}86,$$
$$B=231{,}94,$$
$$C=122{,}89,$$
$$D=424{,}00,$$

so ergiebt sich zuvörderst:

$$\frac{A^3}{B^3}=1{,}051\,56,$$

$$\left(\frac{A-C}{B-C}\right)^2\cdot\frac{A-D}{B-D}=1{,}051\,28.$$

Die nahe Uebereinstimmung dieser beiden Werthe, welche nach obigen Regeln gleich sein sollten, kann als Bestätigung der Ohm'schen Gesetze dienen, aus denen jene Regeln abgeleitet sind.

Ferner ergiebt sich daraus das Widerstandsverhältniss der Kopie b zum Grundmaasse a, und zwar aus den beobachteten Werthen A, B, C:

$$\frac{b}{a} = \frac{AB - AC}{AB - BC} = 0{,}981\,616,$$

aus den beobachteten Werthen A, B, D:

$$\frac{b}{a} = \sqrt{\frac{AB - BD}{AB - AD}} = 0{,}981\,485;$$

im Mittel also ist der Widerstand der Kopie, in Theilen des Widerstands des gegebenen Grundmaasses ausgedrückt,

$$= 0{,}981\,55.$$

Auf die nämliche Weise, wie hier das Widerstandsverhältniss der Kopie zu dem Grundmaasse bestimmt worden ist, kann nun auch das Widerstandsverhältniss anderer Leiter zum Grundmaasse gefunden und dadurch können die Widerstände aller dieser Leiter nach dem gegebenen Grundmaasse gemessen werden.

Die Anordnung der Beobachtungen war in dem hier gegebenen Beispiele nach der Multiplikations-Methode getroffen worden. Es ist aber schon erwähnt worden, dass diese Anordnung noch auf eine andere Weise, nämlich nach der Zurückwerfungsmethode, gemacht werden kann, und es besitzt sogar diese letztere Anordnungsweise einige Vorzüge vor der ersteren. Es verdient daher diese zweite Methode näher erörtert zu werden, was in der Beilage C am Ende dieser Abhandlung geschehen soll, wo auch ein Messungsbeispiel nach dieser Methode beigefügt werden wird.

II.

Zurückführung der Widerstandsmessungen auf absolutes Maass.

8.

Nachdem im ersten Abschnitte gezeigt worden ist, wie der Widerstand eines Leiters mit der erforderlichen Schärfe nach einem gegebenen *Grundmaasse* bestimmt werden kann, soll nun im zweiten Abschnitte die Zurückführung dieser Messungen auf *absolutes Maass* gegeben werden.

Man könnte glauben, dass sich eine solche Zurückführung auf die einfachste Weise dadurch bewerkstelligen lasse, dass man auf die räumlichen Dimensionen (Länge und Querschnitt) der Leiter zurückgehe und sich dabei an dasjenige Metall halte, was zu den Leitern am geeignetsten ist und am häufigsten dazu gebraucht wird, an das Kupfer. In der That würde man auf diese Weise zu Widerstandsbestimmungen

der Leiter gelangen, welche dem Namen nach als absolute bezeichnet werden könnten, die aber in der That dem wahren Zwecke, die Zahl der willkürlich anzunehmenden Grundmaasse zu vermindern, nicht entsprechen würden. Es würde dadurch nur an die Stelle eines Grundmaasses für absoluten Widerstand ein Grundmaass für specifischen Widerstand (nämlich der des Kupfers) gesetzt werden. Für den angeführten Zweck ist es aber gleichgültig, ob man ein Maass des absoluten Widerstands zum Grunde legt und das Maass des specifischen Widerstands daraus ableitet, oder ob man umgekehrt ein Maass des specifischen Widerstands zum Grunde legt und daraus das Maass des absoluten Widerstands ableitet. Absolute Widerstandsmessungen sind daher nur dann von wesentlicher Bedeutung, wenn sie so ausgeführt werden, dass gar keine neuen, sondern nur vorhandene, zu anderen Zwecken schon gebrauchte und unentbehrliche Maasse, wie z. B. die die Raumes und der Zeit, zum Grunde liegen.

Hiernach kann nun leicht Dasjenige beurtheilt werden, was Jacobi in der oben angeführten Stelle S. 199 f. bei Gelegenheit seines Vorschlags in Betreff eines festen Widerstandsmaasses gesagt hat: es könne, um die Leitungswiderstände, welche die Physiker messen, durch eine gemeinschaftliche Einheit auszudrücken, keine absolute Bestimmung Statt finden, weil es scheine, dass bei den Widerständen auch der chemisch reinsten Metalle Unterschiede Statt fänden, welche durch eine Verschiedenheit der Dimensionen allein nicht erklärt werden könnten, und dass also, wenn der eine Physiker seine Widerstandsmesser und Multiplikatoren auf Kupferdraht von 1 Meter Länge und 1 Millimeter Dicke bezöge, die anderen Physiker immer noch nicht die Ueberzeugung hätten, ob sein Kupferdraht und der ihrige einen gleichen Widerstandscoefficienten (d. i. ob das Kupfer dieser Drähte gleichen specifischen Widerstand) besitze. Man sieht, dass Jacobi hier nur eine solche absolute Bestimmung im Auge hat, bei welcher das Maass des absoluten Widerstands aus einem für den specifischen Widerstand angenommenen Grundmaasse abgeleitet wird, die er mit Recht verwirft; die Frage aber, ob überhaupt ein neues Grundmaass nöthig sei, oder ob Widerstandsbestimmungen möglich seien, ohne irgend eines von jenen beiden Grundmaassen anzunehmen, hat Jacobi gar nicht berührt. Diese Frage ist es aber gerade, deren Beantwortung uns vorzugsweise beschäftigen wird. Wenn sich übrigens aus dieser Antwort ergeben wird, dass in der That zum Zweck der Widerstandsmessungen gar kein neues Grundmaass nöthig ist, so folgt doch daraus noch keineswegs, dass die Feststellung eines solchen Grundmaasses, wie Jacobi vorgeschlagen und wie es im ersten Theile dieser Abhandlung zur Anwendung gebracht worden ist, ganz überflüssig sei. Es wird vielmehr gezeigt werden, dass die

Annahme des JACOBI'schen Vorschlags auch dann noch aus praktischen Gründen höchst wünschenswerth bleibt, weil eine absolute Widerstandsbestimmung sich direkt nur in seltenen Fällen unter besonders günstigen Verhältnissen genau ausführen lässt, durch Annahme des JACOBI'schen Vorschlags aber eine Brücke gebaut wird, auf welcher man dazu gelangt, mit Hülfe einer einzigen wirklich ausgeführten absoluten Widerstandsbestimmung alle anderen Widerstandsmessungen auf absolutes Maass zurückzuführen. Dass nun eine absolute Widerstandsbestimmung auf ganz andere Weise möglich sei, als diejenige, von welcher JACOBI spricht, ganz unabhängig von dem specifischen Widerstande oder von dem Widerstandscoefficienten irgend eines Körpers, wie des Kupfers, nämlich durch eine eigenthümliche Kombination magnetoelektrischer und elektromagnetischer Beobachtungen, ist schon von GAUSS ausgesprochen worden, bald nachdem FARADAY's Entdeckung der Magnetoelektricität bekannt geworden war.

Das Wesentliche dieser Methode lässt sich auf folgende Weise kurz in Worten ausdrücken: Betrachtet man die Intensität irgend eines galvanischen Stroms, so leuchtet ein, dass dieselbe im Allgemeinen auf zwei wesentlich verschiedene Arten bestimmt werden kann: *erstens* aus den Ursachen, von welchen sie abhängt; *zweitens* aus den Wirkungen, welche sie hervorbringt. Die aus ihren Wirkungen definirte Stromintensität kann nun aber, wie sich leicht zeigen lässt, auf *absolutes Maass* zurückgeführt werden, und da einleuchtet, dass der Werth einer Stromintensität nach absolutem Maasse der nämliche sein müsse, es möge dieselbe aus ihren Wirkungen oder aus ihren Ursachen definirt werden, so ist das Resultat, welches auf dem letzten Wege erhalten werden muss, durch das auf dem ersten erhaltene schon im Voraus bekannt. Nun weiss man aber, dass die Stromintensität nur von zwei Ursachen abhängt, nämlich von der elektromotorischen Kraft und von dem Widerstande der Kette, und dass von diesen beiden die elektromotorische Kraft auf absolutes Maass zurückgeführt werden kann. So wie nun, wenn ausser der elektromotorischen Kraft auch der Widerstand nach absolutem Maasse gegeben wäre, der absolute Werth der Stromintensität sich unmittelbar daraus ergeben würde, eben so ergiebt sich umgekehrt, da ausser der elektromotorischen Kraft auch die Stromintensität nach absolutem Maasse gegeben ist, der Werth des Widerstands nach absolutem Maasse, und man sieht hieraus, dass Widerstandsmessungen ausgeführt werden können, ohne dass irgend ein neues willkürliches Grundmaass dazu gebraucht ist, was zu beweisen war.

Leuchtet nun auch hieraus im Allgemeinen die Möglichkeit eines absoluten Widerstandsmaasses in der angegebenen engeren Bedeutung des Wortes ein, so ist es doch noch nöthig, eine genaue Definition

dieses Maasses zu geben, wenn eine wirkliche Messung nach diesem Maasse ausgeführt werden soll. Eine solche Definition findet aber eine Schwierigkeit darin, dass sie andere absolute Maasse als bekannt voraussetzt, nämlich das absolute Maass für die elektromotorischen Kräfte und das absolute Maass für die (aus ihren Wirkungen bestimmten) Stromintensitäten. Es handelt sich demnach bei der Begründung eines absoluten Widerstandsmaasses im Grunde um die Feststellung eines vollständigen Systems absoluter Maasse für die ganze Elektrodynamik. Geht man noch weiter zurück, so findet man, dass auch diese letzteren Maasse wieder andere, ausser dem Kreise der Elektrodynamik, voraussetzen, und dass also die beabsichtigte Begründung des Widerstandsmaasses eine nähere Erörterung der absoluten Maasse mehrerer verschiedenen Grössenarten nöthig macht, welche der Ausführung unserer Messung vorausgeschickt werden muss.

9.

Ueber die absoluten Maasse mehrerer verschiedenen Grössenarten.

Es ist bekannt, dass es sehr zur Vereinfachung physikalischer Forschungen dient, wenn man für die verschiedenen Grössenarten nicht mehr eigene, von einander unabhängige Grundmaasse einführt, als unumgänglich nöthig sind, und wenn man alle anderen Maasse aus diesen wenigen nothwendigen Grundmaassen ableitet. Aus diesem Grunde werden in der Mechanik blos für *Linien*, *Zeiträume* und *Massen* Grundmaasse aufgestellt, und die Maasse aller anderen in der Mechanik betrachteten Grössenarten werden aus diesen wenigen Grundmaassen abgeleitet und heissen dann *absolute Maasse.* Zum Beispiel werden keine Grundmaasse für Geschwindigkeit und Dichtigkeit aufgestellt, sondern es werden absolute Maasse dafür gebraucht, welche auf jene drei Grundmaasse zurückgeführt werden können. Eben so werden die Maasse für die bewegenden und für die absoluten Kräfte, für die Drehungsmomente, Trägheitsmomente, Nutzeffekte u. s. w. nach bekannten Gesetzen auf jene drei Grundmaasse zurückgeführt. Aus demselben Grunde wird ferner auch für den Magnetismus kein eigenes unabhängiges Grundmaass eingeführt, sondern man hält sich an das absolute Maass, welches Gauss für den Magnetismus aus den drei Grundmaassen der Mechanik in der Abhandlung: *Intensitas vis magneticae terrestris ad mensuram absolutam revocata. Gottingae 1833,*[1]) abgeleitet hat.

Das Maass für den Stabmagnetismus ist nämlich hiernach der Magnetismus eines solchen Stabs, welcher, — wenn er aus grosser Ent-

[1]) [Carl Friedrich Gauss' Werke, Bd. V, p. 79.]

fernung R auf einen anderen gleich stark magnetischen Stab wirkt, dessen magnetische Axe derjenigen Geraden parallel ist, welche die Mittelpunkte der beiden Magnete verbindet, während seine eigene magnetische Axe dagegen senkrecht ist, — ein Drehungsmoment ausübt, welches sich zum absoluten Maasse des Drehungsmomentes wie $1 : R^3$ verhält.

Das Maass für die Stärke des Erdmagnetismus (für die Stärke der erdmagnetischen Kraft) an irgend einem Orte ist eben danach das nach absolutem Maasse ausgedrückte Drehungsmoment, welches der Erdmagnetismus auf einen an diesem Orte befindlichen Magnetstab ausübt, wenn letzterer das absolute Maass Magnetismus enthält und seine magnetische Axe mit der Richtung des Erdmagnetismus an diesem Orte einen rechten Winkel macht.

10.

Definitionen der absoluten Maasse in der Elektrodynamik.

Die absoluten Maasse der in der Elektrodynamik betrachteten Grössenarten lassen sich nun auf folgende Weise durch Zurückführung auf die magnetischen Maasse kurz und vollständig definiren.

1. *Das Maass für die Stromintensitäten.*

Das Maass für die Stromintensitäten ist die Intensität desjenigen Stroms, welcher, wenn er eine Ebene von der Grösse des Flächenmaasses umläuft, nach den elektromagnetischen Gesetzen die nämlichen Wirkungen in die Ferne ausübt, wie ein Magnetstab, welcher das vorher definirte Maass des Magnetismus enthält.

Diese Definition von dem Maasse für die Stromintensitäten ist dieselbe, welche in den „*Resultaten aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins im Jahre 1840*“ S. 86[1]) gegeben worden ist.

2. *Das Maass für die elektromotorischen Kräfte.*

Das Maass für die elektromotorischen Kräfte ist diejenige elektromotorische Kraft, welche von dem vorher definirten Maasse des Erdmagnetismus auf eine geschlossene Kette ausgeübt wird, wenn letztere so gedreht wird, dass die von ihrer Projektion auf eine gegen die Richtung des Erdmagnetismus senkrechte Ebene begrenzte Fläche während des Zeitmaasses um das Flächenmaass zunimmt oder abnimmt.

3. *Das Maass für den Widerstand.*

Das Maass für den Widerstand ist der Widerstand einer solchen geschlossenen Kette, in welcher durch das vorher definirte Maass der

[1]) [Wilhelm Weber's Werke, Bd. III, p. 9.]

elektromotorischen Kraft das vorher definirte Maass der Stromintensität hervorgebracht wird.

Bezeichnet man das oben definirte Maass für die Stromintensitäten mit I und irgend eine hiernach gemessene Stromintensität mit iI, worin i eine reine Zahl bezeichnet, und bezeichnet man ferner das oben definirte Maass für die elektromotorischen Kräfte mit E und irgend eine hiernach gemessene elektromotorische Kraft mit eE, worin e eine reine Zahl bezeichnet; so wird wW der Widerstand einer Kette sein, auf welche die elektromotorische Kraft eE wirkt und darin einen Strom von der Intensität iI hervorbringt, wenn W das oben definirte Widerstandsmaass bezeichnet und $w = e/i$ eine reine Zahl ist. Der Widerstand dieser Kette ist also dem Widerstandsmaasse gleich, wenn $e = i$ gefunden wird. Man ersieht hieraus, wie ein Leiter, welcher das vorher definirte Widerstandsmaass besitzt, wirklich dargestellt werden kann.

11.

Schema zur absoluten Widerstandsbestimmung eines Leiters.

Zur Erläuterung, wie die vorher definirten elektrodynamischen Maasse zur Ausführung der absoluten Widerstandsbestimmung eines Leiters in Anwendung gebracht werden können, diene das folgende Beispiel.

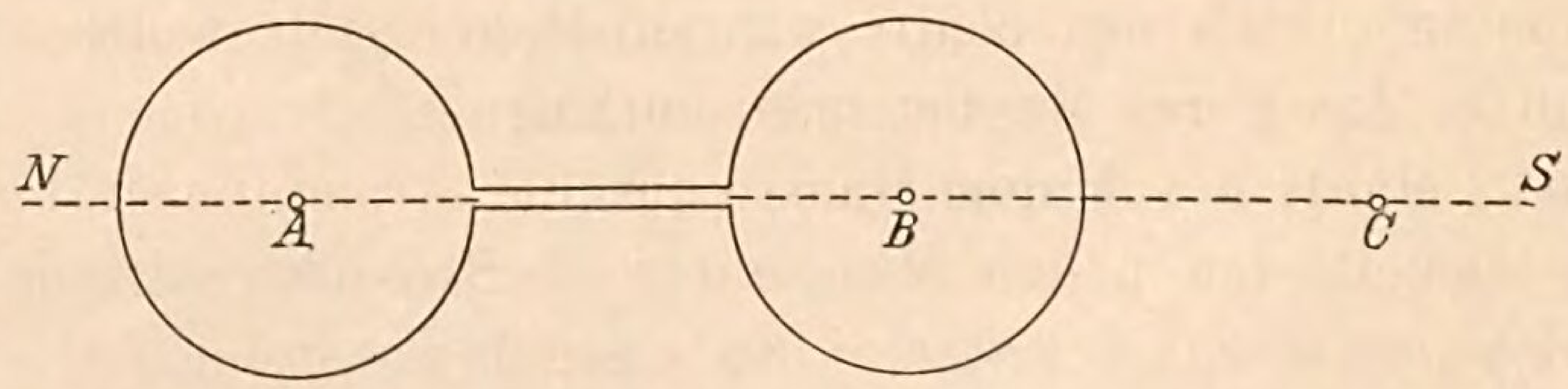


Fig. 1.

Die Gerade NS bezeichne die Richtung des Erdmagnetismus, dessen Stärke an den beiden Orten A und B nach dem vorher definirten Maasse $= T$ sei. Der Werth von T wird bekanntlich nach der von Gauss in der „*Intensitas vis magneticae terrestris ad mensuram absolutam revocata*“ gegebenen Anleitung aus magnetometrischen Beobachtungen gefunden. Nun bestehe eine geschlossene Kette aus zwei Kreisen, deren Mittelpunkte A und B seien; die Linie NS liege in der Ebene dieser Kreise. Es gehören aber zu dieser Kette noch ferner zwei neben einander liegende, von einander isolirte Drähte, welche eine doppelte Verbindung zwischen beiden Kreisen herstellen, und es sei endlich jeder Kreis zwischen den beiden Punkten, wo die beiden Drähte mit ihm verbunden sind, durchschnitten, so dass alle Theile zusammen, wie die Figur zeigt, eine in sich zurücklaufende Linie bilden; r bezeichne die

der Einfachheit wegen gleich angenommenen Halbmesser beider Kreise. Projicirt man den Kreis A nach der Richtung NS auf eine gegen NS senkrechte Ebene, so ist die von der Projektion begrenze Fläche $= 0$. Die Beugsamkeit der die beiden Kreise verbindenden Drähte möge aber gestatten, den Kreis A zu drehen und gegen NS senkrecht zu stellen, wo dann die von der nämlichen Projektion begrenzte Fläche $= \pi r^2$ wird. Diese Drehung geschehe in einer kurzen Zeit τ auf solche Weise, dass die von der Kreisprojektion begrenzte Fläche in dieser Zeit gleichförmig von 0 bis πr^2 wachse. Es ergiebt sich dann aus den *magnetoelektrischen* Gesetzen die elektromotorische Kraft eE, welche der Erdmagnetismus T auf den kreisförmigen Leiter A während der Zeit τ ausübt, welche durch das vorher definirte Maass E und durch die Zahl

$$e = \frac{\pi r^2}{\tau} \cdot T$$

bestimmt ist. Durch diese elektromotorische Kraft wird während der Zeit τ ein durch die ganze geschlossene Kette gehender Strom hervorgebracht, dessen Intensität mit iI bezeichnet werden soll. Dieser Strom geht auch durch den Kreis B und wirkt von diesem Kreise aus auf eine entfernte Magnetnadel in C, deren Drehungsaxe auf NS senkrecht sei und in der Ebene des Kreises B liege. Ist nun I das vorher definirte Maass für die Stromintensitäten, so ergiebt sich aus den *elektromagnetischen* Gesetzen, dass das von dem durch den Kreis B gehenden Strome auf die Nadel ausgeübte Drehungsmoment dem von einem Magnetstabe ausgeübten Drehungsmomente gleich ist, welcher im Mittelpunkte des Kreises B so aufgestellt würde, dass seine magnetische Axe auf der Kreisebene senkrecht wäre, wenn der nach dem vorher definirten Maasse gemessene Magnetismus M dieses Stabs

$$M = \pi r^2 i$$

ist. Wenn nun ferner der nach gleichem Maasse gemessene Magnetismus der Nadel $C = m$ und $BC = R$ ist, und φ den Winkel bezeichnet, welchen die magnetische Axe der Nadel C mit der Richtung NS des Erdmagnetismus macht, so wird das von dem Magnetstabe M auf die Nadel m ausgeübte Drehungsmoment nach bekannten magnetischen Gesetzen durch

$$\frac{Mm}{R^3} \cos\varphi = \frac{\pi r^2}{R^3} \cdot im \,.\, \cos\varphi$$

ausgedrückt. Hieraus ergiebt sich, wenn K das Trägheitsmoment der Nadel bezeichnet, die Acceleration der Drehung

$$= \frac{\pi r^2}{R^3} \cdot \frac{im}{K} \cdot \cos\varphi$$

und folglich, wenn die Nadel vorher in Ruhe und $\varphi = 0$ war, die Drehungsgeschwindigkeit $d\varphi/dt$ am Ende der kurzen Zeit τ,

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\pi r^2}{R^3} \cdot \frac{im}{K} \cdot \tau.$$

Aus dieser Geschwindigkeit findet man endlich die grösste Elongation a der dadurch in Schwingung gesetzten Nadel nach bekannten Schwingungsgesetzen durch Multiplikation mit der Schwingsdauer t und durch Division mit der Zahl π, nämlich:

$$a = \frac{r^2}{R^3} \cdot \frac{im}{K} \cdot \tau t.$$

Für die Schwingungsdauer t gilt bekanntlich die Gleichung

$$mT = \frac{\pi^2 K}{t^2},$$

woraus

$$\frac{mt}{K} = \frac{\pi^2}{tT}$$

und folglich

$$a = \frac{\pi^2 r^2}{R^3} \cdot \frac{i\tau}{tT},$$

oder

$$i = \frac{aR^3}{\pi^2 r^2} \cdot \frac{t}{\tau} \cdot T.$$

Man könnte nun ferner, indem man beachtet, dass der durch den Kreis B gehende Strom auch den Kreis A durchläuft, auch die Wirkung des Kreisstroms A auf die Nadel berechnen; indessen möge hier der Einfachheit wegen angenommen werden, dass die Entfernung AC so gross sei, dass diese Wirkung gegen die Wirkung des Kreisstroms B verschwinde; es wird dann die Beobachtung der wirklichen Elongationsweite der Nadel unmittelbar den Werth von a geben.

Dann ergiebt sich, dass von der oben angegebenen, nach dem vorher definirten Maasse bestimmten elektromotorischen Kraft eE, für welche

$$e = \frac{\pi r^2}{\tau} \cdot T$$

gefunden worden ist, in der ganzen Kette ein Strom hervorgebracht werde, dessen Intensität nach dem vorher definirten Maasse durch iI bestimmt wird, wenn

$$i = \frac{aR^3}{\pi^2 r^2} \cdot \frac{t}{\tau} \cdot T.$$

Nun wird endlich der Widerstand der ganzen Kette nach dem vorher definirten Maasse durch wW bestimmt, wenn

$$w = \frac{e}{i} = \frac{\pi^3 r^4}{aR^3 t}$$

ist. Die Ausführung der absoluten Widerstandsmessung der ganzen Kette ist hiernach auf die Messung der Grössen

$$r,\ R,\ a,\ t$$

zurückgeführt worden, oder, mit anderen Worten, der Widerstand der ganzen Kette kann hiernach in dem vorher definirten Maasse ausgedrückt werden, wenn man aus den Beobachtungen *erstens* die Zahl a gefunden hat, welche die Elongationsweite der Nadel in Theilen des Halbmessers angiebt, *zweitens* die Zahl r/R, welche den Halbmesser der beiden Kreise in Theilen der Entfernung BC angiebt, *drittens* die Geschwindigkeit r/t, mit welcher der Halbmesser jener Kreise während einer Schwingung der Nadel durchlaufen würde. Hieraus folgt also, dass ein *Maass für die Geschwindigkeit* das einzige Grössenmaass ist, auf welchem die absolute Widerstandsmessung beruht.

Nach der hiermit gegebenen Uebersicht aller zu einer absoluten Widerstandsbestimmung erforderlichen Beobachtungen gehen wir zur Ausführung dieser Beobachtungen selbst über.

12.

Ueber die Ausführung der Beobachtungen.

Die meisten Beobachtungen, welche der vorhergehenden Darstellung gemäss zur absoluten Widerstandsbestimmung der ganzen Kette gemacht werden müssen, können nun ohne Schwierigkeit mit grosser Schärfe wirklich ausgeführt werden. Denn die zur Bestimmung der Schwingungsdauer der Nadel erforderlichen Beobachtungen gestatten eine Schärfe, die bekanntlich nichts zu wünschen übrig lässt. Eben so verhält es sich mit den Abmessungen der Kreishalbmesser und der Entfernung $BC = R$. Es bleibt daher nur die Beobachtung der Elongationsweite a der schwingenden Nadel übrig. Auch diese kann bekanntlich mit den für das Magnetometer getroffenen Einrichtungen bis auf einige Bogensekunden genau bestimmt werden und würde daher gleichfalls nichts zu wünschen übrig lassen, wenn z. B. die Werthe von a nicht unter 1^0 gross wären. Aber diese Werthe sind, wenn genau nach diesem Schema verfahren wird, allerdings viel kleiner und würden sogar mit den besten Beobachtungsmitteln nicht wahrgenommen werden. Die Hauptaufgabe für die praktische Ausführung der Widerstandsmessung einer Kette nach *absolutem* Maasse besteht daher darin, solche Modifikationen in

der beschriebenen Einrichtung zu treffen, durch welche die zu beobachtende Elongation a möglichst vergrössert wird.

Eine solche Modifikation besteht *erstens* darin, dass man die Magnetnadel C aus der Ferne in den Mittelpunkt des Kreises B versetzt, wo die Elongation nach einem aus den Gesetzen des Elektromagnetismus genau zu bestimmenden Verhältnisse vergrössert wird. Nur muss dabei darauf geachtet werden, dass die Länge der Nadel viel kleiner sei, als der Durchmesser des Kreises, damit die eigenthümliche Vertheilungsweise des Magnetismus in der Nadel nicht besonders in Rechnung gebracht zu werden brauche, weil die genauere Erforschung dieser Vertheilungsweise mit Schwierigkeiten verbunden ist.

Eine *zweite* Modifikation, durch welche eine Vergrösserung der Elongation a erlangt werden kann, besteht in einer solchen Vervielfältigung der Umwindungen beider Kreise, wodurch sie in Ringe, welche einen bedeutenden Querschnitt besitzen, verwandelt werden. Es muss aber dann der Einfluss aller Umwindungen einzeln in Rechnung gebracht werden, weil sie verschiedene Halbmesser haben und nicht alle in einer Ebene mit der Nadel liegen.

Mit diesen beiden wesentlichen Modifikationen gelangt man zu einer solchen Vergrösserung der Elongation, dass auch diese Beobachtung mit Schärfe ausgeführt werden kann, wie die zu beschreibenden Versuche beweisen werden.

Ehe zu der Beschreibung der Versuche selbst übergegangen wird, möge noch eine Bemerkung über eine andere Modifikation der Einrichtung vorausgeschickt werden, zu welcher man gelangt, wenn man die für den Kreis B schon angegebene Vertauschung einer Wirkung in die Ferne mit einer Wirkung auf den Mittelpunkt auch auf den Kreis A in Anwendung bringt. Hiernach würde also die elektromotorische Kraft, welche der Erdmagnetismus aus der Ferne auf den Kreis A ausübte, durch die elektromotorische Kraft eines im Mittelpunkte des Kreises A aufzustellenden Magnets ersetzt werden. Es ergiebt sich sodann nach den Gesetzen der Magnetoelektricität eine Identität der Wirkung, wenn der Magnet ruhet und der Kreis vorwärts gedreht wird, oder wenn der Kreis ruhet und der Magnet rückwärts gedreht wird. Man kann daher im Mittelpunkte des ruhenden Kreises eine Magnetnadel aufhängen und schwingen lassen und durch diese schwingende Nadel eine elektromotorische Kraft auf den Kreis ausüben, und dabei können der Kreis und die Magnetnadel bei A ganz gleiche Stellung erhalten, wie der Kreis und die Magnetnadel bei B.

Bei dieser gleichen Gestaltung und gleichen Aufstellung beider Kreise und ihrer beiden Nadeln steht endlich einer völligen Vereinigung gar nichts im Wege, weil nämlich die magnetoelektrische Wirkung der

Nadel auf den Kreis und die elektromagnetische Wirkung des Kreises auf die Nadel ohne gegenseitige Störung in derselben Nadel und in demselben Kreise *nach dem Principe der Dämpfung* coexistiren können. Man braucht dann eine einzige Nadel, welche in Schwingung gesetzt wird und dadurch auf einen in sich geschlossenen Kreis, in dessen Mittelpunkte sie sich befindet, nach *magnetoelektrischen* Gesetzen eine elektromotorische Kraft ausübt, welche in diesem Kreise einen galvanischen Strom hervorbringt, der auf dieselbe Nadel nach *elektromagnetischen* Gesetzen zurückwirkt, von welcher er erregt worden war, und der dadurch eine *Dämpfung* oder Abnahme der Schwingungsbogen der schwingenden Nadel hervorbringt. Nach dieser Vereinfachung genügt die Beobachtung der *Schwingungsbogen*, durch deren *Grösse* die Grösse der *elektromotorischen Kraft* und durch deren *Abnahme* die Stärke des *inducirten Stroms* bestimmt werden kann. Die zweite und dritte Versuchsreihe werden Beispiele geben, wie auch nach dieser Methode der Widerstand einer Kette nach *absolutem* Maasse gemessen werden kann.

Wir gehen nun zu der Beschreibung der nach den aus einander gesetzten Methoden ausgeführten Versuche über und werden zuerst die nach der *ersten* Methode gemachten Versuche zusammenstellen.

13.

Erste Methode.

Zur Ausführung der Versuche nach der *ersten* Methode wurden folgende Instrumente eingerichtet, nämlich: 1. der *Erdinduktor* oder ein Drahtring, in welchem durch Drehung von dem Erdmagnetismus ein galvanischer Strom erregt wurde; 2. ein *Multiplikator*, dessen Drahtenden mit denen des Erdinduktors verbunden waren; 3. ein kleines *Magnetometer*, dessen Nadel im Mittelpunkte des Multiplikators aufgehangen wurde. Ueber diese drei Instrumente ist Folgendes zu bemerken.

1. *Der Erdinduktor.*

Der zum Erdinduktor verwendete Kupferdraht hatte mit Einschluss der Wolle, mit welcher er übersponnen war, ein Gewicht von

16533 Grammen,

wovon fast 500 Gramme auf die Wolle kamen. Dieser Draht wurde auf ein Holzgestell aufgewunden, welches nahe die Gestalt eines regulären Sechsecks hatte. Alle Drahtwindungen zusammen bildeten einen Ring mit rectangulärem Querschnitt, dessen eine auf die Ringebene senkrechte Seite 64 Millimeter, die andere etwa 16 Millimeter lang war. Die Länge eines um das Holzgestell, ehe der Draht aufgewunden

war, gelegten Bandes ergab den Umfang = 3067 Millimeter; die Länge eines um den aufgewundenen Draht gelegten Bandes ergab den Umfang = 3170 Millimeter. Der Draht bildete 7 Lagen über einander, jede mit 22 bis 23 Umwindungen, die 7. oder oberste Lage war nicht voll und hatte blos 10 Umwindungen, was zusammen

145 Umwindungen

gab. Die Länge der beiden überstehenden Drahtenden betrug zusammen genommen 550 Millimeter. Hieraus ergab sich, mit Berücksichtigung der geringen Abweichung der Form von einem regulären Sechseck, die Summe der Flächen, welche von den Projektionen dieser 145 Umwindungen auf die Ringebene begrenzt wurden, zu

104924000 Quadratmillimeter.

Nach der Aufwindung des Drahts wurden an zwei gegenüberstehenden Ecken des Sechsecks zwei starke Holzbacken, welche den Kupferring umschlossen, am Holzgestelle befestigt, jede derselben war mit einem starken, runden, nach aussen gekehrten Zapfen versehen, um welche der Ring gedreht werden konnte, wenn er mit diesen Zapfen in die Lager eines grossen, aus Balken sehr fest zusammengefügten Holzgestells eingelegt wurde. Die von diesen Zapfen gebildete, der Ringebene parallele Drehungsaxe war vertikal. Der eine dieser beiden Zapfen war hohl und durch denselben wurden die beiden Drahtenden durchgeführt und am Ende befestigt. Diese beiden am drehbaren Zapfen befestigten Drahtenden wurden mit 2 Spiralfedern von Messing verbunden, welche sich an dem festen Holzgestelle endigten, wo die Verbindungsdrähte eingeklemmt waren, welche den Induktor mit dem Multiplikator verbanden. Auf diese Weise war jede lockere Verbindung vermieden, welche eine Unbestimmtheit des Widerstands der Kette verursachen konnte, und es war zugleich eine Drehung des Induktors im Halbkreis, vorwärts oder rückwärts, gestattet, während die übrigen Theile der Kette unbewegt blieben. Am anderen Zapfen war eine lange Kurbel für die Drehung angebracht, welche am Ende jeder Drehung durch einen festen, am Holzgestell angebrachten Zahn arretirt wurde. Die Stellung dieser Sperrzähne wurde so regulirt, dass die Drehung des Induktors genau zwei rechte Winkel betrug, und dass die vertikale Ringebene am Anfang und am Ende jeder Drehung genau senkrecht gegen den magnetischen Meridian war.

2. *Der Multiplikator.*

Der zum Multiplikator verwendete Kupferdraht hatte mit Einschluss der Wolle, mit welcher er übersponnen war, ein Gewicht von

157430 Grammen,

wovon 4540 Gramme auf die Wolle kamen. Dieser Draht wurde auf eine hölzerne Rolle aufgewunden, welche äusserlich von einer Cylinderfläche, deren Halbmesser

303,51 Millimeter

betrug, begrenzt wurde. Der darauf gewundene Draht lag zwischen zwei parallelen, hölzernen Schutzwänden, welche 202,05 Millimeter von einander abstanden. Der mittlere Halbmesser einer die äusserste Lage von Drahtwindungen begrenzenden Fläche war 374,41 Millimeter, wonach der rectanguläre Querschnitt des von allen Umwindungen gebildeten Rings 202,05 Millimeter lang und 70,9 Millimeter breit war. Der Draht bildete 28 Lagen über einander, jede von 66 bis 68 Umwindungen. Die 28. oder oberste Lage war nicht voll und hatte blos 44 Umwindungen, was zusammen

1854 Umwindungen

gab. An der letzten Umwindung fehlten 155 Millimeter. Die Länge der beiden überstehenden Enden betrug zusammen

1340 Millimeter.

Dieser Multiplikator wurde so aufgestellt, dass seine Ebene mit dem magnetischen Meridian zusammenfiel.

3. *Das kleine Magnetometer.*

Die Nadel des kleinen Magnetometers war ein gehärteter und magnetisirter Stahlcylinder, 60 Millimeter lang und 6,2 Millimeter dick, in ihrer Mitte mit einem messingenen Bügel versehen, an dem sie aufgehangen wurde, und der einen runden Planspiegel von 30 Millimeter Durchmesser trug, dessen Normale mit der magnetischen Axe einen rechten Winkel bildete. Bei der angegebenen Länge der Nadel, welche noch nicht den 10. Theil des Durchmessers des Multiplikators betrug, kommt der Einfluss der eigenthümlichen Vertheilung des Magnetismus nicht mehr in Betracht und braucht daher nicht in Rechnung gezogen zu werden. Die Nadel war an beiden Enden durch zwei, 31 Millimeter lange Messingstifte verlängert, welche zwei Messingkugeln von 11,7 Millimeter Durchmesser trugen. Die Gewichte dienten zur Vergrösserung des Trägheitsmoments des Nadel, wodurch die Schwingungsdauer eine für die Beobachtung bequeme Grösse erhielt. Diese Nadel wurde an vier zu einem Faden vereinigten Kokonfäden aufgehangen, welche an der inneren Wand des Multiplikators so befestigt wurden, dass die Mitte der Nadel im Mittelpunkte des Multiplikators zu liegen kam. Der von dem Multiplikator umschlossene Raum, in dessen Mitte die Magnetnadel schwebte, wurde endlich durch zwei von beiden Seiten angebrachte Holzdeckel in ein geschlossenes Gehäuse verwandelt. In dem

einen dieser Deckel war eine kleine Oeffnung vor dem Spiegel der Nadel, welche mit einem planparallelen Glase verschlossen wurde. In der Vertikalebene der Spiegelnormale wurde in etwa 4 Meter Entfernung das Ablesungsfernrohr des Magnetometers aufgestellt und senkrecht gegen die Spiegelnormale einer Skale darauf befestigt, deren Horizontalabstand vom Spiegel

4087,5 Millimeter

betrug und deren Bild durch das auf den Spiegel gerichtete Fernrohr beobachtet werden konnte.

14.

Beobachtungen.

Mit diesen Instrumenten wurden nun folgende Beobachtungen gemacht. Es wurde der Induktor so gestellt, dass seine Ebene mit dem magnetischen Meridiane zusammenfiel, und die Magnetnadel zur Ruhe gebracht. Darauf wurde der Induktor plötzlich um 90^0 gedreht. Dadurch wurde die Nadel in Schwingung gesetzt und es wurde mit dem Fernrohr der Stand der Nadel bei ihrer grössten positiven Elongation, welche sie nach einer halben Schwingungsdauer erreichte, an der Skale beobachtet. Nach Verlauf von $1\frac{1}{2}$ Schwingungsdauer gelangte die Nadel zu ihrer grössten negativen Elongation, welche ebenfalls an der Skale beobachtet wurde. Hierauf wurde in dem Augenblicke, wo die wieder vorwärts schwingende Nadel ihren ursprünglichen Ruhestand passirte, d. i. zwei Schwingungsdauern nach Beginn der Versuche, der Induktor rückwärts um 180^0 gedreht. Die schwingende Nadel wurde dadurch mitten in ihrer Bewegung arretirt und rückwärts geworfen, worauf nun wieder zuerst ihre grösste negative und sodann ihre grösste positive Elongation an der Skale beobachtet wurde. Nach Verlauf von vier Schwingungsdauern, in dem Augenblicke, wo die Nadel von ihrer letzten Elongation zurückkehrend ihren ursprünglichen Ruhestand passirte, wurde der Induktor wieder um 180^0 vorwärts bewegt, worauf die nämlichen Elongationsbeobachtungen gemacht wurden, wie das erste Mal, und auf diese Weise wurden die Versuche fortgesetzt, bis eine hinreichende Beobachtungsreihe erhalten wurde. Die folgende Tafel umfasst vier solche Beobachtungsreihen. Für jede Reihe sind in der ersten Kolumne die an der Skale beobachteten Elongationen der Reihe nach unter einander gestellt. In der zweiten Kolumne sind die Mittelwerthe aus je zwei auf einander folgenden positiven oder negativen Elongationen beigefügt worden. In der dritten Kolumne endlich sind die Unterschiede der grössten positiven und negativen Elongationen oder die Grösse der

ganzen Schwingungsbogen und unter jeder Reihe deren Mittelwerth angegeben.

Erste Reihe			Zweite Reihe			Dritte Reihe			Vierte Reihe		
467,1			467,1			463,0			462,0		
540,7	543,70		540,5	543,65		536,7	539,65		534,7	538,20	
546,7			546,8			542,6			541,7		
461,4	463,60	80,10	461,3	464,00	79,65	456,6	459,25	80,40	455,3	458,20	80,00
465,8			466,7			461,9			461,1		
540,6	543,35	79,75	540,8	543,55	79,55	537,6	539,60	80,35	535,1	537,95	79,75
546,1			546,3			541,6			540,8		
462,3	464,10	79,25	461,8	463,65	79,90	458,3	460,05	79,55	456,0	458,45	79,50
465,9			465,5			461,8			460,9		
541,4	543,55	79,45	542,1	543,65	80,00	537,7	539,75	79,70	535,3	537,95	79,50
545,7			545,2			541,8			540,6		
462,3	463,80	79,75	462,8	463,95	79,70	457,9	459,80	79,95	456,0	457,90	80,05
465,3			465,1			461,7			459,8		
542,0	543,50	79,70	542,3	543,80	79,85	537,6	539,65	79,85	536,1	537,75	79,85
545,0			545,3			541,7			539,4		
462,8	464,05	79,45	462,7	463,70	80,10	458,2	459,95	79,70	456,8	458,20	79,55
465,3			464,7			461,7			459,6		
542,0	543,50	79,45	542,3	543,50	79,80	537,6	540,05	80,10	536,0	537,85	79,65
545,0			544,7			542,5			539,7		
462,9	463,85	79,65	462,8	463,75	79,75	457,3	460,00	80,05	456,5	458,15	79,70
464,8			464,7			462,7			459,8		
542,7	543,70	79,85	541,9	543,35	79,60	536,6	539,50	79,50	535,8	537,75	79,60
544,7			544,8			542,4			539,7		
463,4	464,25	79,45	462,3	463,60	79,75	457,2	459,75	79,75	456,4	458,20	79,55
465,1			464,9			462,3			460,0		
542,6	543,95	79,70	541,3	543,45	79,85				535,7	537,75	79,55
545,3			545,6						539,8		
462,8	464,20	79,75									
465,6											
Mittel 79,64			Mittel 79,79			Mittel 79,90			Mittel 79,69		

Der Mittelwerth für den ganzen Schwingungsbogen aus allen Beobachtungen ist folglich 79,755 Skalentheile, wofür die Abmessung

79,4 Millimeter

gab. Dieses Resultat ist aber noch um $\frac{1}{2}$ Millimeter zu vergrössern, wenn es von dem Einflusse unabhängig gemacht werden soll, welchen *die Dauer der Drehung des Induktors* darauf hatte: man erhält dann

79,9 Millimeter.[1])

[1]) Die Drehung des Induktors liess sich bei seiner Grösse nicht so schnell bewerkstelligen, dass ihre Dauer gegen die Schwingungsdauer der Nadel zu vernachlässigen wäre. Sie wurde daher mit möglichster Gleichförmigkeit immer in 2 Sekunden ausgeführt. Die Intensität des inducirten Stroms lässt sich hiernach für jeden Augenblick der Drehung bestimmen und wird durch $i \sin \pi\vartheta/2$ dargestellt, wenn i die Intensität in der Mitte der Drehung bezeichnet und die Zeit ϑ von Anfang der Drehung an gerechnet wird. Dieser veränderlichen, 2 Sekunden lang dauernden Induktion kann, mit fast gleicher Wirkung, eine gleichförmige Induktion substituirt werden, welche $4/\pi$ Sekunde lang einen Strom von der Intensität i erzeugt. Dieser Strom

Zur Vervollständigung der Messung wurde die Schwingungsdauer der Nadel beobachtet und aus 300 Schwingungsdauern die Dauer einer Schwingung

$$= 10{,}2818 \text{ Sekunden}$$

gefunden.

Ferner wurde das Verhältniss der magnetischen Direktionskraft zu der des Fadens gefunden wie

$$1770 : 1.$$

Da endlich in dem Saale, in welchem diese Instrumente aufgestellt waren, und in den angrenzenden Zimmern andere Magnete sich befanden, welche nicht hatten entfernt werden können, so liess sich nicht annehmen, dass die Stärke des horizontalen Theils des Erdmagnetismus, welcher in dem *Induktor* den Strom erregte, der Stärke des horizontalen Theils des Erdmagnetismus, welcher auf die Nadel im Mittelpunkte des *Multiplikators* wirkte, ganz gleich wäre. Daher wurden beide mit einander dadurch verglichen, dass die Schwingungsdauer einer und derselben Nadel an beiden Orten unmittelbar nach einander beobachtet wurde, und es ergab sich diese Schwingungsdauer im Mittelpunkte

des Dämpfers = 2,9095 Sekunden,
„ Induktors = 2,9126 „

Umgekehrt wie die Quadrate dieser Schwingungsdauern verhält sich die Stärke des Erdmagnetismus an diesen beiden Orten, d. i. wie

$$100\,000 : 99\,787.$$

Dies sind alle Versuche, welche nach der ersten Methode nöthig waren, um den Widerstand der ganzen Kette, welche aus dem Drahte des

beginnt $2/\pi$ Sekunde früher auf die Nadel zu wirken, als die Nadel zum magnetischen Meridiane gelangt und dort umkehrt, und darauf verfliessen nochmals $2/\pi$ Sekunde, ehe der Strom aufhört. Bezeichnet a die grösste Elongation der Nadel und t ihre Schwingungsdauer, so wird die Ablenkung der Nadel in dem Augenblicke, wo der Strom beginnt oder wo er aufhört, nahe durch a/t ausgedrückt und die mittlere Ablenkung für die ganze Dauer der Induktion durch $a/3t$. Die einer solchen Ablenkung entsprechende Beschleunigung der Nadel durch ihre Direktionskraft ist $= a/3t \,.\, \pi^2/t^2$, und die während der Induktion dadurch hervorgebrachte Geschwindigkeit ist $= 4/\pi \,.\, \pi^2 a/3t^3$. Die Hälfte davon müsste zur Geschwindigkeit $\pi a/t$, welche der Nadel, ihrer Elongation a nach, beim Durchgang durch den Meridian zukommt, hinzugefügt werden, um diejenige Geschwindigkeit zu erhalten, welche die Nadel im Augenblicke nach der Umkehrung besitzen würde, wenn die Induktion *momentan* geschähe. Wie sich nun die Geschwindigkeiten $\pi a/t : (1 + 2/3t^2)\, \pi a/t$ verhalten, ebenso verhält sich die beobachtete Elongation der Nadel a zu derjenigen Elongation, welche bei *momentaner Induktion* Statt gefunden haben würde. Letztere ergiebt sich hiernach $= (1 + 2/3t^2)\, a$. Da nun der ganze Schwingungsbogen $2a = 79{,}4$ Millimeter und $t = 10{,}2818$ war, so folgt hieraus der oben angeführte Werth $= 79{,}9$ Millimeter.

Induktors, des Dämpfers und aus den beiden Verbindungsdrähten bestand, nach *absolutem* Maasse zu bestimmen. Ehe zur Berechnung der Grösse des Widerstands der Kette aus diesen Versuchen übergegangen wird, sollen auch die nach der *zweiten* Methode gemachten Versuche zusammengestellt und vorausgeschickt werden.

15.

Zweite Methode.

A.

Die zweite Methode gewährt die Vereinfachung, dass von den bei der ersten gebrauchten Instrumenten der Erdinduktor ganz entbehrlich gemacht wird. Bei den folgenden Versuchen bildete daher der Draht des oben beschriebenen Multiplikators die ganze Kette, indem seine Enden unmittelbar mit einander verbunden wurden. Die Aufstellung des Multiplikators, welcher dadurch in einen *Dämpfer* verwandelt worden war, blieb unverändert. Dagegen wurde die Nadel im Magnetometer mit einer grösseren und stärkeren vertauscht, durch deren Schwingungen eine grössere elektromotorische Kraft auf die geschlossene Kette ausgeübt werden konnte. Diese Nadel bestand aus 9 parallelopipedischen Magnetstäben, jeder 90 Millimeter lang und 9 Millimeter breit und dick, welche mit parallel gerichteten Axen und durch 5 Millimeter weite Zwischenräume von einander geschieden, zu einem festen Systeme verbunden und zur Beobachtung der Schwingungen mit einem Spiegel versehen waren.

Mit diesen vereinfachten Instrumenten wurden nun folgende Versuche gemacht. Es wurde damit begonnen, dass die Drahtenden des Dämpfers von einander *getrennt* wurden. Alsdann wurde die Nadel in Schwingung gesetzt und nach der von Gauss in den „*Resultaten aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins im Jahre 1837*“ [1]) gegebenen Anleitung die Schwingungsdauer der Nadel und die Abnahme ihrer Schwingungsbogen oder deren logarithmisches Dekrement bestimmt. Darauf wurden die Drahtenden der Kette verbunden oder der *Dämpfer geschlossen* und die nämlichen Beobachtungen wiederholt. Sodann wurde der Dämpfer wieder geöffnet und auf diese Weise mehrmals abgewechselt. Die Resultate dieser Versuche sind in der folgenden Tafel zusammengestellt worden, wo in der ersten Kolumne unter A das logarithmische Dekrement der Abnahme der Schwingungsbogen bei *geschlossenem Dämpfer*, in der zweiten Kolumne das nämliche bei *offenem Dämpfer*, in der dritten Kolumne unter t die zugehörige *Schwingungsdauer* an-

[1]) [Carl Friedrich Gauss' Werke, Bd. V, p. 374.]

gegeben ist. Unter den Kolumnen sind die Mittelwerthe aus den wiederholten Bestimmungen beigefügt.

A	*B*	*t*
0,028 645	0,000 460	9,1128
0,027 955	0,000 360	9,1148
0,028 565	0,000 380	9,1107
0,028 388	0,000 400	9,1128

Zur Vervollständigung der Messung wurden endlich noch folgende Versuche gemacht, um den Magnetismus der Nadel zu bestimmen und auch von dessen Vertheilung, so weit es nöthig schien, Kenntniss zu erlangen. Es wurde nämlich möglichst nahe an der Stelle, wo die schwingende Nadel sich befunden hatte, eine kleine Boussole aufgestellt und die Ablenkung v_1 derselben beobachtet, wenn jene Nadel ihr genähert wurde. Eben so wurde die Ablenkung v_2 beobachtet, nachdem die Nadel um ihren Mittelpunkt um 180° gedreht worden war. Endlich wurden die korrespondirenden Ablenkungen v_3 und v_4 beobachtet, als die Nadel parallel mit sich selbst in gleiche Entfernung auf die entgegengesetzte Seite von der Boussole versetzt wurde, und daraus der Werth von

$$v = \tfrac{1}{4}(v_1 - v_2 + v_3 - v_4)$$

berechnet. Diese Versuche wurden nun gemacht bei verschiedenen Entfernungen von der Boussole und bei verschiedener Richtung der Geraden, welche durch die Mitte der Nadel und der Boussole ging, nämlich in den Entfernungen von 400, 500 und 600 Millimetern, als jene Gerade senkrecht auf dem magnetischen Meridiane war, und in der Entfernung von 400 Millimeter, als sie dem magnetischen Meridiane parallel war. Die magnetische Axe der ablenkenden Nadel war stets senkrecht gegen den magnetischen Meridian. In der folgenden Tafel sind die Resultate dieser Versuche zusammengestellt. No. 1, 2, 3 beziehen sich auf die Fälle, wo die Richtung der Geraden von der Mitte der Nadel zur Mitte der Boussole auf dem magnetischen Meridiane senkrecht war, No. 4 auf den Fall, wo diese Gerade dem magnetischen Meridiane parallel war. In der zweiten Kolumne unter *R* ist die Entfernung der Mittelpunkte beider Nadeln, in der dritten Kolumne der für diese Entfernung gefundene Werth von *v* angegeben.

No.	*R*	*v*
1.	400 mm	32° 37′ 52,5″
2.	500 „	18° 1′ 52,5″
3.	600 „	19° 37′ 7,5″
4.	400 mm	17° 24′ 45,0″

Hierbei ist zu bemerken, dass diese Versuchsreihe einige Zeit später gemacht wurde als die obigen Beobachtungen der im Dämpfer schwingenden Nadel, und dass daher nicht angenommen werden konnte, dass das Verhältniss des Nadelmagnetismus zum Erdmagnetismus in dieser Zeit ganz unverändert geblieben wäre. Deshalb war schon in den Zwischenzeiten zwischen den einzelnen Sätzen der obigen Schwingungsbeobachtungen einer von diesen Ablenkungsversuchen gemacht worden, welcher dazu benutzt werden konnte, das aus der letzten vollständigen Reihe von Ablenkungsbeobachtungen sich ergebende Verhältniss des Nadelmagnetismus zum Erdmagnetismus auf diejenige Zeit zu reduciren, wo obige Schwingungsbeobachtungen gemacht wurden. Aus der Vergleichung der korrespondirenden Ablenkungen ergab sich nämlich das Verhältniss

$$10293 : 10000,$$

woraus hervorgeht, dass der Nadelmagnetismus in der Zwischenzeit merklich abgenommen hatte. Das Verhältniss der magnetischen Direktionskraft zu der des Fadens bei den Schwingungsbeobachtungen war:

$$68 : 1.$$

Dies sind alle Versuche, welche nach der zweiten Methode nöthig waren, um den Widerstand der Kette oder des Drahts, welcher den Dämpfer bildete, nach absolutem Maasse zu bestimmen.

B.

Aus den unter (A) zusammengestellten Versuchen geht hervor, dass eine Nadel, deren Länge fast nur den 7. Theil des Durchmessers des Dämpfers betrug und die sehr kleine Schwingungen machte, dennoch eine elektromotorische Kraft auf den Dämpfer ausübte, welche hinreichte, einen Strom zu erregen, dessen Rückwirkung auf die Nadel nicht blos wahrgenommen, sondern genau gemessen werden konnte. Sollen diese Versuche nun einer Berechnung des Widerstands der Kette nach absolutem Maasse zum Grunde gelegt werden, so entsteht einige Komplikation dadurch, dass auch bei den mässigen Dimensionen der Nadel im Vergleiche zum Durchmesser des Dämpfers, die Vertheilungsweise des Magnetismus in der ersteren nicht ganz ausser Acht gelassen werden darf. Diese Komplikation wird ganz vermieden, wenn man eine kleinere Nadel im Dämpfer aufhängt, wenn die kleinere Nadel gleich viel Magnetismus, wie die grössere, besitzt.

In dem physikalischen Institute zu Leipzig befand sich ein natürlicher Magnet von geringer Grösse und, im Verhältniss zu dieser, von grosser Stärke, welcher nebst Fassung 40 Gramm wog und 24 Millimeter lang war. Wegen dieser Kleinheit und Stärke war er zur Magnetometernadel für diese Versuche sehr geeignet, und der Durch-

messer des Dämpfers hätte, ohne eine genauere Erforschung der Vertheilungsweise des Magnetismus nöthig zu machen, beträchtlich verkleinert werden können. Die zugemessene beschränkte Zeit, in welcher die grosse Drahtmasse des Dämpfers zu diesen Versuchen disponibel war, gestattete aber keine Umgestaltung des Dämpfers und es wurde daher jener natürliche Magnet als Nadel in den unveränderten Dämpfer aufgehangen und eine zweite Versuchsreihe damit ausgeführt, die hier gleichfalls zusammengestellt werden soll, weil sie einen interessanten Beweis von der Feinheit giebt, welche die Beobachtungen über die Abnahme der Schwingungsbogen mit dem Dämpfer gewähren, um die Wirkungen sehr schwacher elektromotorischer Kräfte noch zu erkennen und selbst mit ziemlicher Genauigkeit zu messen. Dieser natürliche Magnet wurde zu diesem Zwecke mit Fassung versehen zur Befestigung des Spiegels und zur Aufhängung an einem Faden in der Mitte des Dämpfers. Im Uebrigen blieben die Instrumente unverändert und die Versuche wurden damit ganz auf dieselbe Weise, wie die vorhergehenden, ausgeführt. Die folgende Tafel giebt die Uebersicht der damit gewonnenen Resultate, nämlich unter A das logarithmische Dekrement der Abnahme der Schwingungsbogen bei geschlossenem Dämpfer, unter B das logarithmische Dekrement der Abnahme der Schwingungsbogen bei offenem Dämpfer, unter t die zugehörige Schwingungsdauer.

A	B	t
0,006 01	0,002 54	3,955
0,006 13	0,002 67	3,954
0,006 15	0,002 67	3,953
0,006 05	0,002 66	3,949
0,006 085	0,002 635	3,9527

Zur Vervollständigung dieser Versuche wurde der Magnetismus des kleinen Magnets durch besondere Versuche auf ähnliche Weise bestimmt, wie in der vorhergehenden Reihe; da aber bei diesem kleinen Magnet blos das Moment desselben zu bestimmen nöthig war, so wurden diese Versuche auf zwei verschiedene Abstände von dem Mittelpunkte der kleinen Hülfsboussole beschränkt, in der Richtung senkrecht auf den magnetischen Meridian östlich und westlich von der Boussole. Die folgende Tafel giebt eine Uebersicht der dadurch erlangten Resultate, unter R den Abstand der Mitte des natürlichen Magnets von der Mitte der Boussole, unter v die Ablenkung der Boussole auf dieselbe Weise, wie in der vorigen Reihe, berechnet.

R	v
180,08 mm	20° 42′ 0″
240,18 „	9° 4′ 52″

Die Resultate dieser Beobachtungen gelten für eine Temperatur von 20° R. des Kupferdrahts, welches im Mittel die Temperatur während der Beobachtungen in diesem und im vorigen Artikel gewesen ist.

Durch diese Versuche sind die Data zur Bestimmung des Widerstands der Kette nach absolutem Maasse vollständig gegeben.

16.

Regeln zur Berechnung des Widerstands aus den vorhergehenden Beobachtungen.

Wenn die Verhältnisse, unter welchen die vorhergehenden Beobachtungen ausgeführt worden sind, denjenigen Verhältnissen genau entsprächen, welche in dem Art. 11 gegebenen Schema zur absoluten Widerstandsbestimmung eines Leiters angenommen worden waren, so würden die Regeln zur Berechnung des Widerstands aus den mitgetheilten Beobachtungs-Resultaten in der am Schlusse jenes Schema's gefundenen Formel

$$w = \frac{\pi^3 r^4}{a R^3 t}$$

enthalten sein; denn es würde alsdann der Werth der Zahl a, welche die Elongationsweite der von der Ruhe ab in Schwingung gesetzten Nadel in Theilen des Halbmessers angiebt, ferner der Werth der Zahl r/R, welche das Verhältniss der Halbmesser der kreisförmigen Leiter A und B zu der Entfernung BC angiebt, und endlich die Geschwindigkeit r/t, mit welcher der Halbmesser der kreisförmigen Leiter während einer Schwingung der Nadel durchlaufen würde, unmittelbar durch die Beobachtungs-Resultate gegeben sein. Weil nun aber die vorhergehenden Beobachtungen, nach der gegebenen Beschreibung, nicht genau unter den im erwähnten Schema angenommenen Verhältnissen ausgeführt worden sind, so bedürfen jene einfachen Regeln einiger Abänderungen, um Anwendung auf die vorliegenden Beobachtungen zu finden.

Einige dieser Abänderungen ergeben sich leicht, wenn man in der für die Gleichung $w = \pi^3 r^4 / a R^3 t$ gegebenen Ableitung die Halbmesser der beiden kreisförmigen Leiter ungleich annimmt und sie durch r' und r'' unterscheidet, wenn man ferner die Zahl ihrer Umwindungen m und n in Rechnung bringt, wenn man ausserdem die Elasticität des Fadens, an welchem die Nadel aufgehangen wurde, berücksichtigt, aus welcher sich eine Direktionskraft für die Nadel ergiebt, die sich zu ihrer magnetischen Direktionskraft verhält wie $\vartheta : 1$, und wenn man endlich die ungleiche Stärke des Erdmagnetismus an den beiden Orten A und B beachtet, deren Verhältniss durch T'/T'' dargestellt werde. Man findet

dann, dass in obiger Formel das Produkt $r'r''$ für das Quadrat r^2 zu setzen und der ganze Werth für w noch mit $mn/(1+\vartheta)\,.\,T'/T''$ zu multipliciren ist, folglich

$$w = \frac{mn}{(1+\vartheta)} \cdot \frac{T'}{T''} \cdot \frac{\pi^3 r'^2 r''^2}{aR^3 t}.$$

Ausserdem kommen nun für die nach der ersten Methode ausgeführten Beobachtungen noch folgende wesentliche Modifikationen in Betracht, nämlich *erstens*, dass die Nadel aus der Entfernung $BC = R$ in den Mittelpunkt des Kreises B selbst versetzt wurde, wodurch die beobachtete Elongationsweite in dem Verhältniss von

$$r''^3 : 2R^3$$

vergrössert wird. Hierbei lässt sich zugleich der Umstand mit berücksichtigen, dass der Kreis A statt um einen Quadranten jedes Mal um zwei Quadranten gedreht wurde, wodurch die beobachtete Elongationsweite ebenfalls vergrössert wurde und zwar in dem Verhältniss von

$$1 : 2.$$

Bezeichnet also a gegenwärtig diese vergrösserte Elongationsweite, so ist demgemäss

$$w = \frac{mn}{1+\vartheta}\,\frac{T'}{T''} \cdot \frac{4\pi^3 r'^2}{ar''t}$$

zu setzen. *Zweitens* kommt die Vervielfältigung der Umwindungen beider Kreise, wodurch sie in Ringe, welche einen bedeutenden Querschnitt besitzen, verwandelt werden, in Betracht. Für den Ring A genügt es, mit Rücksicht darauf, dass er keine genaue Kreisform hatte, statt $m\pi r'^2$ die Summe der Flächen zu setzen, welche von den Projektionen aller seiner Umwindungen auf die Ringebene begrenzt werden, folglich, wenn diese Summe mit S bezeichnet wird,

$$w = \frac{n}{1+\vartheta} \cdot \frac{T'}{T''} \cdot \frac{4\pi^2 S}{ar''t}.$$

Für den Ring B dagegen ist der äussere Halbmesser a'', der innere Halbmesser a', die Höhe des Rings $2b'$ und ausserdem in Beziehung auf die Vertheilung des Magnetismus M der Nadel, wenn

$$M = 2e'\mu$$

gesetzt wird, wo $\pm\mu$ die Menge des nördlichen oder südlichen magnetischen Fluidums bezeichnet, welche dem bekannten Gauss'schen Theoreme von der idealen Vertheilung des Magnetismus gemäss an der Oberfläche der Nadel verbreitet gedacht werden kann, die Länge e' in

Rechnung zu bringen, was dadurch geschieht, dass statt $1/r''$ folgender Ausdruck gesetzt wird:

$$\frac{1}{a''-a'}\left\{\log\frac{a''+\sqrt{a''^2+b'^2}}{a'+\sqrt{a'^2+b'^2}}+\frac{1}{4}\left(\frac{a''^3}{(a''^2+b'^2)^{\frac{3}{2}}}-\frac{a'^3}{(a'^2+b'^2)^{\frac{3}{2}}}\right)\frac{e'^2}{b'^2}\right\}.$$

Die hier angeführten Abänderungen der Art. 11 gefundenen Formel, welche nothwendig sind, wenn der Widerstand der Kette aus den Art. 14 beschriebenen Versuchen berechnet werden soll, sind so zahlreich, dass ich es vorziehe, statt auf eine nähere Erörterung und Begründung derselben einzugehen, die beiden Gleichungen, welche im folgenden Art. 17 zur Berechnung des Widerstands aus den Art. 14 beschriebenen Versuchen gebraucht werden, nämlich:

$$w=\frac{n}{1+\vartheta}\cdot\frac{T'}{T''}\cdot\frac{4\pi^2 S}{a r'' t},$$

$$\frac{1}{r''}=\frac{1}{a''-a'}\left\{\log\frac{a''+\sqrt{a''^2+b'^2}}{a'+\sqrt{a'^2+b'^2}}+\frac{1}{4}\left(\frac{a''^3}{(a''^2+b'^2)^{\frac{3}{2}}}-\frac{a'^3}{(a'^2+b'^2)^{\frac{3}{2}}}\right)\cdot\frac{e'^2}{b'^2}\right\},$$

unmittelbar aus den elektromagnetischen und magnetoelektrischen Grundgesetzen abzuleiten. Man findet diese Ableitung in Beilage *D* am Ende der Abhandlung.

Ferner werden im 18. Artikel zur Berechnung des Widerstands aus den Art. 15 beschriebenen Versuchen folgende Gleichungen gebraucht werden:

$$w=\frac{n^2\pi^2}{1+\vartheta}\cdot\frac{\pi^2+\lambda^2}{\lambda}\cdot\operatorname{tang} v_0\cdot\frac{r''}{t},$$

$$\frac{1}{r''}=\frac{1}{a''-a'}\left\{\log\frac{a''+\sqrt{a''^2+b'^2}}{a'+\sqrt{a'^2+b'^2}}+\frac{1}{4}\left(\frac{a''^3}{(a''^2+b'^2)^{\frac{3}{2}}}-\frac{a'^3}{(a'^2+b'^2)^{\frac{3}{2}}}\right)\cdot\frac{e'^2}{b'^2}\right\},$$

worin λ den natürlichen Logarithmus des beobachteten Verhältnisses zweier auf einander folgender Schwingungsbogen der Magnetometernadel in Folge der Dämpfung bei geschlossener Kette bezeichnet und $\operatorname{tang} v_0$ statt $2M/T''r''^3$ geschrieben worden ist. Auch diese letzeren Gleichungen sind in der Beilage *D* unmittelbar aus den elektromagnetischen und magnetoelektrischen Grundgesetzen abgeleitet worden.

Hiernach können wir nun zur Berechnung des Widerstands selbst aus den Art. 14 und 15 beschriebenen Versuchen übergehen.

17.

Berechnung des Widerstands aus der ersten Versuchsreihe.

Bei der Versuchsreihe Art. 14, welche nach der ersten Methode ausgeführt war, bestand die Kette aus dem Drahte des Induktors und

des Multiplikators und aus den beiden Verbindungsdrähten, und der zu berechnende Widerstand ist die Summe der Widerstände dieser vier Drähte.

Die unmittelbaren Ergebnisse der Art. 14 beschriebenen Versuche waren *erstens* die Grösse des mit dem Magnetometer gemessenen Schwingungsbogens, nämlich:

79,9 Millimeter

für einen Halbmesser von 8175 Millimeter Länge (= dem doppelten Horizontalabstande des Spiegels von der Skale). Hieraus ergiebt sich:

$$a = \frac{79{,}9}{8175}.$$

Siehe darüber Beilage C, wo die hier gebrauchte Zurückwerfungsmethode näher erörtert ist.

Zweitens die Grösse der Schwingungsdauer der Magnetometernadel

$$t = 10{,}2818 \text{ Sekunden.}$$

Drittens der von der Elasticität des Aufhängungsfadens herrührende Theil der Direktionskraft der Nadel, in Theilen ihrer magnetischen Direktionskraft ausgedrückt,

$$\vartheta = \frac{1}{1770}.$$

Viertens das Verhältniss der Stärke des horizontalen Theils des Erdmagnetismus am Orte des Induktors T' zu der am Orte des Multiplikators T''

$$\frac{T'}{T''} = 0{,}997\,87.$$

Zu diesen unmittelbaren Ergebnissen der Beobachtungen sind ferner die Resultate der Abmessungen des Induktors und Multiplikators hinzuzufügen. Für den *Induktor* genügt das Resultat, dass die Summe der Flächen, welche von den Projektionen seiner 145 Umwindungen auf die Ringebene begrenzt wurden,

$$S = 104\,924\,000 \text{ Quadratmillimeter}$$

betrug.

Für den *Multiplikator* müssen folgende Resultate seiner Abmessung beigefügt werden:

innerer Halbmesser . .	$a' = 303{,}51$	Millimeter,
äusserer Halbmesser .	$a'' = 374{,}41$	„
Breite	$2b' = 202{,}05$	„
Zahl der Umwindungen	$n = 1854.$	

Aus diesen Werthen von a', a'', b' ergiebt sich:

$$\frac{1}{r''} = \frac{1}{a''-a'}\left\{\log\frac{a''+\sqrt{a''^2+b'^2}}{a'+\sqrt{a'^2+b'^2}} + \frac{1}{4}\left(\frac{a''^3}{(a''^2+b'^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{a'^3}{(a'^2+b'^2)^{\frac{3}{2}}}\right)\frac{e'^2}{b'^2}\right\},$$

$$\frac{1}{r''} = 0{,}002\,835\,2 + 0{,}000\,000\,015\,875\,.\,e'^2,$$

wo bei der Kleinheit der Nadel für e' einen approximativen Werth, von etwa 20 Millimetern, anzunehmen genügt, also $1/r'' = 0{,}002\,841\,55$. Hieraus ergiebt sich dann:

$$w = \frac{n}{1+\vartheta}\cdot\frac{T'}{T''}\cdot\frac{4\pi^2 S}{ar''t},$$

$$= \frac{1770}{1771}\cdot 1854\cdot 0{,}99787\cdot\frac{4\pi^2\cdot 104924000}{79{,}9\cdot 10{,}2818}\,8175\cdot 0{,}00284155,$$

oder

$$w = 2166\,.\,10^8.$$

Durch das definirte Widerstandsmaass W und durch diese Zahl w ist also der Widerstand der Kette, welche aus dem Induktor- und dem Multiplikatordrahte nebst den beiden Verbindungsdrähten bestand, vollständig bestimmt, wobei nur zu bemerken ist, dass dieser absoluten Maassbestimmung das Millimeter als Raummaass und die Sekunde als Zeitmaass zum Grunde liegt, was durch folgende Bezeichnung ausgedrückt wird:

$$2166\cdot 10^8\,\frac{\text{Millimeter}}{\text{Sekunde}}.$$

Verhält sich ein anderes Raummaass zum Millimeter, wie $1:r$, ein anderes Zeitmaass zur Sekunde, wie $1:t$, so ist derselbe Widerstand, wenn diese neuen Maasse zum Grunde gelegt werden:

$$2166\cdot 10^8\cdot\frac{r}{t},$$

z. B. wenn die Meile als Raummaass zum Grunde gelegt wird, die sich zum Millimeter verhält, wie 1 : 0,000 000 135:

$$29241\,\frac{\text{Meile}}{\text{Sekunde}}.$$

18.

Berechnung des Widerstands aus der zweiten Versuchsreihe.

Bei der zweiten Versuchsreihe, welche nach der zweiten Methode ausgeführt war, bestand die Kette blos aus dem Drahte des Dämpfers, d. i. aus demjenigen Drahte, welcher in der vorhergehenden Versuchsreihe den Multiplikator bildete.

Die unmittelbaren Ergebnisse der Versuche waren:

Erstens die Grösse des logarithmischen Dekrements der Abnahme der Schwingungsbogen, welches nach Abzug des vom elektromagnetischen Einflusse unabhängigen Theils, nach gemeinen Logarithmen,

$$= 0{,}027988$$

gefunden worden ist; folglich, nach natürlichen Logarithmen,

$$\lambda = 0{,}064445.$$

Zweitens die Grösse der Schwingungsdauer der Magnetometernadel

$$t' = 9{,}1128,$$

wobei noch zu bemerken war, dass die magnetische Direktionskraft ungefähr um ihren 68. Theil durch die Elasticität des Fadens vermehrt war, also

$$\vartheta = \frac{1}{68}.$$

Drittens die Grösse des Nadelmagnetismus im Verhältniss zum Erdmagnetismus war aus den in folgender Tafel enthaltenen Ergebnissen der Ablenkungsversuche zu entnehmen:

No.	R	v
1.	400 mm	32° 37′ 52,5″
2.	500 „	18° 1′ 52,5″
3.	600 „	10° 37′ 7,5″
4.	400 mm	17° 24′ 45″

Die drei ersten Nummern beziehen sich auf die Versuche, bei welchen der Mittelpunkt der Magnetometernadel und ihre magnetische Axe mit demjenigen Perpendikel auf den magnetischen Meridian zusammenfiel, welches durch den Mittelpunkt der Hülfsboussole gelegt wurde; die vierte Nummer auf einen Versuch, wobei die Magnetometernadel zwar ebenfalls mit ihrer Axe senkrecht gegen den magnetischen Meridian lag, aber ihr Mittelpunkt in der durch den Mittelpunkt der Hülfsboussole dem magnetischen Meridiane parallel gelegten Geraden sich befand. Auch war ermittelt worden, dass das hieraus hervorgehende Verhältniss des Nadelmagnetismus zum Erdmagnetismus in dem Verhältniss

$$10000 : 10293$$

vergrössert werden muss, wenn es für die Zeit gelten soll, wo die Abnahme der Schwingungsbogen und die Schwingungsdauer der Magnetometernadel beobachtet worden waren.

Die Ableitung der Werthe von e' und v_0 in den zur Berechnung des Widerstands aufgestellten Formeln:

$$w = \frac{n^2\pi^2}{1+\vartheta} \operatorname{tang} v_0 \cdot \frac{\pi^2+\lambda^2}{\lambda} \cdot \frac{r''}{t},$$

$$\frac{1}{r''} = \frac{1}{a''-a'} \left\{ \log \frac{a''+\sqrt{a''^2+b'^2}}{a'+\sqrt{a'^2+b'^2}} + \frac{1}{4}\left(\frac{a''^3}{(a''^2+b'^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{a'^3}{(a'^2+b'^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \frac{e'^2}{b'^2} \right\},$$

aus den eben angeführten Datis ist nun folgende. Man denkt sich die nach der S. 338 schon erwähnten idealen Vertheilungsweise an der Oberfläche der Nadel verbreiteten magnetischen Fluida jedes in seinem Mittelpunkte (Schwerpunkte) koncentrirt, d. h. in zwei Punkten, welche in der Entfernung e' von der Mitte der Nadel in einer mit der Richtung der magnetischen Axe parallelen Linie liegen und deren Abstand $= 2e'$ ist. Die Lage des Mittelpunkts der Nadel und ihrer magnetischen Axe gegen den Mittelpunkt der abgelenkten Boussole und gegen den magnetischen Meridian ist in obiger Tafel für jeden Versuch genau bestimmt. Hat nun f' für die Boussole gleiche Bedeutung wie e' für die Magnetometernadel, so leuchtet ein, dass für jede gegebene Ablenkung der Boussole v die Lage der 4 Punkte, in denen die magnetischen Fluida beider Nadeln koncentrirt gedacht werden, gegen einander und gegen den magnetischen Meridian durch e' und f' vollständig bestimmt werden, und dass sich dann, mit Hülfe des Gesetzes, nach welchem zwei Elemente des magnetischen Fluidums auf einander wirken, aus dem Verhältnisse des Magnetismus der Magnetometernadel M zum Erdmagnetismus T, das Verhältniss des Drehungsmoments, welches die Magnetometernadel, zu dem, welches der Erdmagnetismus auf die Boussole ausübt, bestimmen lasse. Diejenige Ablenkung v, für welche diese beiden Drehungsmomente sich entgegengesetzt gleich ergeben, ist die beobachtete, die dadurch in Abhängigkeit von e', f' und M/T kommt. Die Gleichung, welche die Abhängigkeit dieser Grössen ausdrückt, ergiebt sich daraus für den Fall, wo die Gerade R, welche die Mittelpunkte beider Nadeln verbindet, auf den magnetischen Meridian senkrecht ist:

$$\frac{T}{M} \operatorname{tang} v = \frac{2}{R^3} + \frac{4e'^2 - 6(1-5\sin v^2)f'^2}{R^5} + \ldots$$

für den Fall, wo R dem magnetischen Meridiane parallel ist,

$$\frac{T}{M} \operatorname{tang} v = \frac{1}{R^3} - \frac{3}{2} \frac{e'^2 - (4-15\sin v^2)f'^2}{R^5} + \ldots$$

Die Annahme von der Koncentration der magnetischen Fluida ist nun aber nur dann zulässig, wenn diejenigen Glieder, welche mit R^7 oder mit höheren Potenzen dividirt sind, vernachlässigt werden dürfen. Da nun für jeden Versuch in obiger Tafel die Werthe von R und v gegeben sind, so giebt jeder Versuch eine Gleichung zwischen e', f', M/T, und

folglich geben die 4 in obiger Tafel enthaltenen Versuche 4 Gleichungen zwischen diesen 3 Grössen, von denen drei zur Bestimmung dieser Grössen dienen und die vierte zur Kontrole, dass die Werthe von R wirklich so gross sind, dass die Glieder der höheren Ordnung vernachlässigt werden dürfen. Die Werthe obiger 3 Grössen, welche mit den Beobachtungen am besten harmoniren, sind:

$$e' = 33{,}715,$$

$$f' = 14{,}856,$$

$$\frac{M}{T} = 20\,143\,000.$$

Der letztere Werth von M/T gilt für die Zeit, wo die Ablenkungsversuche gemacht wurden, und muss nach S. 342 mit 1,0293 multiplicirt werden, wenn er für die Zeit gelten soll, wo die Schwingungsdauer und die Abnahme der Schwingungbogen beobachtet worden sind; für letztere Zeit ergiebt sich also

$$\frac{2M}{T} = 41\,466\,000.$$

Substituirt man ferner den gefundenen Werth von e' in der Gleichung

$$\frac{1}{r''} = 0{,}002\,835\,2 + 0{,}000\,000\,015\,875\, e'^2,$$

welche auch für die zweite Versuchsreihe gilt, weil die Abmessungen des Dämpfers hier die nämlichen sind, wie die Abmessungen des Multiplikators in der ersten Versuchsreihe, so erhält man

$$\frac{1}{r''} = 0{,}002\,853\,2,$$

oder

$$r'' = 350{,}48,$$

und mit diesem Werthe

$$\frac{2M}{Tr''^3} = \operatorname{tang} v_0 = 0{,}963\,14.$$

Ausserdem ist, wie in der ersten Versuchsreihe,

$$n = 1854.$$

Hieraus ergiebt sich dann

$$w = \frac{n^2\pi^2}{1+\vartheta} \operatorname{tang} v_0 \cdot \frac{\pi^2 + \lambda^2}{\lambda} \cdot \frac{r''}{t}$$

$$= \frac{68}{69} \cdot 1854^2\pi^2 \,.\, 0{,}963\,14 \cdot \frac{\pi^2 + 0{,}064\,445^2}{0{,}064\,445} \cdot \frac{350{,}48}{9{,}1128},$$

oder

$$w = 1898 \,.\, 10^8.$$

Durch das definirte Widerstandsmaass W und durch diese Zahl w ist also der Widerstand der Kette, welche blos aus dem Dämpferdraht bestand, vollständig bestimmt.

19.

Berechnung des Widerstands aus der dritten Versuchsreihe.

Auch bei der dritten Versuchsreihe bestand die Kette, deren Widerstand bestimmt werden sollte, blos aus dem Drahte des Dämpfers, und die Versuche waren nach der zweiten Methode ausgeführt worden. Der wesentliche Unterschied von der zweiten Versuchsreihe bestand daher blos darin, dass der zur Magnetometernadel gebrauchte natürliche Magnet viel kleinere Dimensionen hatte, wodurch einerseits zwar die Rechnung vereinfacht wurde, weil bei so kleinen Dimensionen, im Vergleich zum Durchmesser des Dämpfers, die Art der Vertheilung des freien Magnetismus nicht in Betracht kommt; andererseits verlor aber dadurch die Messung an Präcision, weil der Magnetismus, so stark er auch im Verhältniss zur Grösse des Magnets war, doch fast nur den 19. Theil von dem Magnetismus der grösseren Nadel betrug, wodurch die Dämpfung so geschwächt wurde, dass die Beobachtungen keine so feine Bestimmung des logarithmischen Dekrements der Abnahme der Schwingungsbogen gestatteten.

Die unmittelbaren Ergebnisse der Versuche waren: *Erstens* die Grösse des logarithmischen Dekrements für die Abnahme der Schwingungsbogen, welches, nach Abzug des vom elektromagnetischen Einflusse unabhängigen Theils, nach gemeinen Logarithmen

$$= 0{,}00345$$

gefunden worden ist, folglich, nach natürlichen Logarithmen,

$$\lambda = 0{,}007944.$$

Zweitens, die Schwingungsdauer der Nadel

$$t' = 3{,}9527.$$

Die Elasticität des Aufhängefadens konnte vernachlässigt werden, da sie die Direktionskraft noch nicht um $\frac{1}{2000}$ vergrösserte.

Drittens, die Grösse des Nadelmagnetismus im Verhältnisse zum Erdmagnetismus war aus den in folgender Tafel zusammengestellten Ablenkungsversuchen zu entnehmen.

R	v
180,08 mm	20° 42,0′
240,18 „	9° 4,52′

Die Linie R, welche die Mittelpunkte der ablenkenden und abgelenkten Nadel verband, war dabei senkrecht auf den magnetischen Meridan.

Hieraus folgt nach der in der „*Intensitas vis magneticae terrestris etc.*“ von Gauss gegebenen Regel:

$$\text{tang}\ 20^0\ 42' \quad = \frac{2M}{T} \cdot 180{,}08^{-3} + a\,.\,180{,}08^{-5},$$

$$\text{tang}\ \ 9^0\ \ 4'\ 52'' = \frac{2M}{T} \cdot 240{,}18^{-3} + a\,.\,240{,}18^{-5},$$

also

$$\frac{2M}{T} = 2224660.$$

Es ist jedoch hierbei zu bemerken, dass bei dem geringen Grade von Genauigkeit, welchen diese mit so kleinen Magneten gemachten Ablenkungsversuche besitzen, die Elimination des zweiten, von der 5. Potenz der Entfernung abhängigen Gliedes sehr unsicher ist, so dass ein ebenso genaues oder vielleicht noch genaueres Resultat gewonnen wird, wenn man dieses zweite Glied gar nicht berücksichtigt. Alsdann findet man

$$\text{tang}\ 20^0\ 42' \quad = \frac{2M}{T} \cdot 180{,}08^{-3},$$

$$\text{tang}\ \ 9^0\ \ 4'\ 52'' = \frac{2M}{T} \cdot 240{,}18^{-3},$$

und hieraus die beiden Werthe für $2M/T$:

$$2206600,$$
$$2214500,$$

oder den Mittelwerth

$$2210550.$$

Bei dem Zweifel darüber, ob der ersten oder der zweiten Berechnung im vorliegenden Falle der Vorzug gebühre, und da die auf beide Weise erhaltenen Resultate ohnedem wenig verschieden sind, so soll aus den Resultaten beider Berechnungen das Mittel genommen werden, nämlich:

$$\frac{2M}{T} = 2217600.$$

Weil nun ausserdem für den Dämpfer wieder dieselben Abmessungen wie in der vorhergehenden Versuchsreihe gelten, dabei aber das von e' abhängige Glied im Werthe von $1/r''$ wegen der Kleinheit der Nadel unmerklich ist, so ergiebt sich

$$\frac{1}{r''} = 0{,}0028352,$$

$$r'' = 352{,}71,$$

folglich

$$\frac{2M}{Tr''^3} = \text{tang}\ v_0 = 0{,}05054.$$

Ausserdem ist, wie in der vorhergehenden Reihe,

$$n = 1854.$$

Hieraus ergiebt sich dann, wenn ϑ seiner Kleinheit wegen vernachlässigt wird,

$$w = n^2\pi^2 . \operatorname{tang} v_0 \cdot \frac{\pi^2 + \lambda^2}{\lambda} \cdot \frac{r''}{t}$$

$$= 1854^2 . \pi^2 . 0{,}05054 \cdot \frac{\pi^2 + 0{,}007944^2}{0{,}007944} \cdot \frac{352{,}71}{3{,}9527},$$

oder

$$w = 1900 . 10^8.$$

Der Unterschied dieses Werthes von dem aus der zweiten Versuchsreihe abgeleiteten ist kleiner, als der, welchen die unvermeidlichen Beobachtungsfehler der letzten Reihe verursachen können.

20.

Vergleichung des Widerstands der Kette in der ersten Versuchsreihe mit dem Widerstande der Kette in der zweiten und dritten Reihe.

Es sind in obigen Versuchsreihen die Widerstände zweier Ketten nach absolutem Maasse gemessen worden, von denen die erstere zusammengesetzt war 1. aus einem Drahte A, welcher zum Multiplikator diente, 2. aus einem Drahte B, welcher zum Erdinduktor diente, 3. aus zwei kurzen, dicken Verbindungsdrähten C. Die letztere Kette bestand dagegen blos aus dem Drahte A, welcher zum Dämpfer gebraucht wurde. Die Vergleichung des Widerstands beider Ketten beruht hauptsächlich auf der Vergleichung des Widerstands A mit dem Widerstande B, da der Widerstand C so gering ist, dass sein Einfluss nach Proportion seiner Länge und seines Querschnitts leicht als Korrektion in Rechnung gebracht werden konnte.

Da die unmittelbare Vergleichung der Widerstände A und B bei ihrer grossen Verschiedenheit zu einem weniger sicheren Resultate geführt haben würde, wurden 3 Hülfsdrähte a, b, c zugezogen, durch welche es möglich wurde, das Verhältniss von $A : B$ blos auf solche Messungen zu gründen, durch welche unmittelbar nur einander nahe gleiche Widerstände verglichen wurden.

Diese Widerstandsvergleichungen wurden sämmtlich nach der in der *Beilage C* beschriebenen und durch ein Beispiel erläuterten Methode ausgeführt, und es genügt daher, in der folgenden Tafel die Resultate zusammenzustellen, ohne in das Detail der Beobachtungen einzugehen. In der ersten Kolumne sind die nach der angegebenen Methode gemachten Widerstandsvergleichungen durch Nummern unterschieden. Die

zweite Kolumne unter X giebt die Bezeichnung des gesuchten Widerstandsverhältnisses, die dritte Kolumne unter q den gefundenen Zahlenwerth. In den beiden letzten Kolumnen sind endlich die Logarithmen von q und $q+1$ beigefügt worden.

No.	X	q	Log q	Log $(q+1)$
1.	$\frac{B}{c}$	1,04354	0,01851	0,31038
2.	$\frac{b}{B+c}$	1,03498		0,30856
3.	$\frac{a}{B+b+c}$	1,00752		0,30266
4.	$\frac{A}{B+a+b+c}$	0,91529	9,96156	
	$\frac{A}{B}$	7,3224	9,94305	0,92160

Nun ist

$$\log\left(\frac{A}{B}\right)=\log\left(\frac{A}{B+a+b+c}\right)$$

$$-\log\frac{B}{c}+\log\left(\frac{B}{c}+1\right)\left(\frac{b}{B+c}+1\right)\left(\frac{a}{B+b+c}+1\right),$$

das heisst, der Unterschied der beiden Logarithmen in der vierten Kolumne (welcher darunter angegeben ist) ist der Summe der drei Logarithmen in der letzten Kolumne (die gleichfalls darunter angegeben ist) hinzuzufügen, um den Logarithmus des gesuchten Verhältnisses A/B zu erhalten, welches hiernach berechnet unter der dritten Kolumne bemerkt ist.

Für C reicht es hin, zu bemerken, dass der Querschnitt 3 Mal grösser, die Länge 30 Mal kleiner war, als bei B; folglich, da beide Drähte von Kupfer waren, das Widerstandsverhältniss

$$\frac{B}{C}=90,$$

woraus endlich zur Vergleichung des Widerstands der in der ersten Versuchsreihe gebrauchten Kette $A+B+C$ mit dem Widerstande der Kette A in den beiden anderen Versuchsreihen folgt:

$$\frac{A+B+C}{A}=1+\frac{1+90}{7,3224\,.\,90}=1,138.$$

Nun ist $A+B+C$ aus der ersten Versuchsreihe nach absolutem Maasse bestimmt worden:

$$A+B+C=2166\,.\,10^8\,\frac{\text{Millimeter}}{\text{Sekunde}}\,.$$

Dividirt man diesen Werth mit obigen Quotienten, so erhält man den Werth von A aus der ersten Versuchsreihe abgeleitet:

$$A = 1903 \,.\, 10^8 \, \frac{\text{Millimeter}}{\text{Sekunde}} \,.$$

21.

Uebersicht der verschiedenen Maassbestimmungen für den Widerstand des Multiplikator- oder Dämpferdrahts A.

I. Aus der ersten Versuchsreihe:

$$A = 1903 \,.\, 10^8 \, \frac{\text{Millimeter}}{\text{Sekunde}} \,.$$

II. Aus der zweiten Versuchsreihe:

$$A = 1898 \,.\, 10^8 \, \frac{\text{Millimeter}}{\text{Sekunde}} \,.$$

III. Aus der dritten Versuchsreihe:

$$A = 1900 \,.\, 10^8 \, \frac{\text{Millimeter}}{\text{Sekunde}} \,.$$

Von diesen drei Maassbestimmungen für denselben Widerstand ist der dritten, wie schon bemerkt worden ist, ein geringeres Gewicht beizulegen, als den beiden ersten. Da sie aber mit den beiden anderen sehr nahe übereinstimmt, so ist kein Grund, sie auszuschliessen, und es ergiebt sich aus allen folgender Mittelwerth:

$$A = 19003 \,.\, 10^7 \, \frac{\text{Millimeter}}{\text{Sekunde}} \,.$$

Die Uebereinstimmung, welche sich hiernach zwischen den beiden nach ganz verschiedenen Methoden erhaltenen Maassbestimmungen für den Widerstand des Drahts A ergiebt, nämlich zwischen der aus der ersten und der aus den beiden letzten Versuchsreihen, hat darum noch besonderes Interesse, weil sie beweist, dass die 1854 Umwindungen, welche dieser Draht im Multiplikator oder Dämpfer bildete, durch die Wolle, womit sie umsponnen waren, hinreichend isolirt wurden. Denn hätte durch die Wolle hindurch eine Leitung von einer Umwindung zur anderen Statt gefunden, so würde dadurch in der ersten Versuchsreihe die Wirkung des Multiplikators auf die Magnetometernadel geschwächt worden sein und die Rechnung würde einen zu grossen Widerstand gegeben haben, wie wenn der durch den ganzen Draht gehende Strom durch einen grösseren Widerstand geschwächt worden wäre. Auf das aus der zweiten Versuchsreihe berechnete Resultat würde dagegen die Leitung durch die Wolle hindurch von einer Windung zur

anderen gar keinen Einfluss gehabt haben; denn es ist bekannt, dass die Dämpfungskraft eines Dämpfers dadurch nicht geändert wird, dass seine Drahtwindungen in leitende Verbindung mit einander gesetzt werden. Wenigstens kann dadurch auf keine Weise die Dämpfungskraft vermindert werden; eine Vergrösserung derselben würde aber, wenn sie irgend merklich gewesen wäre, bewirkt haben, dass die Rechnung den Widerstand zu klein ergeben hätte.

22.

Etalons zu Widerstandsmessungen nach absolutem Maasse.

Hätte der Draht A, dessen Widerstand durch obige Maassbestimmungen nach absolutem Maasse bekannt war, als Widerstands-Etalon aufbewahrt werden können, so würde er selbst dazu haben dienen können, alle Widerstandsmessungen auf absolutes Maass zu reduciren, ohne dass eine Wiederholung der Originalmessung nöthig gewesen wäre, so lange man auf die Unveränderlichkeit des Etalon bauen dürfte. Jener Draht war aber nicht zu diesem Zwecke bestimmt, und es war seine Benutzung zu der vorliegenden Untersuchung nur für kurze Zeit verstattet. Sollte daher der Nutzen, welchen die gewonnenen Resultate auf die Dauer für künftige Maassbestimmungen des Widerstands haben konnten, nicht verloren gehen, so mussten Kopien vom Drahte A gemacht werden, deren gleicher Widerstand verbürgt war, oder Etalons, deren Widerstand mit dem Widerstande A genau verglichen war. Es können nun zunächst zu solchen Etalons die oben angeführten drei Kupferdrähte a, b, c dienen, welche als Hülfsdrähte zur Vergleichung der Widerstände A und B gebraucht worden sind, und deren Widerstandsverhältniss zu A aus den obigen Beobachtungen abgeleitet werden kann. Denn nach den obigen Beobachtungen war

$$\log \frac{B}{c} = 0{,}01851,$$

$$\log \frac{b}{B+c} = 0{,}01493,$$

$$\log \frac{a}{B+b+c} = 0{,}00325.$$

Fügt man nach Obigem noch hinzu:

$$\log \frac{A}{B} = 0{,}86465,$$

$$\log A = 11{,}27882,$$

so ergeben sich hieraus die Widerstände der drei Kupferdrähte a, b, c nach absolutem Maasse, nämlich:

$$a = 10420 \,.\, 10^7 \frac{\text{Millimeter}}{\text{Sekunde}},$$

$$b = 5260 \,.\, 10^7 \frac{\text{Millimeter}}{\text{Sekunde}},$$

$$c = 2487 \,.\, 10^7 \frac{\text{Millimeter}}{\text{Sekunde}}.$$

Diese so bestimmten drei Widerstands-Etalons sind mit der angegebenen Bezeichnung und dem beigefügten Widerstandswerthe in der Instrumentensammlung des physikalischen Instituts der Universität Leipzig niedergelegt worden.

Da nun aber mit dem von JACOBI aufgestellten Widerstands-Etalon schon viele Widerstandsmessungen gemacht und Kopien desselben verbreitet worden sind, so erschien es für praktische Anwendungen am bequemsten, den Werth dieses Etalons nach *absolutem* Maasse zu bestimmen, was sich leicht durch eine Vergleichung des Widerstands dieses Etalons mit dem Widerstande des oben mit c bezeichneten Kupferdrahts erreichen liess. Auch diese Vergleichung wurde nicht unmittelbar ausgeführt, sondern durch einen vierten Kupferdraht d vermittelt.

Es ist S. 317 der Widerstand einer Kopie des JACOBI'schen Etalons J mit dem Widerstande des Originals verglichen worden. Die Vergleichung derselben Kopie mit einer anderen findet man in Beilage *C*. Es ergiebt sich daraus der Widerstand

$$\begin{aligned} \text{der } \textit{ersten} &= 0{,}9815 \,.\, J, \\ \text{der } \textit{zweiten} &= 0{,}9839 \,.\, J, \\ \hline \text{in Summa} &= 1{,}9654 \,.\, J. \end{aligned}$$

Die Vergleichung dieses Widerstands mit dem des Drahts d, nach der *Beilage C* beschriebenen Methode, ergab für d:

$$d = 1{,}1295 \,.\, 1{,}9654 \,.\, J = 2{,}220 \,.\, J.$$

Die Vergleichung dieses letzteren Widerstands nebst dem der beiden Kopien mit dem des Drahts c ergab aber für c

$$c = 0{,}993 \,.\, (2{,}220 + 1{,}9654) \,.\, J = 4{,}156 \,.\, J,$$

folglich, da c nach absolutem Maasse $2487 \,.\, 10^7 \frac{\text{Millimeter}}{\text{Sekunde}}$ ist,

$$J = 598 \,.\, 10^7 \frac{\text{Millimeter}}{\text{Sekunde}} = 807 \frac{\text{Meile}}{\text{Sekunde}}.$$

Herr Inspektor LEYSER in Leipzig hat eine Anzahl Kopien des JACOBI'schen Etalons dargestellt, deren Widerstand nach genauer, von Herrn Dr. QUINTUS ICILIUS ausgeführter Prüfung sowohl in Theilen des JACOBI'schen als des absoluten Maasses angegeben ist.

23.

Ueber NEUMANN'S *Induktions-Konstante und* KIRCHHOFF'S *Bestimmung derselben.*

In POGGENDORFF'S Annalen 1849, Bd. 76, S. 412 ff. ist soeben eine Abhandlung des Herrn Dr. G. KIRCHHOFF in Berlin erschienen: „Bestimmung der Konstanten, von welcher die Intensität inducirter elektrischer Ströme abhängt".

Herr KIRCHHOFF sagt: „Die mathematischen Gesetze der inducirten elektrischen Ströme sind von NEUMANN und WEBER aufgestellt worden; in dem Ausdrucke, den beide für die Intensität eines inducirten Stroms gefunden haben, kommt ausser Grössen, die in jedem gegebenen Falle gemessen werden müssen, eine Konstante vor, die ein für alle Mal durch Versuche ermittelt werden muss, und die NEUMANN durch ε bezeichnet. Diese zu bestimmen habe ich unternommen".

Diese von KIRCHHOFF bestimmte Konstante ε steht nun in einer einfachen Relation zu dem von ihm gebrauchten Widerstandsmaasse und zu dem oben definirten absoluten Widerstandsmaasse, welche auf folgende Weise ausgesprochen werden kann.

Nach den oben festgesetzten Maassen für Stromintensitäten, elektromotorische Kräfte und für Widerstände hat man für die Stromintensität i, welche durch die elektromotorische Kraft e in einem geschlossenen Leiter, dessen Widerstand w ist, hervorgebracht wird, folgende Gleichung:

$$i = \frac{e}{w}\cdot$$

Führt man nun andere Maasse ein, die sich zu jenen absoluten verhalten wie:

$$a:1,$$
$$b:1,$$
$$c:1$$

und bezeichnet mit i', e', w' obige drei nach den neuen Maassen ausgedrückte Grössen, so erhält man

$$ai' = i,\ be' = e,\ cw' = w,$$

folglich

$$ai' = \frac{be'}{cw'}\cdot$$

Eine genauere Prüfung und Vergleichung derjenigen Maasse, welche dem NEUMANN'schen Ausdrucke für die Intensität eines inducirten Stroms und KIRCHHOFF'S Rechnung zum Grunde liegen, mit obigen Maassen ergiebt, wenn Millimeter und Sekunde als Raum- und Zeitmaass der Geschwindigkeitsmessung zum Grunde gelegt werden,

$$a = \sqrt{\tfrac{1}{2}} \text{ und } b = \sqrt{2},$$

und man hat also hiernach

$$i' = \frac{2e'}{cw'},$$

wofür man auch schreiben kann

$$i' = \frac{\frac{2}{c}\, e'}{w'}.$$

Der konstante Koefficient $2/c$, mit welchem in diesem Ausdrucke des inducirten Stroms die elektromotorische Kraft e' multiplicirt ist, ist nun die von NEUMANN und KIRCHHOFF mit ε bezeichnete Konstante. Zugleich ersieht man aus der gegebenen Darstellung, dass $c = 2/\varepsilon$ die Zahl ist, welche angiebt, um wie viel Mal das gewählte Grundmaass des Widerstands grösser ist, als das Art. 10 definirte absolute Widerstandsmaass. Wählt man z. B. ein solches Grundmaass, für welches die Induktions-Konstante $\varepsilon = 1$ ist, so verhält sich dieses Grundmaass zu dem Art. 10 definirten wie 2 : 1. Nun findet KIRCHHOFF aus seinen Beobachtungen: „Es ist die Konstante $\varepsilon = 1$, wenn man als Einheit der Geschwindigkeit die Geschwindigkeit von 1000 Fuss in der Sekunde, als Einheit des Widerstands den Widerstand eines Kupferdrahts von einer Quadratlinie Querschnitt und 0,434 Zoll Länge annimmt". Diesen Angaben liegt das preussische Längenmaass zum Grunde. In Metermaass übersetzt heisst dies: Es ist die Konstante $\varepsilon = 1$, wenn man als Einheit der Geschwindigkeit die Geschwindigkeit von 313853 Millimeter in der Sekunde, als Einheit des Widerstands den Widerstand eines Kupferdrahts von 4,75 Quadratmillimeter Querschnitt und 11,35 Millimeter Länge annimmt.

Es lässt sich nun leicht nachweisen, dass $\varepsilon = 1$ bleibt, so lange als das hier angegebene Verhältniss der beiden Maasse, des Geschwindigkeitsmaasses und des Widerstandsmaasses, unverändert bleibt. Es ist daher die Konstante $\varepsilon = 1$, auch wenn man als Einheit der Geschwindigkeit die Geschwindigkeit von 1 Millimeter in der Sekunde, als Einheit des Widerstands den Widerstand eines Kupferdrahts von 4,75 . 313853 Quadratmillimeter Querschnitt und 11,35 Millimeter Länge wählt.

Da nun dann für $\varepsilon = 1$, $c = 2$ ist, so ergiebt sich, dass dieses Maass des Widerstands 2 Mal grösser ist, als das Art. 10 definirte absolute Maass des Widerstands.

Aus KIRCHHOFF's Beobachtungen ergiebt sich also nach der angegebenen Reduktion das Art. 10 definirte Maass des absoluten Widerstands gleich dem Widerstande eines Kupferdrahts von 4,75 . 313853 Quadratmillimeter Querschnitt und 5,675 Millimeter Länge, oder von 262752 Quadratmillimeter Querschnitt bei 1 Millimeter Länge.

Aus den in dieser Abhandlung mitgetheilten Beobachtungen hat sich dagegen nach Art. 22 ergeben, dass der Jacobi'sche Kupferdraht bei $0{,}3335^2 . \pi$ Quadratmillimeter Querschnitt und 7619,75 Millimeter Länge einen $598 . 10^7$ Mal grösseren Widerstand besass, als das Artikel 10 definirte absolute Widerstandsmaass, und dass folglich von diesem Kupfer der Widerstand eines Kupferdrahts von $0{,}3335^2 . 598 . 10^7 . \pi$ Quadratmillimeter Querschnitt und 7619,75 Millimeter Länge oder der Widerstand eines Kupferdrahts von 274250 Quadratmillimeter Querschnitt bei 1 Millimeter Länge dem Widerstandsmaasse gleich sei.

Die Uebereinstimmung dieser beiden auf ganz verschiedenen Wegen erhaltenen Angaben kann nicht grösser erwartet werden, wenn man beachtet, dass die Drähte von Jacobi und von Kirchhoff von verschiedenem Kupfer gemacht waren, und dass in der Leitungsfähigkeit oder in dem Widerstandskoefficienten des Kupfers oft noch weit grössere Differenzen vorkommen. Setzt man die Differenz der beiden Angaben blos auf die Rechnung der Verschiedenheit des Kupfers, so ergiebt sich, dass das von Jacobi gebrauchte Kupfer eine etwas geringere Leitungsfähigkeit oder einen etwas grösseren Widerstandskoefficienten besass, als das von Kirchhoff gebrauchte. Auch ich habe den Widerstandskoefficienten des von mir gebrauchten Kupfers kleiner, als den des von Jacobi gebrauchten gefunden, und der Unterschied war sogar noch beträchtlich grösser, als bei dem von Kirchhoff gebrauchten Kupfer. Eine unmittelbare Vergleichung des Widerstands des Kirchhoff'schen Drahts mit dem Jacobi'schen Grundmaasse würde daher von besonderem Interesse sein zur genaueren Vergleichung der Resultate beider Messungen.

III.

Beispiele der Anwendung des absoluten Widerstandsmaasses.

24.

Anwendung des Widerstandsmaasses zur Messung galvanischer Ströme bei technischer Benutzung derselben.

Für die technischen Anwendungen des Galvanismus, z. B. zu chemischen Zwecken und zur Galvanoplastik, fehlt es oft an einfachen und allgemein verständlichen Vorschriften. Jeder Techniker ist daher genöthigt, durch eigene Versuche die Verhältnisse zu erproben, welche günstige Resultate geben. Der dadurch verursachte Zeit- und Kostenaufwand erschwert diese Anwendungen des Galvanismus besonders bei grösseren Unternehmungen. Solche Vorschriften fehlen aber nicht sowohl darum, weil noch keine genügenden Erfahrungen gemacht wären,

als vielmehr, weil die Resultate der gemachten Erfahrungen sich nicht einfach und bestimmt aussprechen lassen; denn blosse Beschreibungen des Verfahrens genügen dazu nicht. Nur durch galvanische Maassbestimmungen ist es möglich, die Resultate der gemachten Erfahrungen mit wenigen Worten und Zahlen allgemein verständlich darzulegen und bestimmte und genaue Vorschriften zum künftigen Gebrauche zu geben, und ebenso nothwendig sind die galvanischen Maassbestimmungen in der Anwendung, um sich der Erfüllung der vorgeschriebenen Regeln zu versichern.

Es handelt sich dabei um die Wirksamkeit des galvanischen Stroms, die aber nach Verschiedenheit der Umstände sehr *verschieden* zu bemessen ist. Oft ist es die blosse *Stromintensität*, um welche es sich handelt, z. B. bei galvanoplastischen Niederschlägen. Oft ist aber die Stromintensität nur der eine Faktor der fraglichen Wirksamkeit, deren anderer Faktor *die Länge des Leiters* ist, welcher diesen Strom führt, z. B. wenn der Leiter um einen Eisenstab geht, welcher in einen Elektromagnet verwandelt werden soll. Endlich kommt auch der Fall vor, dass von dieser Länge des Leiters, durch welchen der Strom geführt wird, jeder Theil mit einem *besonderen Werthe* für die fragliche Wirksamkeit in Betracht zu ziehen ist, z. B. bei einem Multiplikator, dessen verschiedene Windungen eine verschieden günstige Lage gegen die Magnetnadel haben.

Der einfachste und für die technische Anwendung wichtigste Fall ist der erste, wo die fragliche Wirksamkeit blos von der *Stromintensität* abhängt. Die Errichtung galvanischer Werkstätten und die mannigfaltigen darin auszuführenden Arbeiten würden sehr erleichtert und gefördert werden, wenn die für jeden Zweck günstigste Stromintensität genau ermittelt und bequeme Mittel an die Hand gegeben würden, zur Prüfung, ob bei der Ausführung diese Stromintensität Statt finde.

Was die Erforschung und genaue Bestimmung der günstigsten Stromintensitäten betrifft, so bietet das von Faraday zu diesem Zwecke angegebene *Voltameter*, wo die durch die Zersetzung des Wassers in einer bestimmten Zeit erzeugte Menge Gas diese Intensität anzeigt, ein sehr einfaches Mittel dazu dar, dessen Gebrauch daher nicht genug empfohlen werden kann. Nur ist dasselbe bei *schwachen* Strömen, wo die Wasserzersetzung sehr langsam geschieht, nicht anwendbar. Ausserdem würde das Voltameter in der gewöhnlichen Praxis, wenn es zur Prüfung der vorschriftsmässigen Stromintensität fortwährend gebraucht werden sollte, nicht immer bequem sein, weil die Zeit als ein wesentliches Element dabei gemessen werden muss. Endlich muss das Voltameter fortwährend in der Kette eingeschaltet bleiben, weil die Stromintensität bei Wegnahme desselben nicht mehr die gemessene bleibt,

sondern viel stärker wird. Die mit der Einschaltung verbundene Schwächung des Stroms kann aber in manchen Fällen sehr unvortheilhaft sein. In allen Fällen, wo aus den angeführten Gründen der Gebrauch des Voltameters nicht praktisch ist, kann dessen Stelle durch eine *Tangenten-Boussole* ersetzt werden, die in den „*Resultaten aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins im Jahre 1840*" S. 85 f.[1]) beschrieben und deren Gebrauch zu Intensitätsmessungen daselbst durch Beispiele erläutert worden ist. Es sind dort auch die Angaben der Tangenten-Boussole auf Angaben des Voltameters zurückgeführt und beide unter einander vergleichbar gemacht worden. Jede Einheit der nach dieser Vorschrift mit der Tangenten-Boussole gemessenen Stromintensität zersetzt in 1 Sekunde 0,009376 oder in 1 Minute $46\frac{2}{3}$ Sekunde 1 Milligramm Wasser im Voltameter (etwa 1 Gran in $\frac{1}{2}$ Stunde). Zum Gebrauche der Tangenten-Boussole ist keine Uhr nöthig und die Einschaltung oder Ausschliessung des Instruments aus der Kette hat auf die Stromintensität keinen merklichen Einfluss.

Ein drittes praktisches Hülfsmittel zur Bestimmung der *Stromintensität* bietet endlich die *Widerstandsmessung* dar. Die Stromintensität hängt von zweierlei ab, von der *elektromotorischen Kraft* und von dem *Widerstande* der Kette, wovon bei technischem Gebrauche in der Regel nur die Veränderlichkeit des letzteren in Betracht kommt. Denn in der Regel wird bei technischen Anstalten immer die nämliche Gattung von Bechern gebraucht, deren elektromotorische Kraft mit einer für praktische Zwecke genügenden Schärfe ein für alle Mal bestimmt sein kann. Der von diesen Bechern ausgehende Strom wird dagegen bald durch mehr, bald durch weniger Gefässe und durch verschiedene Flüssigkeiten geleitet, wodurch der Widerstand sich sehr ändert.

Setzt man die Kenntniss der elektromotorischen Kraft E voraus, und kommt es also nur noch auf die Messung des Widerstands an, so kann jedes *beliebige Galvanometer* zur Bestimmung der Stromintensität gebraucht werden, wenn man sich dabei eines nach absolutem Maasse bekannten *Widerstands-Etalons* w bedient. Denn bezeichnet a die Angabe des Galvanometers, wenn dieser Etalon von der Kette ausgeschlossen ist, und b, wenn derselbe eingeschaltet wird, so ist dadurch der Widerstand der Kette nach absolutem Maasse W bestimmt, nämlich:

$$W = \frac{bw}{a-b},$$

und die Stromintensität ergiebt sich dann einfach:

$$\frac{E}{W} = \frac{a-b}{bw} \cdot E.$$

[1]) [WILHELM WEBER's Werke, Bd. III, p. 8.]

25.
Anwendung des Widerstandsmaasses zur Messung elektromotorischer Kräfte nach absolutem Maasse.

Die letzte Bemerkung im vorigen Artikel führt zu einer weiteren Anwendung, welche man von einem nach absolutem Maasse bekannten *Widerstands-Etalon* machen kann. Denn aus dem Gesagten folgt, dass, wenn man sich statt eines beliebigen Galvanometers einer Tangenten-Boussole oder Voltameters, oder irgend eines anderen Instruments, bedient, mit welchem man die Stromintensität nach *absolutem* Maasse bestimmen kann, auf dem angegebenen Wege die elektromotorische Kraft E selbst nach *absolutem* Maasse gefunden werde, wenn sie noch unbekannt ist. Denn bezeichnet man die nach absolutem Maasse gemessene Stromintensität mit α, wenn der Widerstands-Etalon aus der Kette ausgeschlossen ist, mit β, wenn er eingeschaltet wird, so ergiebt sich eben so, wie vorher, der Widerstand W der Kette nach absolutem Maasse:

$$W = \frac{\beta w}{\alpha - \beta}$$

und daraus die elektromotorische Kraft E nach absolutem Maasse:

$$E = \alpha W = \frac{\alpha \beta w}{\alpha - \beta}.$$

Man ersieht daraus zum Beispiel, wie die elektromotorischen Kräfte *galvanischer Becher* auf diese Weise nach demselben absoluten Maasse bestimmt werden können, wie die elektromotorischen Kräfte, welche der *Erdmagnetismus* auf geschlossene Ketten, während sie bewegt werden, ausübt. Es ist aber wichtig, elektromotorische Kräfte, welche aus so verschiedenen Quellen entspringen, wie die hydroelektrischen und magnetoelektrischen Kräfte, nach gleichem Maasse zu messen, weil dadurch der Weg zur komparativen Erforschung dieser Quellen selbst gebahnt wird. Es ist das bei Anwendung eines Leiters von bekanntem absoluten Widerstande leicht und einfach, ohne einen solchen Leiter aber mit grossen Schwierigkeiten verbunden, wie zum Beispiel, wenn die Vergleichung auf folgende Weise geschehen sollte.

Der galvanische Becher, dessen elektromotorische Kraft, ohne einen Leiter von bekanntem absoluten Widerstande anzuwenden, mit einer magnetoelektrischen Kraft verglichen werden soll, sei durch einen Leiter von beliebiger Länge und Gestalt geschlossen und sammt demselben drehbar. Bei der Drehung entsteht dann ein zweiter Strom in der Kette, nämlich ausser dem Strome, welcher von der elektromotorischen Kraft des Bechers selbst entspringt, noch ein anderer Strom, welcher

von der elektromotorischen Kraft des Erdmagnetismus herrührt. Man hat es in seiner Gewalt, durch die *Richtung* der Drehung zu bewirken, dass die Richtung beider Ströme in der Kette entgegengesetzt sei. Durch die *Geschwindigkeit* der Drehung kann man andererseits die Intensität beider Ströme wenigstens für einen kleinen Zeitraum gleich machen, wo sich dann beide Ströme für diesen Zeitraum annulliren. Sind aber die Intensitäten beider Ströme gleich, so folgt daraus für diesen Fall die Gleichheit der elektromotorischen Kräfte, d. h. die Gleichheit der elektromotorischen Kraft des *Bechers* mit der elektromotorischen Kraft des *Erdmagnetismus*. Die letztere ist durch den bekannten Werth des Erdmagnetismus und durch die Form und Drehung der geschlossenen Kette nach absolutem Maasse unmittelbar gegeben; folglich wird dadurch zugleich auch die elektromotorische Kraft des *Bechers* nach demselben Maasse gefunden. Es leuchtet aber von selbst ein, dass die Vergleichung dieser Kräfte auf die oben angegebene Weise mit Hülfe des absoluten Widerstandsmaasses viel einfacher und leichter erhalten wird.

IV.

Ueber die Principien verschiedener absoluter Maasssysteme in der Elektrodynamik.

26.

Selbstständige Begründung der absoluten Maasse in der Elektrodynamik, ohne auf die magnetischen Maasse Bezug zu nehmen.

Wie für die Grösse der Geschwindigkeiten kein eigenes *Grundmaass* aufgestellt zu werden braucht, wenn solche Maasse für Raum und Zeit schon gegeben sind, eben so braucht, wie wir gesehen haben, für die Grösse der galvanischen Widerstände kein eigenes *Grundmaass* aufgestellt zu werden, wenn schon Maasse für die Grösse der elektromotorischen Kräfte und der Stromintensitäten gegeben sind. Aber auch für die beiden letzteren Grössenarten brauchen keine eigenen *Grundmaasse* angenommen zu werden, sondern es können auch dafür *absolute* Maasse gegeben werden, welche nach den Art. 10 gegebenen Definitionen *durch Vermittelung der magnetischen* Maasse auf die *drei Grundmaasse der Mechanik* zurückgeführt worden sind.

Für die meisten elektrodynamischen Messungen ist es nun zwar genügend und bequem, die Maasse für die elektrodynamischen Grössen auf die festgestellten *magnetischen Maasse* so zu reduciren, wie es Art. 10 geschehen ist. Die Abhängigkeit, in welche hierdurch die

elektrodynamischen Maasse von den magnetischen gebracht werden, ist aber in der Sache selbst keineswegs begründet, wie aus der Unabhängigkeit der elektrodynamischen Grundgesetze von den magnetischen von selbst einleuchtet. Die elektrodynamischen Maasse lassen sich vielmehr noch auf andere Weise begründen, wodurch sie von der Begründung der magnetischen Maasse ganz unabhängig werden. Es ist dazu blos nöthig, statt von den Grundgesetzen des *Elektromagnetismus* und der *Magneto-Elektricität* auszugehen, wie es Art. 10 geschehen ist, auf die Grundgesetze der *Elektrodynamik* und *Volta-Induktion* zurückzugehen.

Das Grundgesetz der *Elektrodynamik* giebt folgende Formel für die Grösse der *Abstossungskraft* zweier Stromelemente a, a' mit den Stromintensitäten i, i' aus der Entfernung r, welche mit den beiden Stromrichtungen die Winkel ϑ, ϑ' macht, während der Winkel der beiden Stromrichtungen $= \varepsilon$ ist, nämlich:

$$-\frac{aa'}{r^2}\, ii' \left(\cos\varepsilon - \tfrac{3}{2}\cos\vartheta\cos\vartheta'\right).$$

Das Grundgesetz der *Volta-Induktion*, wie es Art. 30 der ersten Abhandlung über „*Elektrodynamische Maassbestimmungen*“ angegeben worden ist, giebt folgende Formel für die von einem Stromelemente a mit der Stromintensität i auf ein anderes Element a' aus der Entfernung r ausgeübte elektromotorische Kraft, wenn r mit der Stromrichtung und mit der Richtung, nach welcher a' mit der Geschwindigkeit v verschoben wird, die Winkel ϑ und ϑ' macht, die beiden letzteren Richtungen gegen einander den Winkel ε:

$$-\frac{aa'}{r^2}\, vi \left(\cos\varepsilon - \tfrac{3}{2}\cos\vartheta\cos\vartheta'\right) - \frac{1}{2}\,\frac{aa'}{r}\cos\vartheta\cdot\frac{di}{dt}\cdot$$

Diese nach der Richtung r wirkende Kraft ist nach der Richtung von a' zu zerlegen, weil die gegen a' senkrechte Komponente aufgehoben wird. Bezeichnet η den Winkel, welchen a' mit r macht, so ist obige Formel also mit $\cos\eta$ zu multipliciren.

Auf diese Grundgesetze lässt sich nun *erstens* ein absolutes Maass der *Stromintensität*, unabhängig von den magnetischen Maassen, auf folgende Weise begründen:

> Das Maass der Stromintensität ist diejenige Stromintensität, welche ein Strom besitzt, der — indem er eine dem Flächenmaasse gleiche Ebene umläuft und auf einen gleichen Strom, der eine eben solche Ebene umläuft, aus einer grossen Entfernung R wirkt, und bei rechtwinkeliger Lage beider Ebenen, bei welcher die verlängerte erste Ebene die zweite halbirt — auf den letzteren Strom ein Drehungsmoment ausübt, welches sich zur Einheit des Drehungsmoments wie $1 : 2R^3$ verhält.

Dieses neue *absolute* Maass der Stromintensität lässt sich noch einfacher definiren, wenn dabei gestattet wird, statt auf die Wechselwirkung geschlossener Ströme auf die Wechselwirkung einzelner Stromelemente zurückzugehen, welche sich nicht unmittelbar beobachten lässt, weil solche Stromelemente nur als Theile geschlossener Ströme vorkommen, nämlich:

> Das Maass der Stromintensität ist diejenige Stromintensität, welche ein Stromelement besitzt, wenn es auf ein gleiches, paralleles und auf der Verbindungslinie senkrechtes Stromelement aus einer dem Längenmaasse gleichen Entfernung eine Anziehungskraft ausübt, welche sich zum Kraftmaasse verhält, wie das Quadrat der Länge jener Stromelemente zum Flächenmaasse.

Dieses zweite *absolute* Maass der Stromintensität ist dem ersten, von den magnetischen Maassen abhängigen, nicht gleich, sondern verhält sich dazu wie $1 : \sqrt{2}$.[1])

[1]) Die Ableitung der oben aufgestellten Definitionen aus dem Grundgesetze der Elektrodynamik ist folgende. *Erste Definition.* Es ist schon Art. 9 der früheren Abhandlung *„Elektrodynamische Maassbestimmungen"*, Leipzig 1846 [Wilhelm Weber's Werke, Bd. III, p. 86] angegeben worden, wie aus dem Grundgesetze der Elektrodynamik folgender Ausdruck des von einem Planstrome auf einen anderen in der Ferne ausgeübten *Drehungsmoments* hergeleitet werde, nämlich:

$$\frac{1}{2}\frac{ii'\lambda\lambda'}{r^3}\sin\delta\,.\,\sqrt{1+3\cos\psi^2},$$

wo i, i' die Stromintensitäten, λ, λ' die umströmten Ebenen, r den Abstand ihrer Mittelpunkte, ψ den Winkel der Normale des ersten Planstroms mit r, δ den Winkel bezeichnet, welchen die Normale des zweiten Planstroms mit der *Direktionskraft* einschliesst. Die Direktionskraft aber ist in der durch die Normale des ersten Planstroms A und durch den Mittelpunkt des zweiten Planstroms C gelegten Ebene enthalten und ist in dem bei C rechtwinkeligen Dreiecke ACB, dessen Hypotenuse AB die Normale des Planstroms A ist, derjenigen Linie CD parallel, welche die Dreieckseite AB in D so schneidet, dass $AD : DB = 1 : 2$. — Unter den in der ersten Definition bezeichneten Verhältnissen ist nun $i = i'$, $\lambda = \lambda' = 1$, $\delta = \psi = \pi/2$, $r = R$, wonach das *Drehungsmoment* den Werth

$$\frac{i^2}{2R^3}$$

erhält, welcher zur *Einheit* des Drehungsmoments sich verhält wie $1 : 2R^3$, wenn $i = 1$ ist.

Zweite Definition. In dem durch das Grundgesetz der Elektrodynamik unmittelbar gegebenen Ausdrucke der *Anziehungskraft* zweier Stromelemente

$$\frac{aa'}{r^2}\,ii'\,(\cos\varepsilon - \tfrac{3}{2}\cos\vartheta\cos\vartheta')$$

ist für die in der Definition bezeichneten Verhältnisse $i = i'$, $a = a'$, $\vartheta = \vartheta' = \pi/2$, $\varepsilon = 0$, $r = 1$, wodurch die *Anziehungskraft* den Werth

$$a^2 i^2$$

erhält, welcher sich zum *Kraftmaasse* verhält, wie $a^2 : 1$, wenn $i = 1$ ist.

Zweitens, das Maass der *elektromotorischen Kraft* wird auf folgende Weise auf das angeführte Grundgesetz der Volta-Induktion, unabhängig von den magnetischen Maassen, begründet.

> Das Maass der elektromotorischen Kraft ist diejenige elektromotorische Kraft, welche ein Strom, der eine dem Flächenmaasse gleiche Ebene umläuft, auf einen eine gleiche, auf jene senkrechte und von ihr halbirte, Ebene begrenzenden Leiter aus der grossen Entfernung R ausübt, wenn seine Intensität zu dem aufgestellten *absoluten* Maasse sich verhält, wie $2R^3 : 1$, während der Leiter mit der Einheit der Drehungsgeschwindigkeit um die Durchschnittslinie beider Ebenen gedreht wird.

Wird es gestattet, auf die elektromotorische Kraft einzelner Stromelemente zurückzugehen, so lässt sich diese Definition einfacher auf folgende Weise fassen:

Es ist noch übrig, nachzuweisen, dass das zweite hier aufgestellte *absolute* Maass der Stromintensität zu dem ersten, von dem magnetischen Maasse abhängigen, sich verhalte, wie $1 : \sqrt{2}$. — Es ist schon in Art. 9 a. a. O., bekannten Gesetzen gemäss, der Ausdruck des von einem Magnet m auf einen anderen m' in der Ferne r ausgeübten *Drehungsmoments* angegeben worden, nämlich:

$$\frac{mm'}{r^3} \sin \delta . \sqrt{1 + 3 \cos \psi^2},$$

wo ψ und δ die angeführte Bedeutung haben, wenn man darin die Normalen der beiden Planströme mit den Axen der beiden Magnete vertauscht. Bezeichnet man nun, zur Unterscheidung der beiden Maasse der Stromintensität, mit K das erste, von den magnetischen Maassen abhängige, mit J das zweite, so seien kK und $k'K$ zwei bestimmte, nach dem ersteren Maasse ausgedrückte, Stromintentäten, und iJ und $i'J$ seien die nämlichen Stromintensitäten, nach dem zweiten Maasse ausgedrückt, folglich:

$$iJ = kK \text{ und } i'J = k'K.$$

Dem Grundgesetze des Elektromagnetismus gemäss bleibt dann obiges *Drehungsmoment* unverändert, wenn man für den Magnet m den Strom kK setzt, welcher eine Ebene $\lambda = m/k$ umläuft. Setzt man auf gleiche Weise für den Magnet m' den Strom $k'K$, welcher eine Ebene $\lambda' = m'/k'$ umläuft, so erhält man das von dem ersten Planstrome auf den zweiten ausgeübte *Drehungsmoment*,

$$\frac{kk'\lambda\lambda'}{r^3} \sin \delta . \sqrt{1 + 3 \cos \psi^2}.$$

Für dieses Drehungsmoment ist oben aber folgender Werth gefunden worden:

$$\frac{1}{2} \frac{ii'\lambda\lambda'}{r^3} \sin \delta . \sqrt{1 + 3 \cos \psi^2},$$

woraus $\frac{1}{2} ii' = kk'$ folgt, d. i., wenn $k = k'$, $i = i'$,

$$i = k\sqrt{2}.$$

Hiernach ergiebt sich aus der Gleichung $iJ = kK$

$$J : K = 1 : \sqrt{2}.$$

Das Maass der elektromotorischen Kraft ist diejenige elektromotorische Kraft, welche ein Stromelement auf ein gleich langes, darauf senkrechtes, der Verbindungslinie paralleles Leiter-Element aus einer dem Längenmaasse gleichen Entfernung ausübt, wenn seine Intensität zu dem aufgestellten absoluten Maasse sich verhält, wie das *Flächenmaass* zum *Quadrat der Länge* jener Elemente, während das Leiter-Element mit der Einheit der Geschwindigkeit der Stromrichtung entgegengesetzt parallel verschoben wird.[1])

[1]) Um die erste dieser beiden neuen Definitionen eines *absoluten* Maasses der elektromotorischen Kraft aus dem allgemeinen Gesetze der Volta-Induktion abzuleiten, beachte man zunächst, dass der inducirende Strom i in dieser Definition konstant genommen ist, also $\mathrm{d}i/\mathrm{d}t = 0$, wodurch der allgemeine Ausdruck der nach der Richtung r wirksamen elektromotorischen Kraft auf folgenden reducirt wird:

$$-\frac{\alpha\alpha'}{r^2}\, vi\,(\cos\varepsilon - \tfrac{3}{2}\cos\vartheta\cos\vartheta').$$

Wie nun aber aus dem ähnlichen Ausdrucke der Abstossungskraft zweier Stromelemente

$$-\frac{\alpha\alpha'}{r^2}\, ii'\,(\cos\varepsilon - \tfrac{3}{2}\cos\vartheta\cos\vartheta')$$

sich die Richtung und die Grösse der Kraft ergeben hat, welche ein Strom i, welcher die Ebene λ umläuft, auf das Stromelement α' ausübt, nämlich *erstens* die Richtung als senkrecht gegen die durch die Stromrichtung i' und die *Direktionskraft* gelegte Ebene (die Direktionskraft ist in der durch die Normale des inducirenden Planstroms A und durch den Mittelpunkt des inducirten Elements C gelegten Ebene enthalten, und ist in dem bei C rechtwinkeligen Dreiecke ACB, dessen Hypotenuse AB die Normale des Planstroms A ist, derjenigen Linie CD parallel, welche die Dreieckseite AB in D so schneidet, dass $AD : DB = 1 : 2$); *zweitens* die Grösse der Kraft

$$= \frac{1}{2}\frac{\lambda\alpha'}{r^3}\, ii' \sin\delta \,.\, \sqrt{1 + 3\cos\psi^2},$$

wo ψ den Winkel der Normale des Planstroms mit r, δ den Winkel bezeichnet, welchen die Stromrichtung in α' mit der Direktionskraft macht —; auf ähnliche Weise ergiebt sich auch aus dem vorhergehenden Ausdrucke der elektromotorischen Kraft, welche ein Stromelement auf ein Leiter-Element nach Richtung der sie verbindenden Geraden ausübt, die Richtung und die Grösse der elektromotorischen Kraft, welche der ganze, die Ebene λ umlaufende, Strom i auf das Leiter-Element α' ausübt, nämlich *erstens* die Richtung senkrecht gegen die durch die Bahn, in welcher α' verschoben wird, und durch die Richtung der *Direktionskraft* gelegte Ebene, *zweitens* die Grösse

$$= \frac{1}{2}\frac{\lambda\alpha'}{r^3}\, vi \sin\delta \,.\, \sqrt{1 + 3\cos\psi^2},$$

wo ψ den Winkel der Normale des Planstroms mit r, δ den Winkel bezeichnet, welchen die Richtung, nach welcher α' verschoben wird, mit der Direktionskraft macht. (S. Art. 9 a. a. O. S. 264 in der Note [Wilhelm Weber's Werke, Bd. III, p. 86], wobei zu bemerken ist, dass dort ε die nämliche Bedeutung hat, wie hier δ, dass aber in der Formel für die Kraft, welche ein Planstrom auf das bewegte Element eines Leiters ausübt, der von der Richtung der Bewegung dieses Elements abhängige Faktor $\sin\varepsilon$ aus Versehen weggelassen worden ist.)

Dieses zweite *absolute* Maass der elektromotorischen Kraft ist dem ersten, von den magnetischen Maassen abhängigen, nicht gleich, sondern verhält sich dazu, wie $\sqrt{2} : 1$.

Gehört nun ferner auch das Leiter-Element α' der Begrenzung einer Ebene λ' an, deren Normale der Richtung, nach welcher die Leiter-Elemente (in Folge einer Drehung des Leiters um eine seine Ebene halbirende Axe) verschoben werden, parallel ist und also mit der *Direktionskraft* den Winkel δ macht: so zerlege man jedes Element α' der Begrenzungslinie in zwei Elemente ds und $d\sigma$, das eine parallel der Linie, in welcher eine auf die Direktionskraft CD normale Ebene die Ebene des Leiters schneidet, das andere senkrecht auf dieser Schneidungslinie. Die ersteren Elemente kann man paarweise von gleicher Länge $ds = ds'$ ordnen und durch Perpendikel x auf jener Schneidungslinie verbinden. Bezeichnet man mit a, b, c die Abstände der Elemente ds und ds' und des Durchschnittspunkts des Perpendikels x mit der Drehungsaxe von jener Schneidungslinie, und ferner mit γ die Drehungsgeschwindigkeit und mit δ' den Winkel der die Ebene des Leiters halbirenden Drehungsaxe mit jener Schneidungslinie, so ist, wenn v und v' die Geschwindigkeiten bezeichnen, mit welcher die Elemente ds und ds' verschoben werden,

$$a - b = x,$$
$$(a - c)\gamma \cos\delta' = v,$$
$$(b - c)\gamma \cos\delta' = v'.$$

Beachtet man ferner, dass die oben angegebene Richtung der elektromotorischen Kraft mit dem einen Elemente ds direkt parallel, mit dem anderen ds' entgegengesetzt parallel ist, und dass die Länge $ds = ds'$, so erhält man die nach der Richtung beider Elemente zerlegten elektromotorischen Kräfte:

$$+\frac{1}{2}\frac{\lambda i}{r^3}\sin\delta \, . \sqrt{1 + 3\cos\psi^2} \, . \, \gamma\cos\delta' \, . \, (a - c)\, ds,$$

$$-\frac{1}{2}\frac{\lambda i}{r^3}\sin\delta \, . \sqrt{1 + 3\cos\psi^2} \, . \, \gamma\cos\delta' \, . \, (b - c)\, ds;$$

folglich ihre Summe:

$$+\frac{1}{2}\frac{\lambda i}{r^3} \cdot \gamma\cos\delta' \sin\delta \, . \sqrt{1 + 3\cos\psi^2} \, . \, x\, ds.$$

Hieraus folgt endlich die Summe aller auf die mit obiger Schneidungslinie parallelen Elemente des geschlossenen Leiters ausgeübten elektromotorischen Kräfte nach der Richtung des Leiters zerlegt:

$$+\frac{1}{2}\frac{\lambda i}{r^3} \cdot \gamma\cos\delta' \sin\delta \, . \sqrt{1 + 3\cos\psi^2} \, . \int x\, ds,$$

das heisst, da das Integral $\int x\, ds$ die Grösse der begrenzten Ebene λ' bezeichnet,

$$+\frac{1}{2}\frac{\lambda\lambda'}{r^3} i\gamma\cos\delta' \sin\delta \, . \sqrt{1 + 3\cos\psi^2}.$$

Betrachtet man auf ähnliche Weise die auf alle gegen obige Schneidungslinie senkrechten Elemente $d\sigma$ wirkenden, nach deren Richtung zerlegten elektromotorischen Kräfte, so findet man ihre Summe $= 0$; folglich ist die obige Formel der Ausdruck der *ganzen* elektromotorischen Kraft, welche der Planstrom auf den geschlossenen Leiter ausübt.

Wendet man nun diesen Ausdruck auf die in der ersten Definition bezeichneten

Drittens leuchtet von selbst ein, dass nun auch die Begründung des dritten elektrodynamischen Maasses, nämlich des *Widerstands*, unabhängig von den magnetischen Maassen gemacht wird, wenn in der

Verhältnisse an, wo nämlich $i = i'$, $\lambda = 1$, $r = R$, $\gamma = 1$, $\delta = 0$, $\varepsilon = \psi = \pi/2$ ist, so ergiebt sich der Werth der elektromotorischen Kraft

$$\frac{i}{2R^3},$$

d. i. $= 1$, wenn $i = 2R^3$ ist.

Zweite Definition. Der oben angeführte allgemeine Ausdruck der elektromotorischen Kraft eines Stromelements auf ein Leiterelement:

$$-\frac{aa'}{r^2}\,vi\,(\cos\varepsilon - \tfrac{3}{2}\cos\vartheta\cos\vartheta')\cos\eta - \frac{1}{2}\,\frac{aa'}{r}\cos\vartheta\cos\eta\cdot\frac{di}{dt}$$

reducirt sich in der Anwendung auf die in der zweiten Definition des *absoluten* Maasses der elektromotorischen Kraft bezeichneten Verhältnisse, wo $a = a'$, $\varepsilon = \eta = 0$, $\vartheta = \vartheta' = \pi/2$, $r = 1$, $v = -1$, $di/dt = 0$, auf den Werth:

$$a^2 i,$$

d. i. auf die *Einheit*, wenn die Intensität des inducirenden Stroms i zum festgesetzten Maasse der Intensität sich verhält, wie $1 : a^2$.

Das Verhältniss endlich dieses zweiten hier aufgestellten absoluten *Maasses* der elektromotorischen Kraft zu dem ersten, von den magnetischen Maassen abhängigen, ergiebt sich, wie folgt. Setzt man in dem in voriger Note angeführten Ausdruck des *Drehungsmoments*, welches ein Magnet m auf einen anderen m' in der Ferne r ausübt, nämlich:

$$\frac{mm'}{r^3}\sin\delta\,.\sqrt{1+3\cos\psi^2},$$

für den Magnet m' einen Strom $k'K$, welcher die Ebene $\lambda' = m'/k'$ umläuft, so erhält man das auf diesen Strom vom Magnet m ausgeübte Drehungsmoment

$$\frac{m\lambda'}{r^3}k'\sin\delta\,.\sqrt{1+3\cos\psi^2}$$

und hieraus nach den bekannten Relationen, welche zwischen den elektromagnetischen und den magnetoelektrischen Gesetzen Statt finden, und die man am Ende dieser Abhandlung in *Beilage D* näher erörtert findet, die elektromotorische Kraft, welche der Magnet m auf den geschlossenen Stromleiter ausübt, indem derselbe mit der Einheit der Geschwindigkeit in der jenem Drehungsmomente entgegengesetzten Richtung gedreht wird, wenn $k' = 1$ gesetzt wird, nämlich:

$$\frac{m\lambda'}{r^3}\sin\delta\,.\sqrt{1+3\cos\psi^2}.$$

Setzt man hierin endlich auch für den Magnet m einen Strom kK, welcher die Ebene $\lambda = m/k$ durchläuft, so erhält man die elektromotorische Kraft, welche dieser Strom auf jenen geschlossenen Stromleiter ausübt, bei der beschriebenen Drehung desselben,

$$\frac{\lambda\lambda'}{r^3}k\sin\delta\,.\sqrt{1+3\cos\psi^2}$$

nach dem *ersten Maasse* ausgedrückt, die nach dem *zweiten Maasse* ausgedrückt

$$\frac{1}{2}\,\frac{\lambda\lambda'}{r^3}\,i\gamma\cos\delta'\sin\delta\,.\sqrt{1+3\cos\psi^2}$$

war, d. i.

Art. 10 gegebenen Definition die von den magnetischen Maassen abhängigen *absoluten* Maasse der Stromintensität und der elektromotorischen Kraft mit den neuen, davon unabhängigen Maassen vertauscht werden, wobei übrigens die Definition ganz unverändert bleibt. Es ergiebt sich dann aus den angegebenen Verhältnissen dieser neuen Maasse zu den alten, dass das neue *absolute* Maass des Widerstands zu dem Art. 10 definirten sich verhält, wie 2 : 1.

27.

Ueber das Verhältniss der absoluten Maasse in der Elektrodynamik zu denen in der Mechanik.

Eine *elektromotorische* Kraft ist jede Kraft, welche die beiden elektrischen Fluida an einem Orte nach entgegengesetzten Richtungen zu bewegen sucht. Solche Kräfte sind nun aber alle nach dem Grundgesetze der *Elektrostatik* bestimmten Kräfte; denn alle diese Kräfte sind Anziehungs- und Abstossungskräfte, und zwar ist die nämliche Kraft, welche für das eine elektrische Fluidum eine Anziehungskraft ist, für das andere nothwendig eine Abstossungskraft. Da nun alle Arten von elektromotorischen Kräften unter einander vergleichbar sind und daher alle nach demjenigen Maasse ausgedrückt werden können, nach welchem irgend eine derselben gemessen worden ist, so leuchtet ein, dass alle Arten von elektromotorischen Kräften nach dem in der *Elektrostatik* für elektrische Kräfte festgesetzten Maasse müssen ausgedrückt werden können, und dass man daher für die elektromotorischen Kräfte keines anderen Maasses als für die elektrostatischen Kräfte bedarf. In der Elektrostatik werden aber die elektrischen Kräfte auch nicht nach einem besonderen Maasse, sondern nach gleichem Maasse, wie alle Kräfte in der *Mechanik*, gemessen, indem diejenige Kraft zum Maasse genommen wird, welche der ponderablen Masseneinheit, wenn

$$\frac{1}{2}\frac{\lambda\lambda'}{r^3}\, i \sin\delta \,.\, \sqrt{1+3\cos\psi^2},$$

wenn man beachtet, dass $\gamma = 1$ und $\cos\delta' = 1$ ist.

Bezeichnet man nun, zur Unterscheidung beider Maasse, mit E das erste, mit E' das zweite, und bezeichnet dieselbe elektromotorische Kraft nach beiden Maassen mit eE und $e'E'$: so ergiebt sich, wenn man beachtet, dass $i = k\sqrt{2}$ war,

$$e = \sqrt{\tfrac{1}{2}} \cdot \frac{\lambda\lambda'}{r^3}\, i \sin\delta \,.\, \sqrt{1+3\cos\psi^2},$$

$$e' = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{\lambda\lambda'}{r^3}\, i \sin\delta \,.\, \sqrt{1+3\cos\psi^2},$$

folglich, da $eE = e'E'$ ist:

$$E' : E = e : e' = \sqrt{2} : 1.$$

sie darauf wirkt, die Einheit der Beschleunigung ertheilt. Die auf ein elektrisches Theilchen ausgeübte elektrische Kraft ist hiernach $= 1$, wenn der ponderablen Masseneinheit, an welcher das elektrische Theilchen haftet, die Einheit der Beschleunigung dadurch ertheilt wird. Man sieht hieraus, dass die Feststellung eines eigenen Maasses für die *elektromotorischen* Kräfte gar nicht nöthig ist, sondern dass dafür das für alle Kräfte in der Mechanik festgestellte Maass genügt.

Eine ähnliche Betrachtung findet Anwendung auf die *Intensität* elektrischer Ströme, wenn man in der Mechanik diejenige Stromstärke oder Stromintensität zum Maasse nimmt, bei welcher die Masseneinheit irgend einer Flüssigkeit während des Zeitmaasses durch den Querschnitt des Strombetts geführt wird. Da nun die Masseneinheit der elektrischen Flüssigkeiten in der Elektrostatik schon bestimmt ist, nämlich als diejenige Masse, welche auf eine ihr gleiche Masse in der Entfernung R eine Kraft ausübt, die sich zum Kraftmaasse verhält, wie $1 : R^2$, so leuchtet ein, dass man keines besonderen Maasses für die Intensität elektrischer Ströme bedarf.

Soll nun hiernach der Gebrauch aller besonderen Maasse für die elektromotorischen Kräfte und Stromintensitäten ganz beseitigt werden, so muss eine Regel gefunden werden, nach welcher die nach den bisherigen besonderen Maassen ausgeführten Messungen zu reduciren sind, um sie von diesen besonderen Maassen unabhängig darzustellen.

Um diese Regel zu finden, genügt es nicht, auf die Grundgesetze der Elektrostatik, Elektrodynamik und Induktion, sondern es ist nothwendig, auf das allgemeine Grundgesetz der Elektricitätslehre, welches die Elektrostatik, Elektrodynamik und Induktion zugleich umfasst und verbindet, zurückzugehen, welches in der früheren Abhandlung „Elektrodynamische Maassbestimmungen“, Leipzig 1846,[1]) aufgestellt worden ist. Nach diesem letzteren Gesetze wird diese Kraft, welche die elektrische Masse e auf die elektrische Masse e' in der Entfernung r, bei der relativen Geschwindigkeit $\mathrm{d}r/\mathrm{d}t$ und der relativen Beschleunigung $\mathrm{d}^2r/\mathrm{d}t^2$ ausübt, durch

$$\frac{ee'}{r^2}\left(1 - \frac{1}{c^2}\cdot\frac{\mathrm{d}r^2}{\mathrm{d}t^2} + \frac{2r}{c^2}\,\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2}\right)$$

dargestellt, wo $1/c^2$ der nämliche konstante Faktor ist, welcher in jener Abhandlung mit $a^2/16$ bezeichnet wurde.

Für einen konstanten Werth der relativen Geschwindigkeit $\mathrm{d}r/\mathrm{d}t$, ist $\mathrm{d}^2r/\mathrm{d}t^2 = 0$, folglich die Kraft

$$= \frac{ee'}{r^2}\left(1 - \frac{1}{c^2}\cdot\frac{\mathrm{d}r^2}{\mathrm{d}t^2}\right),$$

[1]) [WILHELM WEBER's Werke, Bd. III, p. 157.]

woraus sich ergiebt, *dass c denjenigen konstanten Werth der relativen Geschwindigkeit* dr/dt *bedeutet, bei welchem zwei elektrische Massen gar keine Wirkung auf einander ausüben.*

Nun ist ferner in der angeführten Abhandlung Art. 21 nachgewiesen worden, dass diejenige Zahl i, welche zu dem im vorhergehenden Artikel definirten Maasse J gefügt, irgend eine *Stromintensität* bestimmt,

$$i = aeu = \frac{4}{c} \cdot eu$$

ist, wo eu die Menge Elektricität bezeichnet, welche bei dieser Stromintensität während des Zeitmaasses durch den Querschnitt des Leiters geht. Wird nun dieselbe Stromintensität nach dem in der Mechanik festgesetzten allgemeinen Strommaasse K durch

$$kK = iJ$$

ausgedrückt, so ist

$$k = eu = \frac{c}{4} i.$$

Es ergiebt sich hieraus die Regel, nach welcher die nach dem im vorigen Artikel definirten besonderen Maasse ausgeführten Messungen zu reduciren sind, um sie von diesem besonderen Maasse unabhängig zu machen, nämlich: man multiplicire die erhaltenen Werthe mit $c/4$. Man erhält dadurch den Werth der elektrischen Stromstärke nach dem allgemeinen Strommaasse in der Mechanik ausgedrückt.

Eben so ergiebt sich aus Art. 24 der angeführten Abhandlung, dass eine *elektromotorische Kraft*, welche durch eine Zahl e und durch das im vorigen Artikel definirte besondere Maass E bestimmt ist, nach dem allgemeinen Maasse aller Kräfte in der Mechanik F durch die Zahl f bestimmt werde, so dass $fF = eE$ ist, wenn

$$f = \frac{4}{c} e$$

gemacht wird, denn es ist in dem angeführten Art. 24 folgender Ausdruck für die elektromotorische Kraft, welche ein konstanter Strom auf einen bewegten Leiter ausübt, nach dem allgemeinen Kraftmaasse der Mechanik gegeben:

$$f = -\frac{aa'}{r^2} i (\cos\varepsilon - \tfrac{3}{2}\cos\vartheta\cos\vartheta') \,.\, au' \cos\varphi.$$

Unter denjenigen Verhältnissen aber, für welche die hierdurch bestimmte elektromotorische Kraft dem im vorigen Artikel definirten besonderen Maasse gleich wird, ist

$$\frac{aa'}{r^2} i = 1, \ \varepsilon = 0, \ \vartheta = \tfrac{1}{2}\pi, \ \varphi = \pi, \ u' = 1,$$

folglich ist, für $e = 1$, $f = a = 4/c$, oder allgemein

$$f = \frac{4}{c}\,e.$$

Es ergiebt sich hieraus die Regel, nach welcher die nach dem im vorigen Artikel definirten besonderen Maasse ausgeführten Messungen elektromotorischer Kräfte zu reduciren sind, um sie von diesem besonderen Maasse unabhängig zu machen, nämlich: man multiplicire die erhaltenen Werthe mit $4/c$. Man erhält dadurch den Werth der elektromotorischen Kraft nach dem allgemeinen Kraftmaasse der Mechanik ausgedrückt.

Soll endlich aus diesen allgemeinen Kraft- und Strommaassen der Mechanik, indem sie für die elektromotorischen Kräfte und elektrischen Ströme gebraucht werden, ein absolutes *Widerstandsmaass* auf die nämliche Weise wie im vorhergehenden Artikel aus den dort definirten besonderen Maassen abgeleitet werden, so nämlich, dass derjenige Widerstand zum Maasse genommen wird, welchen eine Kette besitzen muss, damit das Maass der elektromotorischen Kraft das Strommaass hervorbringe, so ergiebt sich, wenn w nach dem im vorhergehenden Artikel definirten Maasse den nämlichen Widerstand bezeichnet, welchen v nach dem neuen Maasse, folgende Gleichung:

$$v = \frac{16}{c^2}\,w.$$

Die *Geschwindigkeit* c, mit welcher zwei elektrische Massen gegen einander bewegt werden müssen, wenn sie auf einander gar nicht wirken sollen, ist bis jetzt noch nicht ermittelt worden, und dies ist der Grund, warum die besonderen Maasse, wie die im vorigen Artikel definirten, zur Zeit noch für den praktischen Gebrauch in der Elektrodynamik unentbehrlich sind, weil ohne Kenntniss der Geschwindigkeit c die Reduktion der gemessenen *Stromintensitäten*, *elektromotorischen Kräfte* und *Widerstände* auf die bekannten Maasse der Mechanik nicht ausgeführt werden kann.

V.

Ueber den Zusammenhang der Theorie der galvanischen Kette mit den elektrischen Grundgesetzen.

28.

Die Theorie der galvanischen Kette bildet an sich einen Theil der Elektrodynamik und es sollten darin die Gesetze der galvanischen Kette in ihrem Zusammenhange mit den elektrischen Grundgesetzen entwickelt

werden. Dies ist bisher nicht geschehen; vielmehr ist die Theorie der galvanischen Kette für sich allein betrachtet worden und die Gesetze der galvanischen Kette sind theils unmittelbar aus der Erfahrung entnommen, theils aus Annahmen abgeleitet worden, welche ganz unabhängig von den elektrischen Grundgesetzen aufgestellt worden sind. Namentlich gilt dies von den Gesetzen der galvanischen Kette, wie sie Ohm gegeben, deren Richtigkeit und praktische Bedeutung übrigens allgemein anerkannt wird. Der Grund, warum bisher eine solche Entwickelung der Theorie der galvanischen Kette aus den elektrischen Grundgesetzen noch nicht gegeben worden ist, dürfte hauptsächlich in den mathematischen Schwierigkeiten liegen, welche eine solche Entwickelung, wenn sie vollständig und streng sein soll, findet. Indessen mögen hier einige specielle Erörterungen Platz finden, welche den Zusammenhang der Theorie der galvanischen Kette mit den elektrischen Grundgesetzen betreffen, und welche mit den in dieser Abhandlung betrachteten Gegenständen in näherem Zusammenhange stehen.

Im Laufe dieser Abhandlung ist häufiger auf die Ohm'schen Gesetze der galvanischen Kette verwiesen worden, was nothwendig war, weil alle Widerstandsmessungen wesentlich auf diesen Gesetzen beruhen und selbst die Definition des Widerstands und des Widerstandsmaasses darauf begründet werden musste; denn der Widerstand wird im Grunde nur durch die nach den Ohm'schen Gesetzen für jeden geschlossenen Leiter in dem Verhältnisse der elektromotorischen Kraft zur Stromintensität gegebene Konstante definirt.

Die Ohm'schen Gesetze setzen voraus, dass die Intensität des elektrischen Stroms in allen Theilen der geschlossenen Kette gleich sei, wie es bei eingetretener Beharrlichkeit wirklich der Fall sein muss. Durch diese Voraussetzung ist das Gebiet, für welches die Ohm'schen Gesetze gelten, beschränkt und umfasst nicht alle Bewegungen der Elektricität in der Kette; denn es sind davon z. B. alle Bewegungen ausgeschlossen, welche die Elektricität in der Kette machen muss, ehe ein beharrlicher Zustand zu Stande kommt. Auch leuchtet ein, dass diese Gesetze nur in so weit erfahrungsmässig begründet sind, als sie die Abhängigkeit der in allen Theilen der Kette gleich gewordenen Stromintensität von der Summe aller elektromotorischen Kräfte in der Kette und von der Summe der Widerstände aller ihrer Theile betreffen, während ein wirkliches Grundgesetz die Stromintensität an irgend einer Stelle der Kette nur von der auf diese Stelle wirkenden elektromotorischen Kraft und von dem an dieser Stelle vorhandenen Widerstande abhängig machen darf. Nun hat zwar Ohm, um zu einem wirklichen Grundgesetze zu gelangen, die Verschiedenheit der elektrischen Ladung der verschiedenen Theile der Kette in Betracht gezogen und hat das Gesetz zu begründen

gesucht, dass bei gleicher Stromintensität der Unterschied der Ladung an zwei Stellen, zwischen welchen keine elektromotorische Kraft gegeben ist (kein Berührungspunkt verschiedener Metalle), dem Widerstande des zwischen beiden Stellen liegenden Theils der Kette proportional sei, und dass dagegen an einer solchen Stelle, wo eine elektromotorische Kraft gegeben ist (wo z. B. zwei verschiedene Metalle sich berühren), die Ladung von der einen Seite zur anderen einen plötzlichen Sprung mache, und dass der Unterschied der Ladung auf beiden Seiten der für diese Stelle gegebenen elektromotorischen Kraft proportional sei; dass endlich bei verschiedener Stromintensität der Unterschied der elektromotorischen Ladung an zwei bestimmten Stellen desselben Leiters der Stromintensität proportional sei. Hierdurch geleitet, hat dann Ohm ein analoges Grundgesetz für die elektrische Strömung in jedem Theile der Kette in ihrer Abhängigkeit von der Vertheilung der elektrischen Ladung aufgestellt, wie Fourier für die Wärmeströmung in jedem Theile eines Wärmeleiters in ihrer Abhängigkeit von der Vertheilung der Temperatur, und hat nachgewiesen, dass die aus dieser Analogie gezogenen Folgerungen mit der Erfahrung übereinstimmen, so weit als deren Resultate verbürgt werden können.

Ohm hat wirklich in der Vertheilung der elektrischen Ladung den wahren Schlüssel gefunden zur Eröffnung des Uebergangs von dem erfahrungsmässig begründeten, die ganze geschlossene Kette umfassenden Gesetze zu dem wahren Grundgesetze, wie es allgemein von jedem Theile der Kette aufgestellt werden muss; was aber die Wirkung dieser elektrischen Vertheilung auf die Bewegung der Elektricität betrifft, die er blos nach der Analogie mit der Wirkung der Temperaturvertheilung auf die Bewegung der Wärme betrachtet hat, so liegen Annahmen zu Grunde, welche weder nothwendig, noch zulässig erscheinen; denn die Wirkung der freien Elektricität ist durch das allgemeine Grundgesetz der Elektricitätslehre oder, wenn man von den relativen Bewegungen abstrahirt, durch das Grundgesetz der Elektrostatik schon gegeben und kann daraus für jede Vertheilung im Leiter berechnet werden, woraus sich leicht die Unzulässigkeit willkürlicher Annahmen nach blosser Analogie mit der Wirkung der Temperaturvertheilung auf die Bewegung der Wärme nachweisen lässt. Schon was die Vertheilung selbst betrifft, erscheint es hiernach unzulässig, eine andere Vertheilung der freien Elektricität als an der *Oberfläche* des Leiters anzunehmen. Ferner leuchtet ein wesentlicher Unterschied auch daraus ein, dass zwischen der Wärmefortpflanzung und der in der Richtung derselben vorhandenen Temperaturabnahme eine so nothwendige Beziehung Statt findet, dass erstere ohne die letztere gar nicht möglich ist. Eine solche Abhängigkeit der elektrischen Strömung von der Vertheilung der freien

Elektricität findet in der galvanischen Kette nicht Statt, weil die Kräfte, welche die elektrische Strömung hervorbringen, nicht blos von der nächsten Umgebung, sondern auch aus grösseren Entfernungen wirken und daher ihren Sitz auch ganz ausserhalb des Leiters haben können, was bei einem Wärmeleiter nicht möglich ist.

Man nehme z. B. einen kreisförmigen kupfernen Ring zum Leiter, dessen Querschnitt überall gleich ist, und bewege in der durch seinen Mittelpunkt senkrecht auf seine Ebene gelegten Geraden einen Magnet. Der Magnet übt bekanntlich bei dieser Bewegung auf alle Ringelemente gleiche elektromotorische Kraft aus und es wird dadurch, weil allen Elementen auch gleicher Widerstand zukommt, eine gleiche elektrische Strömung gleichzeitig in allen Elementen hervorgebracht, woraus folgt, dass an keiner Stelle des Rings eine grössere oder geringere Ansammlung von positiver oder negativer Elektricität entstehen kann. Wir haben hier also den Fall eines Stroms in einer geschlossenen Kette ohne eine Vertheilung freier Elektricität in der Kette. Das Gesetz der Abhängigkeit der Stromintensität von der Vertheilung der freien Elektricität im Leiter findet also in allen denjenigen Fällen keine Anwendung, wo die gegebenen elektromotorischen Kräfte sich über die ganze geschlossene Kette erstrecken und in allen Theilen den Widerständen proportional wirken. Nur bei ungleichmässiger Wirksamkeit der gegebenen elektromotorischen Kräfte in den verschiedenen Theilen der Kette tritt eine Vertheilung freier Elektricität ein, und das Faktum, dass ein in allen Theilen der Kette gleichförmiger und beharrlicher Strom zu Stande kommt, beweist dann, dass diese Vertheilung der freien Elektricität im Leiter die Wirkung habe, alle Ungleichheiten in der ursprünglichen Wirkungsweise der elektromotorischen Kräfte auszugleichen. Wird nun aber diese Ausgleichung durch das Faktum der Existenz eines beharrlichen Stroms als bewiesen betrachtet, so bleibt noch übrig: *erstens* nachzuweisen, wie eine solche Vertheilung nach dem elektrischen Grundgesetze möglich ist und wie sie beschaffen sein müsse, *zweitens*, wie sie entstehe und erhalten werde.

29.

Nachweisung der Möglichkeit einer Vertheilung der freien Elektricität im Leiter, wodurch die Ungleichheiten der Wirksamkeit gegebener elektromotorischer Kräfte in den verschiedenen Theilen der Kette nach Proportion ihrer Widerstände ausgeglichen werden.

Jedes Theilchen freier (positiver oder negativer) Elektricität, welches sich an der Oberfläche eines Leiters befindet, übt elektromotorische Kräfte auf alle Theile des Leiters aus, welche die gegebenen

elektromotorischen Kräfte der Kette an einigen Stellen schwächen, an anderen verstärken, und es fragt sich daher, ob eine solche Vertheilung freier Elektricität auf der ganzen Oberfläche des Leiters möglich sei, durch welche die elektromotorische Kraft überall, wo sie zu schwach ist, verstärkt, wo sie zu stark ist, geschwächt, und auf diese Weise eine Ausgleichung der elektromotorischen Kraft in allen Theilen der Kette nach Proportion ihrer Widerstände zu Stande gebracht werde, welche die Bedingung eines gleichförmigen und beharrlichen Stroms ist. Diese Frage muss, wenn vor der Hand von dem Einflusse der relativen Bewegungen der elektrischen Theilchen gegen einander abstrahirt wird, aus dem Grundgesetze der Elektrostatik entschieden werden, wodurch die von der Elektricität bei jeder beliebigen Vertheilung an der Oberfläche auf alle Punkte im Innern des Leiters ausgeübten Kräfte bestimmt sind.

Poisson hat bekanntlich aus dem Grundgesetze der Elektrostatik folgendes Theorem bewiesen:

> Wenn auf einen Leiter von beliebiger Gestalt von aussen beliebige elektrische Kräfte wirken, so ist an der Oberfläche des Leiters immer eine solche Vertheilung freier Elektricität möglich — aber nur eine einzige — bei welcher die elektrischen Kräfte, welche von dieser vertheilten freien Elektricität herrühren, den von aussen her wirkenden elektrischen Kräften in allen Punkten im Innern des Leiters zugleich das Gleichgewicht halten.

Denkt man sich nun zunächst einen Leiter von cylindrischer Form und in der Richtung seiner Axe in grosser Entfernung eine koncentrirte Masse freien (positiven oder negativen) elektrischen Fluidums, welche auf alle Theile des Cylinders gleiche und seiner Axe parallele Kräfte ausübt, so folgt aus obigem Lehrsatze die Möglichkeit einer solchen Vertheilung der freien Elektricität an der Oberfläche des Cylinders, aus welcher, bei dem Wegfall jener fernen Masse, für alle Theile des Cylinders gleiche und seiner Axe parallele elektromotorische Kräfte resultiren, nämlich diejenigen Kräfte, welche den von der fernen Masse vor ihrem Wegfall ausgeübten Kräften das Gleichgewicht gehalten hatten.

Denkt man sich dagegen einen gebogenen Stab und in der Richtung der Tangente eines seiner Elemente in grosser Entfernung eine koncentrirte Masse freien (positiven oder negativen) Fluidums, so folgt eben so die Möglichkeit einer solchen Vertheilung der freien Elektricität an der Oberfläche dieses Elements, aus welcher, bei dem Wegfall jener fernen Masse, für alle Theile des Elements gleiche und seiner Tangente parallele elektromotorische Kräfte resultiren, und diese Möglichkeit bleibt auch dann, wenn auf das betrachtete Element die elektrischen Ladungen aller anderen Elemente des gebogenen Stabes wirken, wie

auch diese Ladungen beschaffen sein mögen, nur dass alsdann die Vertheilungsweise der freien Elektricität an der Oberfläche des betrachteten Elements von der Ladung des übrigen Stabs abhängig ist.

Diese Betrachtung lässt sich nun auf alle Elemente des gebogenen Stabs anwenden, so dass für alle Elemente gleiche und ihren Tangenten parallele elektromotorische Kräfte resultiren. Die Ladungen aller einzelnen Elemente werden dadurch von der Ladung des ganzen Stabs abhängig gemacht, und die Ladung des ganzen Stabs muss endlich wiederum der Summe der Ladungen aller Elemente gleich gesetzt werden.

Eine auf solche Weise gewonnene Bestimmung der Ladung des ganzen gebogenen Stabs wird nun gelten, der Stab möge nur einen kleineren oder einen grösseren Theil von einem Kreise bilden. Die Ladungen in den Berührungsflächen je zweier an einander grenzender Elemente müssen sich neutralisiren, so dass die Vertheilung der freien Elektricität auf die *Oberfläche des Stabs* beschränkt bleibt, zu der aber wesentlich die *Anfangsfläche* und *Endfläche* des Stabs gerechnet werden müssen, welche daher nicht zusammenfallen dürfen.

Die Nothwendigkeit, Anfang und Ende des Stabs geschieden zu erhalten, wenn die an der Oberfläche vertheilte freie Elektricität in allen Elementen des Stabs gleiche elektromotorische Kräfte nach tangentialer Richtung ausüben soll, folgt daraus, dass die Ladungen am Anfange und am Ende des Stabs, bei gegenseitiger Annäherung, keinem bestimmten Grenzwerthe sich nähern, sondern in's Unendliche wachsen müssten; wie man sich durch folgende Betrachtung überzeugen kann.

Es stelle AB die Anfangsfläche, CD die Endfläche des Stabs dar; der sehr kleine Abstand beider Flächen von einander heisse δ. Es darf angenommen werden, dass bei einer Verkleinerung von δ die Vertheilung der freien Elektricität auf der ganzen Staboberfläche mit Ausnahme von AB und CD nahe unverändert bleibt, woraus folgt, dass die für einen Punkt E des Stabs resultirende elektromotorische Kraft als unverändert angesehen werden kann, wenn nur die aus den Ladungen der beiden Flächen AB und CD für E resultirende elektromotorische Kraft gleich geblieben ist. G und H seien zwei gleiche, einander gegenüberliegende Elemente der Flächen AB und CD. Die Ladung des Elements G werde mit $-e$, die Ladung des Elements H mit $+e$ bezeichnet. Der Abstand FH, senkrecht auf die Richtung der für E resultirenden elektromotorischen Kraft, heisse β; der Abstand FE heisse α. Alsdann ergiebt sich die von H auf E nach

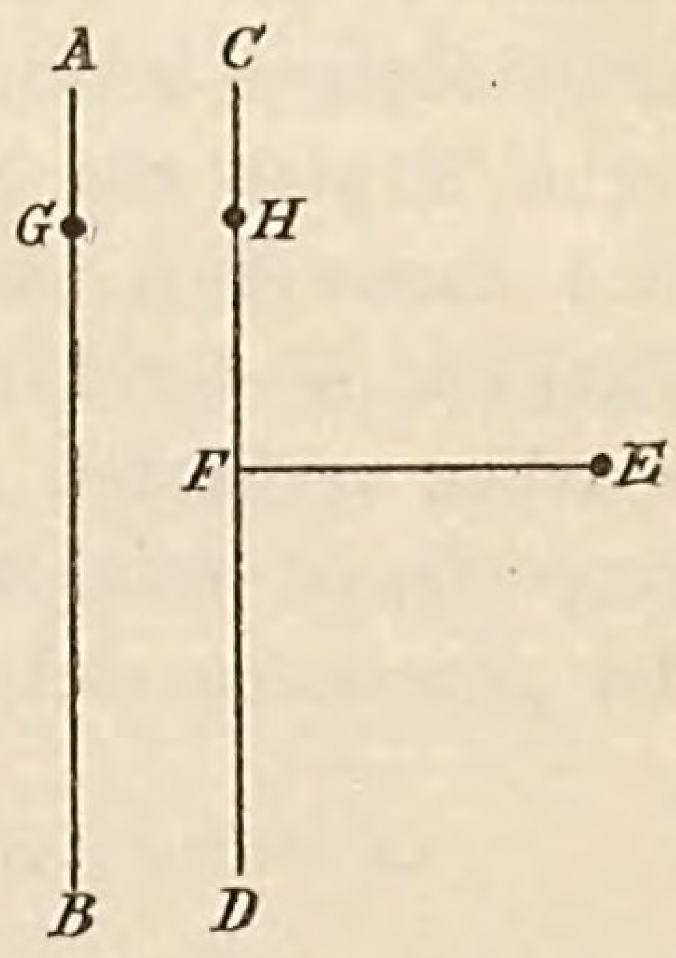


Fig. 2.

der tangentialen Richtung EF wirkende Kraft aus dem Grundgesetze der Elektrostatik

$$= \frac{+ \alpha e}{(\alpha^2 + \beta^2)^{\frac{3}{2}}},$$

die von G auf E nach der nämlichen Richtung wirkende Kraft

$$= \frac{- (\alpha + \delta) e}{[(\alpha + \delta)^2 + \beta^2]^{\frac{3}{2}}},$$

folglich die Summe beider Kräfte, wenn δ gegen α sehr klein ist,

$$= \frac{2\alpha^2 - \beta^2}{(\alpha^2 + \beta^2)^{\frac{5}{2}}} \cdot \delta e.$$

Hieraus folgt also, dass die für E resultirende elektromotorische Kraft bei der Verkleinerung von δ unverändert bleibt, wenn das Produkt δe gleichen Werth behält. Für verschwindende Werthe von δ müsste also die Ladung e ins Unendliche wachsen, was zu beweisen war.

Zugleich leuchtet daraus ein, dass, wenn die im ganzen Stabe gleiche elektromotorische Kraft wachsen oder abnehmen soll, auch der Werth des Produkts δe sich proportional ändern müsse.

Bezeichnet endlich K einen zwischen den Flächen AB und CD gelegenen Punkt, so leuchtet ein, dass die Ladungen der Flächen AB und CD auf K eine elektromotorische Kraft nach entgegengesetzter Richtung wie auf E ausüben. Soll daher ein geschlossener Kreis gebildet werden, in welchem überall gleiche elektromotorische Kräfte in gleichem Sinne wirken, was nothwendig ist, wenn ein gleichförmiger und beharrlicher Strom zu Stande kommen soll, so muss K der Sitz einer von der Vertheilung der freien Elektricität an der Staboberfläche unabhängigen elektromotorischen Kraft sein, welches z. B. der Fall ist, wenn Kupfer und Zink im Punkte K einander berühren. Auch lässt sich nachweisen, dass die gegebene elektromotorische Kraft in allen Punkten K der Linie δ, welche die beiden entgegengesetzt geladenen Flächen verbindet, unter sonst gleichen Verhältnissen dem Produkte δe proportional sein müsse, und dass also dieses Produkt als ein Maass der gegebenen elektromotorischen Kraft betrachtet werden dürfe.[1])

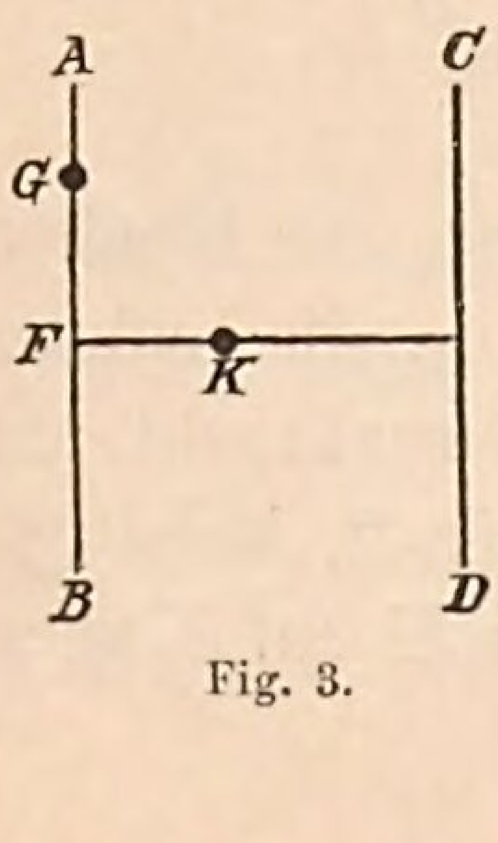


Fig. 3.

[1]) Es stellen AB und CD die beiden entgegengesetzt geladenen Flächen dar, deren Abstand $= \delta$ ist. G sei ein Element der Fläche AB, dessen Ladung mit e bezeichnet wird. Der Abstand FG, senkrecht auf die Richtung der für K resultirenden elektromotorischen Kraft, werde mit β, der Abstand FK mit α bezeichnet. Dann ergiebt sich die von G auf K nach der Richtung FK wirkende Kraft aus dem Grundgesetze der Elektrostatik

$$= \frac{e\alpha}{(\alpha^2 + \beta^2)^{\frac{3}{2}}},$$

Aus diesen allgemeinen Betrachtungen lassen sich nun folgende Resultate ziehen, welche eine Vergleichung mit den bekannten Gesetzen der galvanischen Kette gestatten.

1. Aus obiger Betrachtung folgt, dass in einem geschlossenen Ringe durch blosse Vertheilung der freien Elektricität an seiner Oberfläche kein Strom möglich ist, sondern dass wenigstens in *einem Querschnitte* dieses Rings elektromotorische Kräfte, z. B. durch die Berührung von Kupfer mit Zink, gegeben sein müssen, wenn durch Vermittelung einer gewissen Vertheilung der freien Elektricität an der Ringoberfläche ein gleichförmiger und beharrlicher Strom im ganzen Ringe zu Stande kommen soll.

2. Wenn in einer bestimmten Kette der Strom verdoppelt werden soll, so muss die Menge der freien Elektricität auf der ganzen Oberfläche verdoppelt werden; folglich muss auch eine Verdoppelung des Faktors e im Produkte δe Statt finden, d. h. eine Verdoppelung der damit proportionalen elektromotorischen Kraft. Einer Verdoppelung der elektromotorischen Kraft entspricht also eine Verdoppelung der Stromintensität in der nämlichen Kette.

3. Werden *alle* Dimensionen einer Kette verdoppelt und soll dabei die elektromotorische Kraft in allen Punkten noch eben so gross wie vorher bleiben, so muss die Dicke der elektrischen Schicht an entsprechenden Stellen der Oberfläche unverändert geblieben sein, während die davon bedeckte Stelle der Oberfläche 4 Mal grösser geworden ist. Zugleich ergiebt das proportionale Wachsthum aller Dimensionen, dass auch der Abstand δ in dem Produkte δe verdoppelt gedacht werden muss, wonach also, da e unverändert geblieben ist, das Produkt δe und die damit proportionale elektromotorische Kraft verdoppelt sein muss.

folglich für alle Punkte K von $\alpha = 0$ bis $\alpha = \delta$

$$= e\left(\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\sqrt{\beta^2 + \delta^2}}\right).$$

Für alle Flächenelemente, welche in gleicher Entfernung β von F liegen, erhält man hiernach durch Multiplikation mit $2\pi\beta$

$$2\pi e\left(1 - \frac{\beta}{\sqrt{\beta^2 + \delta^2}}\right);$$

endlich für alle Flächenelemente von $\beta = 0$ bis $\beta = b$

$$2\pi e\left(\delta + b - \sqrt{b^2 + \delta^2}\right)$$

oder, weil δ gegen b sehr klein ist,

$$2\pi e\delta.$$

Dasselbe Resultat ergiebt sich für die von der Fläche CD ausgeübte Kraft, und es ergiebt sich folglich die Summe beider Kräfte $= 4\pi e\delta$, d. h. proportional dem Produkte δe.

Hieraus folgt, dass eine doppelte elektromotorische Kraft erfordert werde, um in einer Kette von doppelter Länge und vierfachem Querschnitte eine eben so starke elektrische Bewegung in allen Punkten hervorzubringen, wie in einer Kette von einfacher Länge und einfachem Querschnitte. Eine solche in allen Punkten gleich starke elektrische Bewegung giebt aber bei vierfachem Querschnitte die vierfache Stromintensität. Die doppelte elektromotorische Kraft bringt also in einer Kette von doppelter Länge und von vierfachem Querschnitte die vierfache Stromintensität hervor, was nach den bekannten Gesetzen der galvanischen Kette auch wirklich der Fall ist.

Eine vollständige Entwickelung der Gesetze der galvanischen Kette fordert eine nähere Bestimmung der Vertheilung der freien Elektricität an der Oberfläche der Kette.

30.

Ueber das Gesetz der Vertheilung der freien Elektricität an der Oberfläche des Leiters eines gleichförmigen und beharrlichen Stroms.

Bei einem *linearen* Leiter ist es gestattet, für die Vertheilung der freien Elektricität auf der Oberfläche eine Vertheilung derselben in derjenigen Linie, welche die Axe des Leiters bildet, zu setzen. Es leuchtet dies in Beziehung auf alle Theile des Leiters von selbst ein, welche in grösserer Entfernung von demjenigen Punkte liegen, für welchen die von jener freien Elektricität ausgeübte elektromotorische Kraft bestimmt werden soll, und es bleibt daher nur übrig, den Beweis für denjenigen Theil des Leiters zu führen, welcher jenem Punkte zunächst liegt.

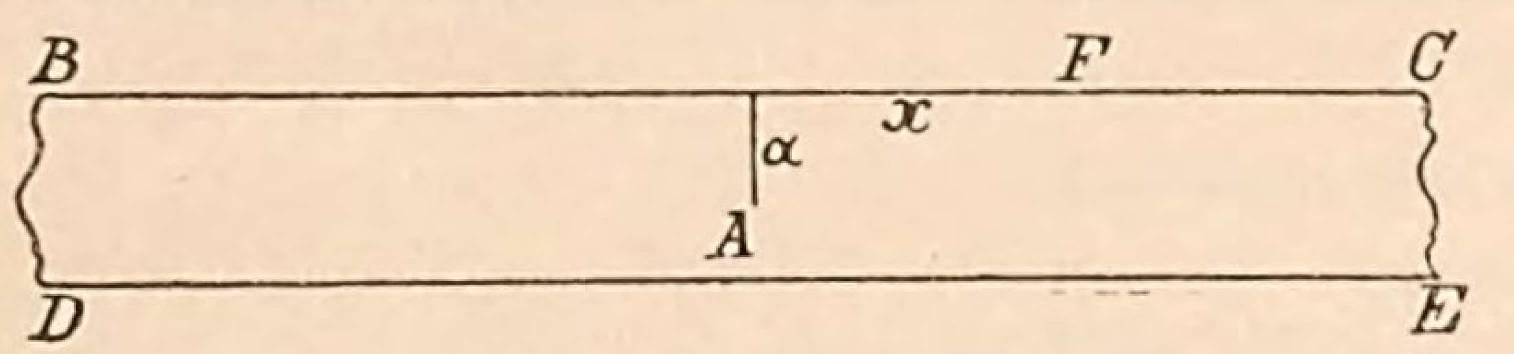


Fig. 4.

Es sei A derjenige Punkt, für welchen die von der freien Elektricität des Leiterelements $BCDE$ ausgeübte elektromotorische Kraft bestimmt werden soll; a bezeichne den unendlich kleinen Halbmesser des Leitungsdrahts. Die Dicke der Schicht der freien Elektricität in dem Punkte F, dessen geringer Abstand von dem durch A gehenden Querschnitt des Leiters mit x bezeichnet werde, kann dargestellt werden durch

$$a + bx$$

und die elektromotorische Kraft, welche die freie Elektricität des Flächenelements $2\pi a dx$ bei F auf den Punkt A ausübt, durch

$$\frac{2\pi a (a + bx) dx}{a^2 + x^2},$$

woraus die Komponente dieser Kraft nach der Richtung der Axe folgt,

$$=\frac{2\pi a(a+bx)x dx}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Der Integralwerth zwischen den Grenzen $x=-\lambda$ bis $x=+\lambda$ ist hiernach

$$2\pi ab\int_{-\lambda}^{+\lambda}\frac{x^2dx}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}=2\pi ab\left(\log\frac{\sqrt{\lambda^2+a^2}+\lambda}{\sqrt{\lambda^2+a^2}-\lambda}-\frac{2\lambda}{\sqrt{\lambda^2+a^2}}\right),$$

oder, weil a gegen λ sehr klein ist,

$$=4\pi ab\,.\log\frac{2\lambda}{ea}=4\pi ab\left(\log\lambda-\log\frac{e}{2}a\right),$$

worin e die Grundzahl des natürlichen Logarithmensystems bezeichnet.

Wäre nun dieselbe freie Elektricität, statt auf der Oberfläche des Leiters vertheilt, in seiner Axe koncentrirt, so würde von dem Axenelemente, in welchem die freie Elektricität $2\pi a(a+x)\mathrm{d}x$ koncentrirt wäre, auf A nach der Richtung der Axe eine elektromotorische Kraft wirken, welche dargestellt wird durch

$$\pm\frac{2\pi a(a+bx)\mathrm{d}x}{x^2},$$

je nachdem x einen positiven oder negativen Werth hat. Der Integralwerth zwischen den Grenzen $x=-\lambda$ bis $x=-ea/2$ ist

$$=2\pi ab\left(\log\lambda-\log\frac{e}{2}a\right)+2\pi aa\left(\frac{1}{\lambda}-\frac{2}{ea}\right),$$

zwischen den Grenzen $x=+ea/2$ bis $x=+\lambda$

$$=2\pi ab\left(\log\lambda-\log\frac{e}{2}a\right)-2\pi aa\left(\frac{1}{\lambda}-\frac{2}{ea}\right);$$

folglich ist der Integralwerth zwischen den Grenzen $x=-\lambda$ bis $x=+\lambda$, mit Ausschluss des zwischen den Grenzen $x=-ea/2$ bis $x=+ea/2$ fallenden Theils,

$$=4\pi ab\left(\log\lambda-\log\frac{e}{2}a\right),$$

woraus hervorgeht, dass es gestattet ist, für die Vertheilung der freien Elektricität auf der Oberfläche eine Vertheilung derselben in der Axe des Leiters zu substituiren, wenn man in dem Integralwerthe der elektromotorischen Kraft denjenigen Theil ausschliesst, welcher zwischen den Grenzen $x=-ea/2$ bis $x=+ea/2$ liegt.

Hat z. B. der lineare Leiter die Gestalt eines Kreises, dessen Halbmesser $=r$ ist, und bezeichnet A den Anfangspunkt eines Bogens

$AB = r\varphi$, welcher der Sitz der gegebenen elektromotorischen Kraft der Kette ist; so sei

$$f\varphi \, . \, d\varphi$$

die freie Elektricität des Bogenelements $r d\varphi$ am Ende des Bogens $r\varphi$. Der Werth des *Potentials* dieser elektrischen Masse im Punkte C am Ende des Bogens $AC = r\psi$ ist dann

$$= \frac{f\varphi \, . \, d\varphi}{2r \sin \frac{1}{2}(\varphi - \psi)},$$

folglich der Werth des Potentials der elektrischen Masse des ganzen Leiters im Punkte C

$$\frac{1}{2r}\int \frac{f\varphi \, . \, d\varphi}{\sin \frac{1}{2}(\varphi - \psi)} = F\psi,$$

wo die Integration von $\varphi = \psi + ea/2r$ bis $\varphi = 2\pi + \psi - ea/2r$ zu erstrecken ist. Hieraus ergiebt sich die auf den Punkt C ausgeübte elektromotorische Kraft, ausgedrückt durch den Differentialquotienten des Potentials in Beziehung auf den Bogen $r\psi$,

$$= \frac{d \, . \, F\psi}{r d\psi}.$$

Soll nun diese elektromotorische Kraft in allen Theilen des Leiters gleich sein, d. h. soll $d \, . \, d(F\psi)/r d\psi$ einen konstanten Werth c haben, so erhält man

$$F\psi = c\psi + \text{konst.},$$

oder, bei symmetrischer Vertheilung der freien positiven und negativen Elektricität im Leiter, wo $F\pi = c\pi + \text{konst.} = 0$ ist,

$$F\psi = c\,(\psi - \pi).$$

Sollte nun auch die Auffindung der allgemeinen Form der Funktion $f\varphi$ Schwierigkeiten finden, so ist es doch nicht schwer, die von Ohm darüber aufgestellte Hypothese einer Prüfung zu unterwerfen und zu entscheiden, ob und in wie weit dieselbe zulässig sei.

Die Ohm'sche Hypothese besteht wesentlich darin, dass der Werth $f\varphi$ von $\varphi = 0$ bis $\varphi = 2\pi$ proportional mit φ wachse und dass also für den Fall der symmetrischen Vertheilung der positiven und negativen Elektricität im Leiter, wo $f(0) = -f(2\pi)$ ist,

$$f\varphi = a\,(\varphi - \pi).$$

Dies vorausgesetzt, lässt sich der Werth des *Potentials* der freien Elektricität des ganzen Leiters in demjenigen Punkte, für welchen $\varphi = \psi$ ist, folgendermassen bestimmen.

A sei der Anfangspunkt des Bogens $r\varphi$; $AB = BD = r\psi$. Alle Elemente des Bogens $r\varphi$ von A bis D lassen sich paarweise nach ihrem

Abstande von B ordnen. Wenn nämlich das eine Element zu $\varphi = \psi - \chi$ gehört, dessen Abstand von $B = 2r \sin \frac{1}{2}\chi$ ist, so hat das zu $\varphi = \psi + \chi$ gehörende Element denselben Abstand von B. Die diesen beiden Elementen zugehörigen elektrischen Massen sind

$$a(\psi - \chi - \pi)\,\mathrm{d}\chi \text{ und } a(\psi + \chi - \pi)\,\mathrm{d}\chi$$

und der Werth des *Potentials* dieser Massen im Punkte B

$$\frac{a(\psi - \chi - \pi)\,\mathrm{d}\chi}{2r \sin \frac{1}{2}\chi} \text{ und } \frac{a(\psi + \chi - \pi)\,\mathrm{d}\chi}{2r \sin \frac{1}{2}\chi},$$

folglich deren Summe

$$= \frac{a(\psi - \pi)\,\mathrm{d}\chi}{r \sin \frac{1}{2}\chi}.$$

Der Werth des Potentials der freien Elektricität des ganzen Bogens AD im Punkte B ergiebt sich hieraus

$$\frac{a(\psi - \pi)}{r} \int\limits_{\frac{ea}{2r}}^{\psi} \frac{\mathrm{d}\chi}{\sin \frac{1}{2}\chi} = \frac{2a(\psi - \pi)}{r} \cdot \left(\log \operatorname{tang} \tfrac{1}{4}\psi - \log \operatorname{tang} \frac{ea}{8r}\right).$$

Der Punkt C des Kreises liege dem Punkte B diametral gegenüber, folglich der Bogen $ABC = r(\psi + \pi)$. Alle Elemente des Bogens $r\varphi$ von D über C nach A lassen sich ebenfalls paarweise ordnen nach ihrem Abstande von C. Wenn nämlich das eine Element zu $\varphi = \psi + \pi - \chi$ gehört, dessen Abstand von $C = 2r \sin \frac{1}{2}\chi$ ist, so hat das zu $\varphi = \psi + \pi + \chi$ gehörende Element denselben Abstand von C. Die diesen beiden Elementen zugehörigen elektrischen Massen sind

$$a(\psi - \chi)\,\mathrm{d}\chi \text{ und } a(\psi + \chi)\,\mathrm{d}\chi$$

und der Werth des *Potentials* dieser Massen im Punkte B

$$\frac{a(\psi - \chi)\,\mathrm{d}\chi}{2r \sin \frac{1}{2}(\pi - \chi)} \text{ und } \frac{a(\psi + \chi)\,\mathrm{d}\chi}{2r \sin \frac{1}{2}(\pi - \chi)},$$

folglich deren Summe

$$= \frac{a\psi}{r} \cdot \frac{\mathrm{d}\chi}{\cos \frac{1}{2}\chi}.$$

Der Werth des Potentials der freien Elektricität des ganzen Bogens DCA im Punkte B ergiebt sich hieraus

$$\frac{a\psi}{r} \int\limits_{0}^{\pi - \psi} \frac{\mathrm{d}\chi}{\cos \frac{1}{2}\chi} = -\frac{2a\psi}{r} \log \operatorname{tang} \tfrac{1}{4}\psi,$$

der Werth des Potentials der freien Elektricität des ganzen Kreises also

$$= -\frac{2a\psi}{r} \log \operatorname{tang} \frac{ea}{8r} - \frac{2a\pi}{r}\left(\log \operatorname{tang} \frac{1}{4}\psi - \log \operatorname{tang} \frac{ea}{8r}\right).$$

Hieraus ergiebt sich die auf den Punkt B ausgeübte elektromotorische Kraft, ausgedrückt durch den Differentialquotienten des Potentials in Beziehung auf den Bogen $r\psi$,

$$= -\frac{2a}{r^2}\log\operatorname{tang}\frac{ea}{8r} - \frac{a\pi}{r^2\sin\frac{1}{2}\psi}$$

oder

$$= \frac{2a}{r^2}\log\cot\frac{ea}{8r} - \frac{a\pi}{r^2\sin\frac{1}{2}\psi}.$$

Für diejenigen Werthe von ψ, welche von π wenig verschieden sind, ergiebt sich hiernach die elektromotorische Kraft nahe gleich; je mehr aber der Werth von ψ dem Werthe von 0 oder 2π nahe kommt, desto tiefer sinkt die elektromotorische Kraft unter jenem Grenzwerthe herab, woraus also folgt, dass die Ohm'sche Hypothese über die Vertheilung der freien Elektricität nur für den mittleren Theil der Kette näherungsweise zulässig ist.

So wie nun nach dieser Hypothese der Werth der elektromotorischen Kraft in allen Theilen der Kette kleiner ist, als der für die Mitte der Kette gültige Grenzwerth, so lässt sich auch leicht eine Hypothese aufstellen, nach welcher er grösser sein würde. Die Ohm'sche Hypothese bedarf nämlich nothwendig einer Ergänzung, wenn sie nicht mit dem Satze im Widerspruch stehen soll, dass aus der Vertheilung der freien Elektricität an der Oberfläche eines Leiters eine im Innern des Leiters überall gleiche elektromotorische Kraft nur dann resultiren könne, wenn zwei Querschnittsflächen des Leiters zu jener Oberfläche gehören (s. S. 273). Denn hiernach muss in unserer linearen Darstellung alle in diesen beiden Querschnittsflächen befindliche freie Elektricität in zwei Punkten koncentrirt gedacht werden, während in der ganzen übrigen Kette nur die in der Begrenzungslinie eines Querschnitts befindliche Elektricität in einem Punkte koncentrirt gedacht wird. Es ergiebt sich daraus, dass wenigstens in den jene beiden Querschnitte darstellenden Endpunkten eine von Ohm nicht berücksichtigte Koncentration von freier Elektricität Statt finden müsse. Bezeichnet man diese mit $\pm\varepsilon$, wo das obere Vorzeichen für den einen, das untere für den anderen Punkt gilt, und bezeichnet δ den kleinen Abstand beider Punkte von einander, so lässt sich die elektromotorische Kraft, welche dadurch für jeden Punkt der Kette noch hinzukommt, nach demselben Gesetze bestimmen, welche Gauss für die Wirkung eines Magnets in die Ferne gegeben hat. Siehe *„Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins im Jahre 1840"* S. 33, 34.[1]) Ist nämlich ACA' der kreisförmige Leiter und in A die Kontaktstelle, und soll die elektro-

[1]) [Gauss' Werke, Bd. V, p. 434 u. 435.]

motorische Kraft bestimmt werden, welche durch die freie Elektricität $+\varepsilon$ zu beiden Seiten von A im Punkte C des Leiters hinzukommt; so ziehe man in A die Tangente und verlängere sie, bis sie in B die verlängerte Gerade $A'C$ schneidet, wo A' denjenigen Punkt des Kreises bezeichnet, welcher dem Punkte A diametral gegenüber liegt; ferner mache man $AD = \frac{1}{3}AB$ und ziehe CD, so ist CD die Richtung der elektromotorischen Kraft, welche $+\varepsilon$ in C ausübt, und die Grösse dieser Kraft wird dargestellt durch

$$\frac{CD}{AD} \cdot \frac{\delta\varepsilon}{AC^3}.$$

Zieht man endlich die Tangente des Kreises in C und fällt darauf das Perpendikel DE; so ergiebt sich die Komponente nach der Richtung der Kreistangente in C, d. i. die gesuchte elektromotorische Kraft

$$= \frac{CE}{CD} \cdot \frac{CD}{AD} \cdot \frac{\delta\varepsilon}{AC^3} = \frac{CE}{AD} \cdot \frac{\delta\varepsilon}{AC^3}.$$

Bezeichnet man den Halbmesser des Kreises mit r und den Kreisbogen AC mit ψ, so findet man dafür den Ausdruck

$$\frac{1 + \cos\frac{1}{2}\psi^2}{\sin\frac{1}{2}\psi^3} \cdot \frac{\delta\varepsilon}{8r^3}.$$

Fügt man nun diese elektromotorische Kraft der nach der Ohm'schen Hypothese gefundenen noch hinzu, so erhält man

$$\frac{2a}{r^2}\log\cot\frac{ea}{8r} - \frac{a\pi}{r^2\sin\frac{1}{2}\psi} + \frac{1+\cos\frac{1}{2}\psi^2}{\sin\frac{1}{2}\psi^3} \cdot \frac{\delta\varepsilon}{8r^3}.$$

Auch dieser Werth ist nahe konstant für solche Werthe von ψ, welche von π wenig verschieden sind, wie man ersieht, wenn man den Differentialquotienten entwickelt, nämlich

$$\frac{\cos\frac{1}{2}\psi}{2r^2\sin\frac{1}{2}\psi^2}\left(a\pi - \frac{\delta\varepsilon}{4r}\left(1 + \frac{3}{2}\,\frac{1+\cos\frac{1}{2}\psi^2}{\sin\frac{1}{2}\psi^2}\right)\right),$$

welcher für $\psi = \pi$ Null ist. Ausserdem kann aber der Werth von $\delta\varepsilon$ so bestimmt werden, dass auch der zweite und dritte Differentialquotient für $\psi = \pi$ Null ist, welches der Fall ist, wenn

$$\delta\varepsilon = \frac{8}{5}a\pi r$$

ist. Substituirt man diesen Werth von $\delta\varepsilon$ in dem Ausdruck der elektromotorischen Kraft, so erhält man

$$\frac{2a}{r^2}\log\cot\frac{ea}{8r} + \frac{2a\pi}{5r^2\sin\frac{1}{2}\psi^3}(3\cos\frac{1}{2}\psi^2 - 2),$$

dessen Differentialquotient

$$= -\frac{3}{5}\,\frac{a\pi\cos\frac{1}{2}\psi^3}{r^2\sin\frac{1}{2}\psi^4}$$

für $\psi = \pi$ Null ist, weil er $\cos \frac{1}{2}\pi = 0$ zum Faktor hat. Auch sieht man, dass die beiden folgenden Differentialquotienten für $\psi = \pi$ Null werden, weil sie ebenfalls den Faktor $\cos \frac{1}{2}\pi = 0$ haben.

Man ersieht hieraus, dass nach dieser Hypothese der Werth der elektromotorischen Kraft in allen anderen Theilen der Kette grösser ist, als der für die Mitte der Kette gültige Grenzwerth, statt er nach der Ohm'schen Hypothese kleiner war. Die richtige Hypothese über die Vertheilung der freien Elektricität, aus welcher sich eine überall gleiche elektromotorische Kraft ergeben soll, ist also zwischen den von den beiden obigen Hypothesen gegebenen Grenzen eingeschlossen, was so viel heisst als: die elektrische Ladung der Kette wächst von dem Indifferenzpunkte zu dem Kontaktpunkte nicht gleichförmig, sondern allmählig beschleunigt. Die daraus hervorgehende, überall gleiche elektromotorische Kraft wird dann muthmaasslich zwischen den durch die beiden obigen Hypothesen gegebenen Grenzwerthen liegen, nämlich

$$\frac{2a}{r^2}\left(\log\cot\frac{ea}{8r} - \frac{1}{2}\pi\right) \text{ und } \frac{2a}{r^2}\left(\log\cot\frac{ea}{8r} - \frac{2}{5}\pi\right).$$

Der Faktor a bezieht sich dabei auf das *Gefälle* der elektrischen Ladung in der Mitte der Kette, wenn man nach Ohm unter Gefälle den Differentialquotienten der Ladung $f\varphi$ in Beziehung auf den Bogen φ versteht.

31.

Die Vertheilung der freien Elektricität in einem *linearen* Leiter, durch welchen ein konstanter Strom geht, und die Grösse der von dieser Vertheilung abhängigen elektromotorischen Kraft kann in jedem einzelnen Falle genähert auf folgende Weise bestimmt werden. Der Einfachheit wegen soll auch hier für den Leiter die Form eines Kreises angenommen werden und für einen einzigen Punkt desselben eine elektromotorische Kraft $= a$ gegeben sein.

Theilt man den Kreis durch die Punkte A, (A^1), B, (A_1) in vier gleiche Theile und ist B der Punkt, für welchen die elektromotorische Kraft $= a$ gegeben ist, so lässt sich leicht eine Vertheilung freier Elektricität in den beiden Punkten (A^1) und (A_1) angeben, durch welche die elektromotorischen Kräfte in den beiden Punkten A und B ausgeglichen werden. Denn bezeichnet $+e$ die freie Elektricität in (A^1), $-e$ in (A_1) und r den Halbmesser des Kreises, so ist $2r \sin \frac{1}{4}\pi = r\sqrt{2}$ der Abstand der Punkte A und B von (A^1) oder (A_1). Hieraus ergiebt sich nach dem Grundgesetze der Elektrostatik die elektromotorische Kraft nach der Richtung der Tangente des Kreises

in B $$= a - \frac{2e}{4r^2 \sin \frac{1}{4}\pi^2} \cdot \cos \tfrac{1}{4}\pi = a - \frac{e}{r^2}\sqrt{\frac{1}{2}},$$

in A $$= + \frac{2e}{4r^2 \sin \frac{1}{4}\pi^2} \cdot \cos \tfrac{1}{4}\pi = + \frac{e}{r^2}\sqrt{\frac{1}{2}},$$

folglich für die verlangte Ausgleichung

$$a = \frac{e}{r^2} \cdot \sqrt{2},$$

oder

$$\pm e = \pm ar^2 . \sqrt{\tfrac{1}{2}} .$$

Auf gleiche Weise ergiebt sich, wenn der Kreis durch die Punkte A, (A^1), A^1, (A^2), etc. in $4n$ gleiche Theile getheilt wird und in dem A diametral gegenüberliegenden Punkte B die elektromotorische Kraft $= a$ gegeben ist, eine solche Vertheilung freier Elektricität in $2n$ Punkten (A^1), (A^2), etc., durch welche die elektromotorischen Kräfte in den $2n$ Punkten A, A^1, etc. ausgeglichen werden. Denn bezeichnet $\pm e_1$ die freie Elektricität in (A^1), (A_1), $\pm e_2$ in (A^2), (A_2), etc., und r den Halbmesser des Kreises, und setzt man $\dfrac{\cos \frac{(2m-1)\pi}{4n}}{4r^2\left[\sin \frac{(2m-1)\pi}{4n}\right]^2} = p_m$, so findet man die elektromotorische Kraft nach der Richtung der Tangente des Kreises

in B $$= a - 2p_n \cdot e_1 - 2p_{n-1} \cdot e_2 - \cdot \cdot \cdot - 2p_1 \cdot e_n,$$

in A $$= 2p_1 e_1 + 2p_2 e_2 + \cdot \cdot \cdot + 2p_n e_n,$$

in A^m oder in A_m

$$= -p_m e_1 \quad - p_{m-1} e_2 - \cdot \cdot \cdot - p_1 e_m \quad + p_1 e_{m+1} \quad + \cdot \cdot \cdot + p_{n-m} e_n$$
$$+ p_{m+1} e_1 + p_{m+2} e_2 + \cdot \cdot \cdot + p_n e_{n-m} - p_n e_{n-m+1} - \cdot \cdot \cdot - p_{n-m+1} e_n$$

worin für m alle ganzen Zahlen von 1 bis $n-1$ gesetzt werden können. Durch Gleichsetzung aller dieser $(n+1)$ Werthe erhält man n Gleichungen zur Bestimmung der n unbekannten Grössen e_1, e_2, $\cdot \cdot \cdot$ e_n.

Ferner ergiebt sich der Mittelwerth der beiden ersten von obigen $(n+1)$ gleichgesetzten elektromotorischen Kräften k

$$k = \tfrac{1}{2} a + (p_1 - p_n) e_1 + (p_2 - p_{n-1}) e_2 + \cdot \cdot \cdot ,$$

und die Summe aller zusammen

$$(n+1) k = a + (p_1 - p_n) e_1 + (p_2 - p_{n-1}) e_2 + \cdot \cdot \cdot ,$$

folglich

$$(n+1) k - a = k - \tfrac{1}{2} a,$$

oder

$$a = 2nk .$$

Z. B. für $n = 2$ ergiebt sich

$$e_1 = 0{,}01567 \,.\, 4r^2a,$$
$$e_2 = 0{,}05833 \,.\, 4r^2a,$$
$$k = \tfrac{1}{4}a;$$

für $n = 4$:

$$e_1 = 0{,}001537 \,.\, 4r^2a,$$
$$e_2 = 0{,}004744 \,.\, 4r^2a,$$
$$e_3 = 0{,}008570 \,.\, 4r^2a,$$
$$e_4 = 0{,}015922 \,.\, 4r^2a,$$
$$k = \tfrac{1}{8}a;$$

für $n = 8$:

$$e_1 = 0{,}0001582 \,.\, 4r^2a,$$
$$e_2 = 0{,}0004771 \,.\, 4r^2a,$$
$$e_3 = 0{,}0008047 \,.\, 4r^2a,$$
$$e_4 = 0{,}0011495 \,.\, 4r^2a,$$
$$e_5 = 0{,}0015271 \,.\, 4r^2a,$$
$$e_6 = 0{,}0019726 \,.\, 4r^2a,$$
$$e_7 = 0{,}0025951 \,.\, 4r^2a,$$
$$e_8 = 0{,}0041187 \,.\, 4r^2a,$$
$$k = \tfrac{1}{16}a.$$

Je grösser die Zahl n ist, desto mehr nähert sich der Werth von e_1 den Werthen

$$\tfrac{1}{3}e_2,\ \tfrac{1}{5}e_3 \ldots.$$

Vertheilt man nun die Massen $e_1, e_2 \ldots e_m$, für welche die Abweichungen von den Massen $e_1, 3e_1, \ldots (2m - 1)e_1$ als unmerklich vernachlässigt werden dürfen, auf die m Kreisbogen $\pi r/n$, in deren Mitte sie liegen, dem Abstande x vom Punkte A proportional, so ist, wenn b einen konstanten Faktor bezeichnet,

$$b\int\limits_0^{\frac{m}{n}\pi r} x\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}b \cdot \frac{m^2\pi^2r^2}{n^2} = e_1 + e_2 + \cdot\cdot + e_m = m^2e_1,$$

folglich

$$b = \frac{2n^2}{\pi^2} \cdot \frac{e_1}{r^2}.$$

Nun war die elektromotorische Kraft der in der Mitte der m Kreisbogen $\pi r/n$ koncentrirten Massen $e_1, e_2 \ldots . e_m$ im Punkte A, wenn der Kreisbogen $m/n \,.\, \pi r$ so klein ist, dass seine Abweichung von der geraden Linie als unmerklich betrachtet werden darf,

von e_1 $\qquad = \frac{4n^2}{\pi^2 r^2} \cdot e_1,$

von e_2 $\qquad = \frac{4n^2}{\pi^2 r^2} \cdot \frac{1}{9} e_2 = \frac{4n^2}{\pi^2 r^2} \cdot \frac{1}{3} e_1,$

von e_m $\qquad = \frac{4n^2}{\pi^2 r^2} \cdot \frac{1}{(2m-1)^2} e_m = \frac{4n^2}{\pi^2 r^2} \cdot \frac{1}{2m-1} \cdot e_1,$

also die ganze von diesen m Massen im Punkte A ausgeübte elektromotorische Kraft

$$= \frac{4n^2}{\pi^2 r^2}\left(1 + \tfrac{1}{3} + \cdot \cdot + \frac{1}{2m-1}\right) e_1 = 2\left(1 + \tfrac{1}{3} + \cdot \cdot + \frac{1}{2m-1}\right) b.$$

Die elektromotorische Kraft dagegen, welche von der nämlichen, nach dem angegebenen Gesetze stetig auf den ganzen Bogen $m\pi r/n$ vertheilten Masse im Punkte A ausgeübt wird, wenn diese lineare Vertheilung nach Art. 30 die Stelle der wirklichen Vertheilung auf der Oberfläche eines dünnen Drahts von dem Halbmesser a vertritt, wird gefunden

$$b \int_{\frac{ea}{2}}^{\frac{m}{n}\pi r} \frac{dx}{x} = b \log \text{nat} \frac{2m\pi r}{nea}.$$

Die beiden Ausdrücke für die von den m Massen im Punkte A ausgeübte elektromotorische Kraft sind gleich, wenn a einen solchen Werth erhält, dass

$$2\left(1 + \tfrac{1}{3} + \cdot \cdot + \tfrac{1}{2m-1}\right) = \log \text{nat} \frac{2m\pi r}{nea},$$

d. i.

$$ea = \frac{2m}{n} \pi r e^{-2\left(1 + \frac{1}{3} + \cdot \cdot + \frac{1}{2m-1}\right)}$$

ist, worin e die Grundzahl des natürlichen Logarithmensystems bezeichnet. Je grösser die Zahl n und folglich auch die Zahl m ist, desto geringer ist der Einfluss, welchen es auf den Werth von a hat, ob die Zahl m um einen oder einige Einheiten grösser oder kleiner genommen wird. Denn bezeichnet m eine grössere Zahl und a' den Werth, welchen a erhält, wenn m um 1 vergrössert wird, so lässt sich a' darstellen durch $(2m^2 + 3m + 1)\, a / (2m^2 + 3m)$, was für grosse Werthe von m nur wenig von a verschieden ist. Für diesen Werth von a können also die in den Mittelpunkten der m Kreisbogen $\pi r/n$ koncentrirten Massen freier Elektricität an die Stelle einer gleich grossen, an der Oberfläche des Leiters stetig vertheilten Masse gesetzt werden; denn für den dem betrachteten Punkte zunächst liegenden Theil der Kette folgt dies aus

der eben nachgewiesenen Gleichheit der elektromotorischen Kräfte, für die ferneren Theile der Kette leuchtet es aber eben so wie Art. 30 von selbst ein.

Für den oben betrachteten Fall, wenn $n = 8$ ist, sieht man leicht, dass m nicht grösser als 2 genommen werden kann; folglich

$$ea = \tfrac{1}{2}\pi r e^{-\frac{8}{3}} = 0{,}10915 \,.\, r\,.$$

Dieser Werth von a ist nun allerdings, weil so kleine Werthe von n und m ihm zu Grunde gelegt worden, nicht als genau zu betrachten und ergiebt sich ausserdem zu gross, als dass die Art. 30 entwickelten Regeln, welche nur für kleine Werthe von a gelten, mit hinreichender Genauigkeit angewendet werden könnten. Eine genauere Anwendung dieser Regeln würde fordern, dass n nicht kleiner als 32 wäre, wo, wenn man $m = 4$ annähme,

$$ea = \tfrac{1}{4}\pi r e^{-\frac{352}{105}} = 0{,}02749 \,.\, r$$

erhalten würde. Der vorliegende Fall möge daher nur zur Erläuterung dienen, wie auf dem angegebenen Wege, trotz der Ungenauigkeit und der Grösse von a, die Vertheilung der freien Elektricität im Leiter und die daraus resultirende elektromotorische Kraft doch einigermassen näherungsweise bestimmt werde. Ausser dem Werthe von ea

$$ea = 0{,}10915\, r$$

erhält man nämlich für diesen Fall

$$b = \frac{32}{\pi^2} \cdot \frac{e_1 + e_2}{r^2} = 0{,}008239 \,.\, a\,,$$

und die in der ganzen Kette gleiche elektromotorische Kraft

$$k = \tfrac{1}{16}\, a.$$

Diese Resultate lassen sich nur mit den S. 382 gegebenen Formeln vergleichen, wonach dieselbe elektromotorische Kraft näherungsweise durch folgende beide Ausdrücke dargestellt werden soll, nämlich durch

$$\frac{2a}{r^2}\left(\log\cot\frac{ea}{8r} - \frac{1}{2}\pi\right)$$

oder durch

$$\frac{2a}{r^2}\left(\log\cot\frac{ea}{8r} - \frac{2}{5}\pi\right),$$

wobei zu beachten ist, dass dort das Massenelement der freien Elektricität in dem Bogenelemente $rd\varphi$, welches in einer kleinen Entfernung $r\varphi$ vom Indifferenzpunkte A sich befindet, durch $a\varphi d\varphi$ ausgedrückt worden ist, während hier dasselbe Massenelement mit $bxdx$ bezeichnet wurde, wo $x = r\varphi$ und $dx = rd\varphi$ ist: es ist also in diesen beiden

Formeln $a = br^2$ zu setzen. Hiernach ergiebt sich nun näherungsweise entweder

$$k = 2b\left(\log\cot\frac{ea}{8r} - \frac{1}{2}\pi\right) = 0{,}04488 \,.\, a$$

oder

$$k = 2b\left(\log\cot\frac{ea}{8r} - \frac{2}{5}\pi\right) = 0{,}05006 \,.\, a$$

statt oben $k = \frac{1}{16}a = 0{,}0625 \,.\, a$ gefunden worden ist. Man sieht also hieraus, dass, wenn der oben berechnete Werth von k mit den beiden letzteren Näherungswerthen auch nicht genau übereinstimmt, was bei der Ungenauigkeit und Grösse des Werths von a unmöglich ist, jener Weg doch selbst unter diesen ungünstigen Verhältnissen wenigstens zu einem Werthe für k von gleicher Grössenordnung führt. Eine grössere Uebereinstimmung darf erwartet werden, wenn die Rechnung z. B. für $n = 32$ oder für noch grössere Zahlen ausgeführt würde. Durch eine angemessene Vergrösserung der Zahlen n und m würde sich die Vertheilung der freien Elektricität in dem linearen Leiter sowohl, als auch die davon abhängige elektromotorische Kraft näherungsweise mit jeder verlangten Schärfe bestimmen lassen.

Es ist übrigens kaum nöthig, besonders zu bemerken, dass in obiger Darstellung die Kreisform des Leiters nur beispielsweise zur Vereinfachung der Rechnung gewählt worden ist, dass aber dieselbe Methode für jede andere lineare Form des Leiters anwendbar bleibt. Dasselbe gilt auch, wenn statt einer elektromotorischen Kraft mehrere solche Kräfte an verschiedenen Stellen des Leiters gegeben sind, oder wenn der Leiter in Abtheilungen von verschiedenem specifischen Widerstande zerfällt, und daher eine ungleichförmige Vertheilung der elektromotorischen Kraft nach Proportion dieses Widerstands Statt finden muss. Ueberhaupt ist die Anwendung dieser Methode, abgesehen von dem Umfange der Rechnung, nur dadurch beschränkt, dass *lineare* Leiter vorausgesetzt werden.

32.

Nachweisung, wie die zu einem gleichförmigen und beharrlichen Strome nothwendige Vertheilung der freien Elektricität an der Oberfläche des geschlossenen Leiters entstehe.

Es leuchtet ein, dass, wenn nur in einzelnen Punkten einer geschlossenen Kette elektromotorische Kräfte gegeben sind, unmittelbar nur in diesen Punkten eine elektrische Strömung beginnen kann und nicht in der ganzen Kette; denn in allen denjenigen Theilen der Kette, auf welche keine elektromotorischen Kräfte wirken, werden die elek-

trischen Fluida auch nicht bewegt. Beginnen aber die elektrischen Fluida an den Stellen, wo elektromotorische Kräfte gegeben sind, sich zu bewegen, und zwar das positive Fluidum nach der einen Richtung, das negative nach der entgegengesetzten Richtung, während die Fluida vor ihnen noch in Ruhe beharren, so wird durch dieses Fortschieben des positiven Fluidums nach der einen Seite zu auf dieser Seite eine Ansammlung von freier positiver Elektricität hervorgebracht, welche sogleich eine elektromotorische Kraft vorwärts und rückwärts ausübt. Rückwärts schwächt sie die Wirkung der gegebenen elektromotorischen Kraft oder hebt dieselbe auf, vorwärts übt sie eine elektromotorische Kraft in gleichem Sinne aus, wie die gegebene, nur an einer anderen Stelle der Kette. Dasselbe gilt auch von dem in entgegengesetzter Richtung fortgeschobenen negativen Fluidum, so lange die elektrischen Fluida in dem vor ihm gelegenen Theile der Kette in Ruhe verharren. Auch die daraus sich ergebende Ansammlung freier negativer Elektricität wirkt sogleich rückwärts und vorwärts, schwächt nämlich rückwärts die Wirkung der gegebenen elektromotorischen Kraft und übt vorwärts eine elektromotorische Kraft in gleichem Sinne aus, wie die gegebene, nur an einer anderen Stelle der Kette. Setzt man diese Betrachtung fort, so übersieht man im Allgemeinen, dass nur bei einem gleichförmigen Strome in allen Theilen der Kette diese Ansammlungen freier Elektricität zu wachsen aufhören und stationär werden können, und dass jede Abweichung von der Gleichförmigkeit des Stroms unmittelbar eine Veränderung in diesen Ansammlungen mit sich führt, welche so lange zunimmt, bis die Ungleichförmigkeit des Stroms wieder verschwunden ist.

Die Art. 29, 30 erörterte Vertheilung der freien Elektricität an der Oberfläche des Leiters ist nun zwar der Art, dass kein Gleichgewicht der vertheilten freien Elektricität dabei bestehen kann; denn dazu wäre nöthig, dass die Resultante aller Kräfte, welche ein Theilchen der freien Elektricität an der Oberfläche von allen übrigen erleidet, gegen die Oberfläche senkrecht und nach aussen gerichtet wäre, was nicht der Fall ist. Denn aus der Art. 29 gegebenen Darstellung erhellt von selbst, dass ausser einer gegen die Oberfläche senkrechten, nach aussen gerichteten Kraft noch eine tangentiale Kraft für jedes Theilchen der freien Elektricität an der Oberfläche resultire, woraus folgt, dass diese freie Elektricität an der Oberfläche nicht in Ruhe beharren könne, sondern an der Strömung, welche im Innern Statt findet, Antheil nehmen müsse. Diese Theilnahme der freien Elektricität der Oberfläche an der Strömung im Innern kann aber mit einer unveränderten Vertheilung der freien Elektricität an der Oberfläche des Leiters wohl bestehen. Denn stellt man die Vertheilung aller strömenden positiven

Elektricität, am Rande und im Innern, für den zu einer geraden Linie ausgestreckt gedachten Leiter AA' durch die Ordinaten einer anderen geraden Linie BC dar und eben so die Vertheilung aller strömenden negativen Elektricität durch die Ordinaten einer dritten geraden Linie $B'C'$, welche die Linie BC in O schneidet, so sind nach dieser Darstellung im Querschnitt OP beide Fluida in gleicher Menge vorhanden; von P nach A zu wächst aber der Ueberschuss an positiver Elektricität proportional mit dem Abstande von P; von P nach A' zu wächst der Ueberschuss an negativer Elektricität ebenfalls proportional mit dem Abstande von P. Die allgemeine Strömung wird alsdann durch ein gleich schnelles Fortrücken der Linien BC und $B'C'$ in entgegengesetzter Richtung parallel mit AA' dargestellt, woraus sich leicht ergiebt, dass die Ordinate des Schneidungspunkts beider Linie PO, d. h. der Indifferenzpunkt der Kette, unverrückt bleibt und dass auch durch dieses Fortrücken das Wachsthum des Ueberschusses an einer von beiden Elektricitäten mit dem Abstande von P unverändert bleibt, wenn nur vorausgesetzt werden

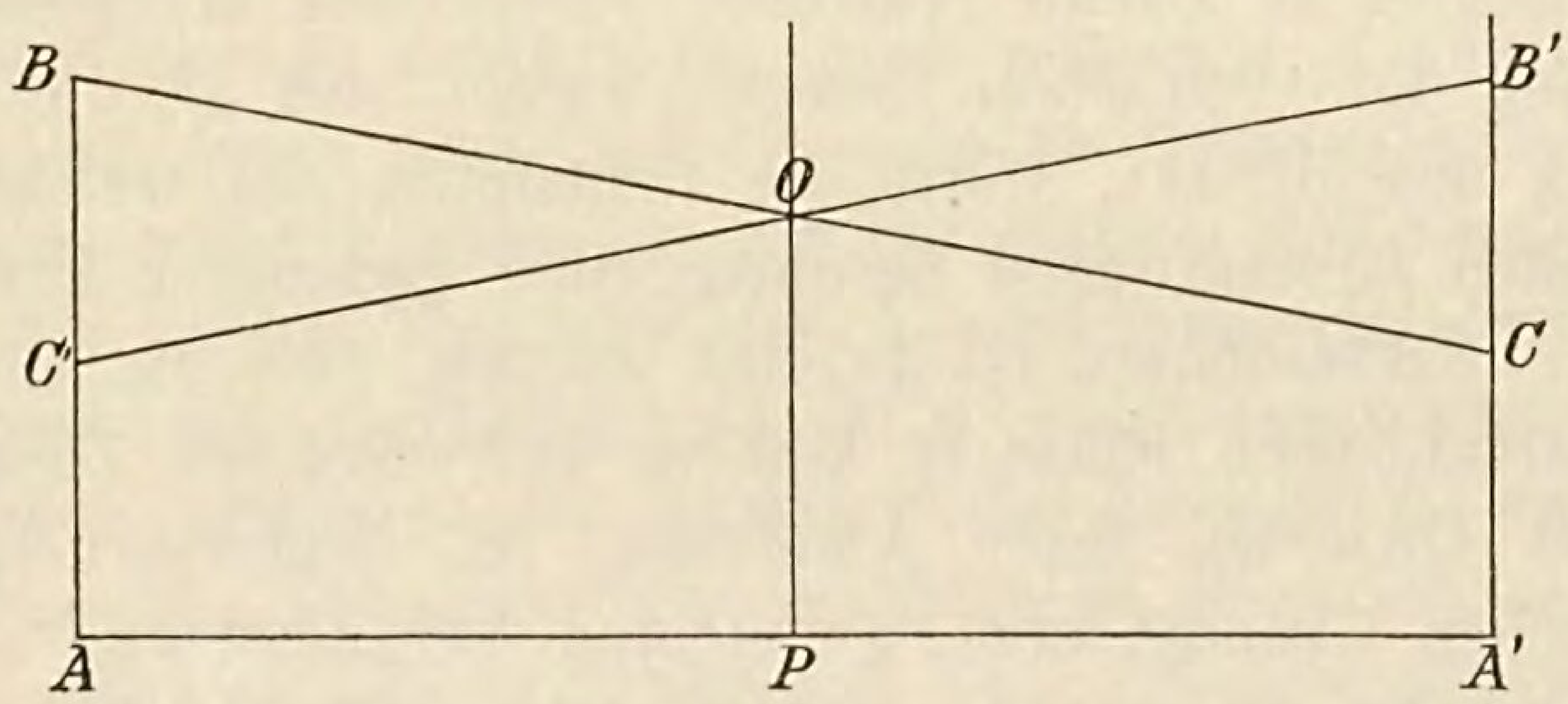


Fig. 5.

darf, dass in den Kontaktpunkten A, A' die fortgerückte Elektricität durch neu geschiedene immer so ersetzt wird, dass die fortgerückten Geraden BC und $B'C'$ rückwärts immer so weit verlängert werden, dass sie bis zu den Ordinaten der Punkte A, A' sich erstrecken. Nach dieser bildlichen Darstellung könnte es scheinen, als wenn die Menge der zwischen A und A' strömenden Elektricität immer grösser würde. Dies kommt daher, weil dabei die in A und A' immer neu geschiedene und nach entgegengesetzten Seiten bewegte Elektricität in Rechnung gebracht ist, während auf die zwischen A und A' durch Wiedervereinigung zur Ruhe kommenden Elektricität keine Rücksicht genommen ist. Diese allmählige Wiedervereinigung beider elektrischen Fluida zwischen A und A' lässt sich aber auch leicht bildlich darstellen durch ein Fortrücken der Abscissenlinie nach oben, welches mit solcher Geschwindigkeit geschehen kann, dass die Ordinate PO immer gleiche Länge behält, wodurch ausgedrückt wird, dass die Menge der daselbst befindlichen positiven und negativen Elektricität unverändert bleibt.

In dieser Darstellung ist das Ohm'sche Gesetz der Proportionalität für die Ladung der Kette angenommen. Sollte auf die in den vorhergehenden Artikeln erörterte Abweichung von diesem Gesetze Rücksicht genommen werden, so müsste zugleich auch der Unterschied der Geschwindigkeit in Rechnung gebracht werden, mit welcher die beiden Elektricitäten strömen müssen, wenn, bei einem vorhandenen Ueberschuss der einen, gleiche Quantitäten von beiden durch den Querschnitt gehen sollen. Auch dürfte dann, bei genauerer Erörterung, das elektrostatische Princip, welches hier der Einfachheit wegen zum Grunde gelegt worden ist, nicht mehr genügend befunden und daher das Zurückgehen auf das allgemeine Grundgesetz der elektrischen Wirkung für nothwendig erachtet werden.

33.

Während des Drucks dieser Abhandlung ist in Poggendorff's Annalen Bd. 79, S. 506 eine von Herrn Dr. Kirchhoff der physikalischen Gesellschaft zu Berlin gemachte Mittheilung erschienen: „Ueber eine Ableitung der Ohm'schen Gesetze, welche sich an die Theorie der Elektrostatik anschliesst", worin die Principien, auf welchen auch die vorhergehenden Erörterungen beruhen, einer genaueren Prüfung unterworfen sind. Insbesondere ist gezeigt worden, dass die Ohm'schen Gesetze der galvanischen Kette in keinem nothwendigen Zusammenhange mit der von Ohm bei ihrer Ableitung, im Widerspruche mit dem elektrostatischen Grundgesetze, gemachten Voraussetzung stehen, dass die Elektricität in einem Leiter sich in Ruhe befinden könne, wenn sie den Rauminhalt desselben mit gleichmässiger Dichtigkeit erfülle; dass vielmehr die Ableitung jener Gesetze unverändert bleibe, wenn man statt jener mit dem elektrostatischen Grundgesetze im Widerspruch stehenden Voraussetzung eine andere damit übereinstimmende und daraus mit Nothwendigkeit resultirende substituirt, nämlich dass das neutrale elektrische Fluidum in einem Leiter sich in Ruhe befinden könne, wenn das *Potential* der an seiner Oberfläche vertheilten freien Elektricität im Innern des Leiters überall gleichen Werth hat, und wenn man, im Verlaufe der Ableitung, im Innern des Leiters den Potentialwerth der freien, an der Oberfläche befindlichen Elektricität für die Dichtigkeit der Elektricität setzt, welche nach Ohm im Innern des Leiters selbst Statt finden soll. Die von Kirchhoff hiervon gegebene Nachweisung ist so kurz gefasst, dass sie keinen Auszug gestattet, und es muss deshalb auf das Original selbst verwiesen werden. Es möge daraus nur die Schlussbemerkung angeführt werden, welche Kirchhoff beigefügt hat, durch die er die Zurückführung der Gesetze der galvanischen Kette auf das Grundgesetz der *Elektrostatik* zu rechtfertigen sucht, da doch

die Gesetze der galvanischen Kette *elektrodynamische* Erscheinungen betreffen, zu deren Erklärung sonst das elektrostatische Grundgesetz im Allgemeinen nicht genügt. Es heisst a. a. O. S. 512:

„Den durchgeführten Betrachtungen liegt das elektrostatische Gesetz der Wirkung elektrischer Theilchen zu Grunde. Aus diesem Gesetze lassen sich die Ampère'schen elektrodynamischen Erscheinungen und die Inductionserscheinungen nicht erklären; Weber hat ein allgemeineres Gesetz gefunden, durch welches es ihm gelungen ist, jene Erscheinungen zu erklären, ein Gesetz, in dessen Ausdruck die relative Geschwindigkeit der Theilchen, deren Wirkung auf einander betrachtet wird, vorkommt, und das in das elektrostatische übergeht, wenn diese Geschwindigkeit verschwindet. Um die verschiedenen Felder der Elektricitätslehre unter einen Gesichtspunkt zu bringen, muss man sich daher die Aufgabe stellen, die Gesetze der Strömungen in der geschlossenen Kette aus dem Weber'schen Gesetze abzuleiten. Diese Herleitung scheint schwer zu sein, doch ist es leicht, *a posteriori* zu beweisen, dass die Vorstellung von den Strömungen, zu denen die Annahme des elektrostatischen Gesetzes geführt hat, auch mit dem Weber'schen Gesetze in Einklang ist, wenn man noch eine gewisse Hypothese zu Hülfe nimmt, die Hypothese nämlich, dass bei der Berechnung der Kraft, welche eine Scheidung der beiden Elektricitäten in dem Raumelemente v eines der Leiter hervorbringt, die Elektricitäten in v als ruhend angesehen werden müssen. Diese Annahme hat nichts Widerstrebendes, wenn man sich vorstellt, dass die Bewegung der Elektricität in einem Leiter nur von Molekül zu Molekül vor sich geht, so dass jedes Elektricitätstheilchen bei einem Molekül, bei dem es ankommt, einen Ruhepunkt findet. Bei dieser Vorstellung kann man leicht zugeben, dass die Elektricitätsmenge, die von einem Molekül zu einem benachbarten übergeführt wird, nur durch die Kräfte bedingt wird, die auf die Elektricitätstheilchen ausgeübt werden, während sie noch an jenem Molekül sich in Ruhe befinden, nicht aber durch die Kräfte, die auf sie wirken, während sie schon auf dem Wege zum folgenden Molekül sind. In Bezug auf die Theorie der Induktion, die Weber gegeben hat, ist es gleichgültig, ob man diese Annahme macht oder nicht. Macht man dieselbe und denkt sich übrigens die Strömungen in der Kette so, wie sie die Voraussetzung des elektrostatischen Gesetzes ergeben hat, so ist es, in Bezug auf die Grösse und die Richtung der Kraft, welche die Elektricitäten in dem Elemente v zu scheiden strebt, — also in Bezug auf die elektromotorische Kraft, wie Weber sie nennt, — gleichgültig, ob man von dem elektrostatischen oder dem Weber'schen Gesetze ausgeht. Der Unterschied, der möglich wäre, müsste nämlich herrühren von den Kräften, welche die in den anderen Theilen des Systems strömenden Elektricitäten ausüben, und

diese Kräfte tragen nach dem, was Weber bewiesen hat, zu jener elektromotorischen Kraft nichts bei, da die Strömungen konstant sind und gleiche Mengen der beiden Elektricitäten nach entgegengesetzten Richtungen mit derselben Geschwindigkeit führen."

34.

Durch Vergleichung elektromotorischer und galvanometrischer Beobachtungen der galvanischen Kette diejenige relative Geschwindigkeit zweier elektrischer Massen zu bestimmen, bei welcher weder Anziehung noch Abstossung Statt findet.

Ist das Gesetz der Vertheilung der freien Elektricität an der Oberfläche des Leiters eines gleichförmigen und beharrlichen Stroms gegeben, so lässt sich darauf eine für die Elektricitätslehre im Allgemeinen wichtige Anwendung gründen. Es leuchtet nämlich ein, dass alsdann die elektromotorische Kraft einer Kette auf doppelte Weise bestimmt werden kann, nämlich *erstens* aus ihrer Wirkung, d. h. aus der Intensität des von ihr bei einem bekannten Widerstande der Kette hervorgebrachten Stroms. Hierdurch wird die Bestimmung der elektromotorischen Kraft von den Messungen der Stromintensität und des Widerstands der Kette abhängig gemacht, welche beide, wie in dieser Abhandlung gezeigt worden ist, nach absoluten Maassen ausführbar sind. *Zweitens* kann sie aus ihrer Ursache bestimmt werden, d. h. aus der auf der Oberfläche des Leiters vertheilten freien Elektricität. Sind die Stromintensität i und der Widerstand der Kette w nach den Art. 26 definirten Maassen gefunden, so wird die elektromotorische Kraft der ganzen Kette nach dem dort angegebenen Maasse durch das Produkt

$$i w$$

bestimmt, und dieser Werth kann nach Art. 27 durch Multiplikation mit $4/c$ auf das allgemeine Kraftmaass der Mechanik reducirt werden, wo c die relative Geschwindigkeit bezeichnet, mit welcher zwei elektrische Massen gegen einander bewegt werden müssen, wenn sie einander weder anziehen noch abstossen sollen. Die elektromotorische Kraft der ganzen Kette ist also nach dem allgemeinen Kraftmaasse der Mechanik, aus ihrer Wirkung berechnet,

$$= \frac{4}{c} i w .$$

Zur Bestimmung der elektromotorischen Kraft derselben Kette aus ihrer Ursache möge nun der im 30. Artikel gefundene Ausdruck

$$\frac{2a}{r^2}\left(\log\cot\frac{ea}{8r} - \beta\pi\right)$$

zum Grunde gelegt werden, worin β einen kleineren Werth als $\frac{1}{2}$ und einen grösseren als $\frac{2}{5}$ hat. Nach Seite 378 bezeichnet hierin a denjenigen Faktor, welcher mit $(\varphi - \pi)\,\mathrm{d}\varphi$ multiplicirt die Masse der freien Elektricität giebt, welche auf dem Längenelemente der Kette $r\,\mathrm{d}\varphi$ am Ende des Bogens $r\varphi$ vertheilt ist. Ist nun die Masse der freien Elektricität zweier Elemente der Kette von der Länge $\mathrm{d}x$, das eine am Ende des Bogens $\pi - \chi$, das andere am Ende des Bogens $\pi + \chi$ wirklich gemessen und erstere $= E\,\mathrm{d}x$, letztere $= E'\,\mathrm{d}x$ gefunden, so ist

$$E\,\mathrm{d}x = -a\chi\,\mathrm{d}\chi,$$
$$E'\,\mathrm{d}x = +a\chi\,\mathrm{d}\chi$$

und $r\,\mathrm{d}\chi = \mathrm{d}x$ zu setzen; folglich

$$a = \frac{r}{2\chi}(E' - E).$$

Setzt man nun diesen Werth für a in obigen Ausdruck, so erhält man

$$\frac{E' - E}{r\chi}\left(\log\cot\frac{ea}{8r} - \beta\pi\right).$$

Dieser Ausdruck giebt aber nicht die elektromotorische Kraft für die ganze Länge der Kette, sondern nur für ein dem Längenmaasse gleiches Stück der Kette und muss mit der Länge der Kette $= 2\pi r$ multiplicirt werden, wenn die elektromotorische Kraft der ganzen Kette erhalten werden soll, nämlich:

$$\frac{2\pi}{\chi}(E' - E)\left(\log\cot\frac{ea}{8r} - \beta\pi\right).$$

Hiernach ergiebt sich nun endlich durch Gleichsetzung der nach beiden Methoden bestimmten elektromotorischen Kraft der ganzen Kette folgende Gleichung:

$$\frac{4}{c}\,iw = \frac{2\pi}{\chi}(E' - E)\left(\log\cot\frac{ea}{8r} - \beta\pi\right)$$

oder

$$c = \frac{2\chi}{\pi}\,\frac{iw}{E' - E}\cdot\frac{1}{\log\cot\frac{ea}{8r} - \beta\pi}.$$

Es ist also hierdurch diejenige Geschwindigkeit c bestimmt, mit welcher zwei elektrische Massen gegen einander bewegt werden müssen, wenn sie einander weder abstossen noch anziehen sollen. Aus dem Grundgesetze der Wechselwirkung zweier elektrischer Massen, wie es in der ersten Abhandlung über „Elektrodynamische Maassbestimmungen“ ausgesprochen worden ist, so wie aus Art. 27 in dieser Abhandlung, wo gezeigt worden ist, dass, wenn diese Geschwindigkeit c bekannt ist, alle elektromotorischen Kräfte nach dem in der Mechanik festgesetzten

Kraftmaasse ausgedrückt werden können, leuchtet die Wichtigkeit der Bestimmung dieser Geschwindigkeit c von selbst ein. Bei dieser Bedeutung von c ist es aber selbst schon von Interesse, die Möglichkeit einer solchen Bestimmung nachzuweisen, auch wenn die wirkliche Ausführung auf Hindernisse stossen sollte, welche noch nicht überwunden werden könnten, weil es dazu noch an den geeigneten Instrumenten fehlt. In der That dürften jetzt noch solche Hindernisse der Ausführung der feinen elektrometrischen Messungen entgegenstehen, durch welche die Grössen E' und E gefunden werden sollen. Alle unsere jetzigen Elektroskope und Elektrometer scheinen zur Ausführung dieser Messungen nicht geeignet: es würde damit nur möglich sein, das Verhältniss der Grössen E und E' zu bestimmen, aber nicht ihren absoluten Werth, wenigstens ist bisher kein Versuch dieser Art damit gemacht worden. Die Konstruktion neuer Elektroskope und Elektrometer, welche dazu geeigneter wären, bildet aber eine Aufgabe für sich, mit der wir uns hier nicht beschäftigen, weil wir uns in dieser Abhandlung nur auf elektrodynamische Maassbestimmungen beschränken.

35.

Ueber das Verhältniss der Geschwindigkeit der Strömung zur Geschwindigkeit der Fortpflanzung des Stroms.

Ueber die Geschwindigkeit, mit welcher die elektrischen Fluida selbst in den Leitern sich bewegen, liegen noch gar keine Data vor. Man weiss nur, dass die Geschwindigkeit, mit welcher manche elektrische *Phänomene*, wie der Blitz, sich verbreiten, sehr gross sein müsse, da auch ihre Verbreitung durch die grössten Räume nicht den kleinsten messbaren Zeitraum erfordert. Eben so weiss man nur, dass die Verbreitung eines galvanischen Stroms durch eine lange Kette mit ausserordentlicher Geschwindigkeit geschehe, weil die Zeit, welche erfordert wird, bis ein an einer bestimmten Stelle der Kette erregter Strom in allen Theilen der Kette gleiche Intensität erlangt, so klein ist, dass sie bisher noch auf keine Weise hat gemessen werden können. Die Versuche von Wheatstone über die Ungleichzeitigkeit der Funken, welche an verschiedenen Stellen eines unterbrochenen Leitungsdrahts hervorgebracht werden, wenn die in zwei Konduktoren angesammelten positiven und negativen Elektricitäten durch den Leitungsdraht sich mit einander vereinigen, geben ebenfalls über die Geschwindigkeit, mit welcher die elektrischen Fluida sich bewegen, keine Auskunft, sondern nur über die Fortpflanzung der Bewegung durch das neutrale elektrische Medium im Leitungsdrahte; denn das Erscheinen des Funkens setzt voraus, dass das an der betreffenden Stelle befindliche neutrale elektrische Medium

in Bewegung gesetzt worden ist; setzt aber keineswegs voraus, dass die in den beiden Konduktoren zuvor angesammelte positive oder negative Elektricität selbst durch den Leitungsdraht bis zu dieser Stelle hin gedrungen sei. Die von Wheatstone beobachtete Ungleichzeitigkeit der Funken an verschiedenen Unterbrechungsstellen des Leitungsdrahts kann daher nur Aufschluss geben über die Geschwindigkeit der Verbreitung der Bewegung durch das neutrale elektrische Medium in den dazwischen liegenden Theilen des Leitungsdrahts. Auch in einer geschlossenen und nirgends unterbrochenen Kette, worin durch elektromotorische Kräfte das Gleichgewicht der elektrischen Fluida fortwährend gestört wird, müssen zweierlei Geschwindigkeiten unterschieden werden, nämlich die einer von Theilchen zu Theilchen fortgepflanzten Bewegung und die einer jedem Theilchen eigenthümlichen Bewegung: die erstere heisst die *Geschwindigkeit der Stromverbreitung*, die letztere heisst die *Stromgeschwindigkeit*. Bei einem beharrlichen Strome in einer homogenen Kette ist die Stromgeschwindigkeit überall gleich. Ein solcher Strom heisst ein gleichförmiger, weil er sich durch die ganze Kette gleichförmig *verbreitet* hat, und so lange er unverändert fortdauert, ist von keiner weiteren *Stromverbreitung* mehr die Rede. Soll von einer Stromverbreitung wieder die Rede sein, so muss irgend eine *Veränderung* mit dem Strome vorgehen: der Strom muss stärker oder schwächer werden. Es fragt sich dann, ob jede Aenderung in der Stärke des Stroms, d. i. jede Aenderung in der *Stromgeschwindigkeit*, in allen Theilen der Kette gleichzeitig oder allmählig, in einem Theile nach dem anderen, eintritt. Im *ersteren* Falle würde man sagen, der Strom verbreite sich mit unendlicher Geschwindigkeit durch die Kette oder die Geschwindigkeit der Stromverbreitung sei unmessbar; im *anderen* Falle würde man sagen, der Strom verbreite sich mit endlicher Geschwindigkeit durch die Kette, oder die Geschwindigkeit der Stromverbreitung sei messbar. Es geht hieraus hervor, dass die Messung der Geschwindigkeit der Stromverbreitung eine Veränderung oder einen Wechsel der Stromstärke in der Kette voraussetze, ohne welche von einer solchen Messung gar nicht die Rede sein kann.

Es ist nun schon S. 371 an einem Beispiele erläutert worden, dass Aenderungen der Stromstärke oder der *Stromgeschwindigkeit* in der That möglich sind, welche in allen Theilen der Kette gleichzeitig eintreten, nämlich wenn die gegebenen elektromotorischen Kräfte, welche die Aenderung verursachen, auf alle Theile der Kette unmittelbar, nach Proportion ihres Widerstands, wirken. Ein solcher besonderer Fall beweist aber die Unmessbarkeit der Geschwindigkeit der Stromverbreitung im Allgemeinen noch nicht. Sollte die Geschwindigkeit der Stromverbreitung im Allgemeinen unmessbar genannt werden, so müsste

diese Gleichzeitigkeit der Stromänderung in allen Theilen der Kette in allen Fällen Statt finden, insbesondere auch dann, wenn die gegebene elektromotorische Kraft, welche die Aenderung verursacht, unmittelbar nur auf einen Theil der Kette wirkt. Für diesen Fall ergiebt sich aber aus dem in den vorhergehenden Artikeln erörterten Zusammenhange der Gesetze der galvanischen Kette mit den elektrischen Grundgesetzen, dass die veränderte Stromgeschwindigkeit in demjenigen Theile der Kette, wo sie durch die gegebene elektromotorische Kraft unmittelbar hervorgebracht wurde, einige Zeit gedauert haben müsse, ehe sie in anderen Theilen der Kette eintreten könne, nämlich darum, weil dem Eintritt dieser Stromänderung in anderen Theilen der Kette nothwendig eine neue Ansammlung freier Elektricität vorangegangen sein muss, welche auf diese Theile der Kette eine elektromotorische Kraft ausübt, welche zur Hervorbringung der Stromänderung in diesen Theilen nothwendig ist. Diese neue Ansammlung freier Elektricität kann aber nur durch die Stromänderung in einem Theile der Kette in derjenigen Zeit hervorgebracht werden, in welcher in den übrigen Theilen der Kette diese Stromveränderung noch nicht Statt gefunden hat. Es ergiebt sich also hieraus, dass die durch eine gegebene elektromotorische Kraft unmittelbar nur an einer Stelle der Kette hervorgebrachte Stromänderung unmöglich in allen anderen Theilen der Kette ganz gleichzeitig eintreten könne, sondern sie kann nur allmählig in einem Theile nach dem anderen entstehen, nachdem die zu ihrer Hervorbringung in jedem Theile nothwendige Ansammlung freier Elektricität sich vorher gebildet hat.

Hält man sich z. B. der Einfachheit wegen an die näherungsweise zulässige Ohm'sche Hypothese von der Vertheilung der freien Elektricität im Leiter, wonach die freie Elektricität des Längenelements der Kette $r\,d\varphi$ am Ende des Bogens φ durch $a(\varphi - \pi)d\varphi$ dargestellt wird, so ergiebt sich hieraus für die freie negative Elektricität der einen Hälfte des kreisförmigen Leiters der Integralwerth

$$= a\int_0^\pi (\varphi - \pi)\,d\varphi = -\frac{\pi^2}{2}\,a,$$

für die freie positive Elektricität der anderen Hälfte der Integralwerth

$$= a\int_\pi^{2\pi} (\varphi - \pi)\,d\varphi = +\frac{\pi^2}{2}\,a,$$

worin nach S. 393

$$a = \frac{r}{2\chi}\,(E' - E)$$

ist, wenn $E\,\mathrm{d}x$ die Masse der freien Elektricität des Längenelements $\mathrm{d}x$ am Ende des Bogens $r(\pi-\chi)$, $E'\mathrm{d}x$ die Masse der freien Elektricität eines gleich langen Elements $\mathrm{d}x$ am Ende des Bogens $r(\pi+\chi)$ bezeichnet. Die Länge des zwischen diesen beiden Elementen liegenden Stücks der Kette ist folglich $=2r\chi$. Bezeichnet man nun die Masse der freien Elektricität zweier eben solcher Elemente $\mathrm{d}x$, zwischen denen aber nur ein dem Längenmaasse gleiches Stück der Kette liegt, mit $\varepsilon\,\mathrm{d}x$ und $\varepsilon'\mathrm{d}x$, so erhält man

$$\varepsilon'-\varepsilon=\frac{E'-E}{2r\chi},$$

folglich

$$a=r^2(\varepsilon'-\varepsilon),$$

und setzt man diesen Werth von a in den obigen Ausdruck des Integralwerths der freien negativen und positiven Elektricität, so erhält man dafür

$$-\frac{\pi^2r^2}{2}(\varepsilon'-\varepsilon) \text{ und } +\frac{\pi^2r^2}{2}(\varepsilon'-\varepsilon).$$

Die hieraus resultirende elektromotorische Kraft ist nach S. 393

$$\frac{2\pi}{\chi}(E'-E)\left(\log\cot\frac{ea}{8r}-\beta\pi\right)=4\pi r(\varepsilon'-\varepsilon)\left(\log\cot\frac{ea}{8r}-\beta\pi\right)\cdot$$

Bezeichnet man den Widerstand des Leiters für die Einheit der Länge und des Querschnitts, nach dem Art. 27 festgesetzten Maasse, mit k und folglich den Widerstand der ganzen Kette, deren Länge $=2\pi r$ und deren Querschnitt $=\pi a^2$ ist, durch $2rk/a^2$, so stellt der Quotient jener elektromotorischen Kraft und dieses Widerstands die Stromintensität eu dar, wo e die Masse der in einem dem Längenmaasse gleichen Stücke der Kette enthaltenen positiven oder negativen Elektricität und u die Stromgeschwindigkeit bezeichnet, folglich

$$4\pi r(\varepsilon'-\varepsilon)\left(\log\cot\frac{ea}{8r}-\beta\pi\right)=\frac{2r}{a^2}k\,.\,eu.$$

Soll nun in dieser Kette die Stromintensität eu in dem Verhältniss von $1:n$ sich ändern, so muss neu an die Stelle von eu treten, folglich auch $n(\varepsilon'-\varepsilon)$ an die Stelle von $(\varepsilon'-\varepsilon)$, wodurch der Integralwerth der freien negativen und positiven Elektricität folgenden Ausdruck erhält:

$$-\frac{\pi^2r^2}{2}\cdot n(\varepsilon'-\varepsilon) \text{ und } +\frac{\pi^2r^2}{2}\cdot n(\varepsilon'-\varepsilon).$$

Die Aenderung dieses Integralwerths ergiebt sich hieraus

$$=-\frac{\pi^2r^2}{2}(n-1)(\varepsilon'-\varepsilon) \text{ und } =+\frac{\pi^2r^2}{2}(n-1)(\varepsilon'-\varepsilon).$$

Die Möglichkeit dieser Aenderung setzt aber voraus, dass die Zunahme der Stromgeschwindigkeit $= (n-1)u$ am Anfange der Kette, wo die Verstärkung der elektromotorischen Kraft Statt findet, durch welche die Aenderung der Stromintensität bewerkstelligt wird, früher eintrete, als in der Mitte der Kette, welche von dieser Stelle am weitesten entfernt ist, und zwar um einen Zeitraum T, in welchem in Folge der Geschwindigkeitsänderung $(n-1)u$ durch den Querschnitt der Kette eine Masse negativer oder positiver Elektricität $= (n-1)eu \,.\, T$ geht, welche der obigen Aenderung des Integralwerths gleich ist, woraus folgende Gleichung sich ergiebt:

$$\frac{\pi^2 r^2}{2}(n-1)(\varepsilon'-\varepsilon) = (n-1)\,eu\,.\,T.$$

Hieraus folgt, mit Zuziehung der vorher gefundenen Gleichung

$$4\pi r(\varepsilon'-\varepsilon)\left(\log\cot\frac{ea}{8r}-\beta\pi\right) = \frac{2r}{a^2}k\,.\,eu,$$

der Zeitraum T

$$T = \frac{\pi^2 r^2}{2}\cdot\frac{\varepsilon'-\varepsilon}{eu} = \frac{\pi r^2}{4a^2}\,\frac{k}{\log\cot\frac{ea}{8r}-\beta\pi}.$$

Hierbei ist vorausgesetzt, dass im ersten Augenblicke der Aenderung die Stromgeschwindigkeit im ersten Elemente der Kette sogleich von n zu nu übergehe und dass diese neue Stromgeschwindigkeit nu in diesem Elemente von dann an unverändert beharre. Unter der Voraussetzung, dass ein ähnlicher plötzlicher Uebergang der Stromgeschwindigkeit von u zu nu in allen Theilen der Kette Statt finde, lässt sich endlich die Geschwindigkeit der Stromverbreitung in jedem Theile der Kette bestimmen. Unter dieser Voraussetzung wird nämlich die Zeit t, in welcher der Strom durch ein dem Bogen $r\psi$ entsprechendes Stück der Kette fortgepflanzt wird, durch folgende Gleichung bestimmt:

$$t = \frac{\psi^2 r^2}{4\pi a^2}\cdot\frac{k}{\log\cot\frac{ea}{8r}-\beta\pi}.$$

Durch Differentiation dieser Gleichung in Beziehung auf t und ψ erhält man die Fortpflanzungsgeschwindigkeit $r\,\mathrm{d}\psi/\mathrm{d}t$,

$$\frac{r\,\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t} = \frac{2\pi a^2}{kr\psi}\left(\log\cot\frac{ea}{8r}-\beta\pi\right),$$

wonach also diese Geschwindigkeit desto kleiner ist, je grösser das Stück $r\psi$ der Kette ist, durch welches sich die Stromänderung schon verbreitet hat.

In diesem Ausdrucke der Fortpflanzungsgeschwindigkeit bezeichnet k den Widerstand des Leiters für die Einheit seiner Länge und seines Querschnitts und zwar nach dem Art. 27 definirten Maasse. Bezeichnet man mit q den nach bekannten Methoden messbaren Widerstand desselben Leiters für dieselbe Länge und denselben Querschnitt nach dem Art. 26 definirten Maasse, so ist nach Art. 27

$$k = \frac{16}{c^2} q,$$

und setzt man diesen Werth von k in die obige Gleichung, so erhält man die Fortpflanzungsgeschwindigkeit $r\mathrm{d}\psi/\mathrm{d}t$,

$$\frac{r\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t} = \frac{\pi c^2 a^2}{8qr\psi}\left(\log\cot\frac{ea}{8r} - \beta\pi\right),$$

woraus hervorgeht, dass, wenn die Geschwindigkeit c bekannt wäre, mit welcher zwei elektrische Massen gegen einander bewegt werden müssen, wenn sie sich weder anziehen noch abstossen sollen, die Fortpflanzungsgeschwindigkeit $r\mathrm{d}\psi/\mathrm{d}t$ daraus berechnet werden könnte, und dass umgekehrt, wenn die Fortpflanzungsgeschwindigkeit $r\mathrm{d}\psi/\mathrm{d}t$ gemessen würde, jene Geschwindigkeit c sich daraus berechnen lassen würde. Könnten aber beide Geschwindigkeiten c und $r\mathrm{d}\psi/\mathrm{d}t$ aus unabhängigen Beobachtungen bestimmt werden, so würden dadurch die Mittel gewonnen, die Richtigkeit der obigen Gleichung an der Erfahrung zu prüfen. Es ergiebt sich aus dieser Gleichung, dass die Fortpflanzungsgeschwindigkeit $r\mathrm{d}\psi/\mathrm{d}t$ nicht blos in verschiedenen Ketten, sondern auch an verschiedenen Stellen einer und derselben Kette verschieden ist; denn der Zahlenkoefficient $\frac{1}{8}(\log\cot ea/8r - \beta\pi)$ hat für verschiedene Ketten verschiedene Werthe, und in einer und derselben Kette, für welche der Zahlenkoefficient $\frac{1}{8}(\log\cot ea/8r - \beta\pi) = n$ gegeben ist, ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit an einer bestimmten Stelle der Kette dem Widerstande desjenigen Stücks $r\psi$ umgekehrt proportional, durch welches die Stromverbreitung von ihrem Ursprunge an bis dahin Statt gefunden hat. Bezeichnet man diesen Widerstand nach dem Art. 26 definirten Maasse mit $w = q \,.\, r\psi/\pi a^2$, so ist $r\mathrm{d}\psi/\mathrm{d}t = n \,.\, c^2/w$. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit nimmt also ab, je weiter die Verbreitung von ihrem Ursprunge sich entfernt, und wird also in recht langen Ketten sich viel leichter messen lassen, als in kürzeren.

Was aber endlich die Stromgeschwindigkeit u betrifft, so sieht man leicht, dass die Bestimmung derselben, abgesehen von den Hindernissen, welche die Ausführung der Messung der Geschwindigkeit c auf dem Art. 34 oder auf dem in diesem Artikel angegebenen Wege findet, vorzüglich an der gänzlichen Unkenntniss derjenigen Masse positiver oder negativer Elektricität $\pm e$ scheitert, welche in einem dem Längen-

maasse gleichen Stücke des Leiters enthalten ist; denn zur Bestimmung des Produkts eu hat man nach Art. 27 die Gleichung

$$eu = \frac{c}{4} i,$$

wo i in bekannter Weise gemessen werden kann. Die Möglichkeit über die Werthe von e und u einzeln Auskunft zu erhalten, würde, wie es scheint, darauf beruhen, dass der Widerstand eines Leiters, welcher bisher nur aus seinen Wirkungen definirt worden ist, nämlich aus der Abhängigkeit, in welcher bei einer gegebenen elektromotorischen Kraft die Stromintensität von ihm steht, auch aus seinen Ursachen näher definirt werden könnte. Gelänge es nämlich, die Ursachen des Widerstands in den Leitern zu erforschen, und ergäbe sich daraus zum Beispiel, dass der Widerstand eines Leiters von dem Werthe e, welcher dem Leiter zukommt, abhängig sei, und zwar, dass derselbe desto grösser oder kleiner sei, je kleiner oder grösser der Werth von e sei, und durch d/e dargestellt werden könne, wo d unabhängig von e aus der sonstigen Beschaffenheit des Leiters bestimmt werde, so leuchtet ein, dass nach Art. 27 für i der Quotient der elektromotorischen Kraft $\varepsilon \,.\, 4/c$ (worin ε nach Art. 26 messbar ist) und des Widerstands d/e gesetzt werden kann, folglich

$$eu = \frac{c}{4} i = \frac{\varepsilon}{d} e,$$

also

$$u = \frac{\varepsilon}{d}.$$

Aus dieser Bestimmung von u würde dann zugleich auch der Werth von e sich ergeben. Es geht hieraus die Wichtigkeit hervor, welche eine nähere Nachforschung über die bisher noch nicht erörterten Ursachen des Widerstands für die Elektricitätslehre haben könnte.

36.

Ueber die Ursachen des Widerstands der Leiter.

Zu einer vollständigen Kenntniss des Widerstands genügt es nicht, die Grösse des Widerstands aus seinen Wirkungen zu definiren, d. i. aus der Stärke des durch eine gegebene elektromotorische Kraft hervorgebrachten Stroms, sondern es gehört auch dazu, die Grösse des Widerstands aus ihren Ursachen zu definiren. Ohne diese wesentliche Ergänzung ist unsere Kenntniss von dem Wesen des Widerstands mangelhaft, und die ermittelte Grösse desselben ist eine blosse Hülfsgrösse der Elektrodynamik, deren wahre physische Bedeutung noch unbekannt ist. Wenn

nun der Widerstand bisher blos nach seinen Wirkungen betrachtet worden ist, so liegt der Grund davon darin, dass über die Ursachen desselben bisher noch gar nichts Wesentliches ermittelt worden ist. Es ist blos die Abhängigkeit des Widerstands von den äusseren Dimensionen des Leiters, nämlich von seiner Länge und von seinem Querschnitt, ermittelt worden, aber diese Abhängigkeit betrifft blos den absoluten Widerstand eines Leitungsdrahts und hat keine Beziehung auf den specifischen Widerstand des leitenden Metalls, über dessen Ursachen gar nichts bekannt ist. Diese Ursachen scheinen so tief in der Natur der Körper verborgen zu liegen, dass sie auf den bisherigen Wegen der Forschung unzugänglich sind. Kurz, die Frage nach den Ursachen des galvanischen Widerstands führt zu einem noch ganz unangebauten Gebiete der Wissenschaft. Ich werde mich daher nur auf eine einzelne Erörterung beschränken, nämlich darüber, in welcher Beziehung dieser Widerstand mit der Natur der elektrischen Fluida selbst, wie dieselben definirt worden sind, und mit deren Verhalten im elektrischen Doppelstrome stehe, wie dasselbe nach der gewöhnlichen Vorstellung auch hier immer angenommen und festgehalten worden ist.

Die Frage nach den Ursachen des Widerstands lässt sich zunächst specieller darauf richten, in wie weit diese Ursachen in dem ponderablen Träger des Stroms, und in wie weit dieselben in den darin enthaltenen elektrischen Fluidis liegen. Dass die Gegenwart der ponderablen Theile die Kanäle, durch welche die elektrischen Fluida strömen, mehr oder weniger beengen und dadurch auf die elektrische Strömung Einfluss haben können, leuchtet von selbst ein; es fragt sich aber, ob diese Ursache zur Erklärung des Widerstands allein schon genüge. Diese Ursache des Widerstands würde blos die Masse des elektrischen Fluidums beschränken, welche an der Strömung Theil nehmen könnte. Es liegt aber in dem Wesen des Widerstands, wie wir ihn aus seinen Wirkungen kennen, dass durch die Grösse des Widerstands nicht blos die Masse des elektrischen Fluidums beschränkt wird, welche an der Strombewegung Theil nimmt, sondern, dass auch die Bewegung selbst beschränkt wird. Diese Beschränkung der Bewegung selbst kann aber ihren Grund in der blossen Gegenwart der ponderablen Theile nicht haben, sondern setzt nothwendig Kräfte voraus, welche den fortwirkenden elektromotorischen Kräften der Kette das Gleichgewicht halten, weil ohnedem jene Kräfte die elektrischen Fluida in ihrer Bewegung immerfort beschleunigen müssten, was bei einem gleichförmigen und beharrlichen Strome nicht der Fall ist.

Es fragt sich also ferner, woher die Kräfte rühren, welche bei einem gleichförmigen und beharrlichen Strome den fortwirkenden elektromotorischen Kräften das Gleichgewicht halten und dadurch eine

fernere Beschleunigung der elektrischen Fluida in ihrer Bewegung verhindern? Sind diese Kräfte rein elektrische Kräfte, oder sind es Kräfte, welche die ponderablen Theile auf die elektrischen Fluida, die an ihnen vorbeigehen, ausüben? Setzen wir in dem galvanischen Strome, wie wir es stets gethan haben, zwei elektrische Fluida voraus, die gleichzeitig durch denselben Leiter in entgegengesetzten Richtungen strömen, so liegt es sehr nahe, eine Ursache des Widerstands für die Bewegung jedes Fluidums in dem ihm entgegenkommenden Fluidum zu suchen. Das positive und das negative Fluidum werden nämlich in dem Augenblicke der Begegnung sich zu neutralem Gemische verbinden, und so leicht auch diese neutrale Verbindung wieder zu scheiden sein möge, so wird doch eine solche neue Scheidung nur durch eine neue elektromotorische Kraft erfolgen können, und nicht in Folge einer Beharrung derjenigen Bewegungen, welche beide Fluida vor ihrer Vereinigung besassen, weil diese durch ihre Begegnung und Verbindung mit einander als aufgehoben betrachtet werden muss. Es geht daraus hervor, dass, während jedem Fluidum für sich bei seinen Bewegungen Beharrung zugeschrieben werden muss, beiden Fluidis zusammen bei ihrer Bewegung im Doppelstrome keine Beharrung zukommt. Wenn aber auch dieser Grund, warum den elektrischen Fluidis bei ihrer Bewegung im Doppelstrome keine Beharrung zukommt, der richtige ist, so gewinnt man doch dadurch noch keine deutliche Einsicht in den Hergang selbst, so lange die Kräfte unbekannt sind, welche die Verbindung und Vereinigung der elektrischen Fluida bei ihrer Begegnung bewirken, und welche bei ihrer wiederholten Scheidung überwunden werden müssen. Es fragt sich, ob dabei noch andere Kräfte in Betracht kommen, als diejenigen, welche durch das allgemeine elektrische Grundgesetz schon bestimmt sind, z. B. ob dabei besondere Molekularkräfte der elektrischen Fluida wirksam sind. Wäre dies nicht der Fall, so müsste der Hergang bei der abwechselnden Verbindung und Scheidung der elektrischen Fluida im Doppelstrome nach dem bekannten Grundgesetze der elektrischen Wirkung genauer bestimmt werden. Ohne eine solche genauere Bestimmung lässt sich im Allgemeinen nur mit einiger Wahrscheinlichkeit annehmen, dass die Intensität eines elektrischen Doppelstroms ausser von der Masse der elektrischen Fluida, welche an der Strömung Theil nimmt, von der Zahl der Scheidungen abhänge, welche in bestimmter Zeit erfolgen, und dass die Zahl dieser Scheidungen der während dieser Zeit fortwirkenden elektromotorischen Kraft proportional sein müsse. Ergäbe sich z. B., dass durch gleiche elektromotorische Kraft jedes elektrische Theilchen in gleicher Zeit immer eine gleiche Zahl Verbindungen und Scheidungen erlitte und dadurch eine gleiche Wegstrecke fortgeführt würde, so wäre die Stromgeschwindigkeit u für gleiche elektromotorische

Kraft immer die nämliche, und es würde dann die Stromintensität für gleiche elektromotorische Kraft blos mit der Menge der Elektricität e variiren, welche auf einer solchen Wegstrecke (z. B. in der Längeneinheit des Leiters) enthalten wäre, und zwar proportional damit sein, woraus hervorginge, dass der sogenannte Widerstand gleichfalls nur mit e variirte und zwar dem Werthe von e umgekehrt proportional wäre, welches derjenige Fall ist, welcher am Ende des vorigen Artikels als Erläuterung angeführt wurde.

Sollte in der abwechselnden Verbindung und Scheidung der elektrischen Fluida bei ihrer Begegnung im Doppelstrome die Ursache des Widerstands wirklich enthalten sein, so würde daraus ferner die Unmöglichkeit eines *beharrlichen* Doppelstroms ohne fortwirkende äussere elektromotorische Kraft folgen, und es würde sich dann fragen, wie damit die Annahme von *beharrlichen Molekularströmen* zur Erklärung der magnetischen und diamagnetischen Erscheinungen verträglich wäre. Die Möglichkeit solcher Molekularströme müsste dann nothwendig auf einer Wirkung der ponderablen Molekule beruhen, durch welche die Bahnen der in entgegengesetzten Richtungen um jene Molekule sich bewegenden elektrischen Fluida von einander getrennt erhalten würden, indem z. B. das eine Fluidum eine engere Kreisbahn, das andere Fluidum eine weitere Kreisbahn um das Molekule beschriebe, sodass die beiden Fluida sich bei ihren Bewegungen nirgends begegnen und vereinigen könnten.

Zur Erläuterung des Hergangs bei der abwechselnden Verbindung und Scheidung der elektrischen Fluida im Doppelstrome, wie er aus dem Grundgesetze der elektrischen Wirkung ohne Zuziehung besonderer Molekularkräfte dieser Fluida abzuleiten wäre, diene folgende Betrachtung. In A, B, C . . seien positiv elektrische Massen, von denen zunächst angenommen werden möge, dass sie an den Orten, wo sie sich befinden, festgehalten würden. In a befinde sich gegenwärtig eine

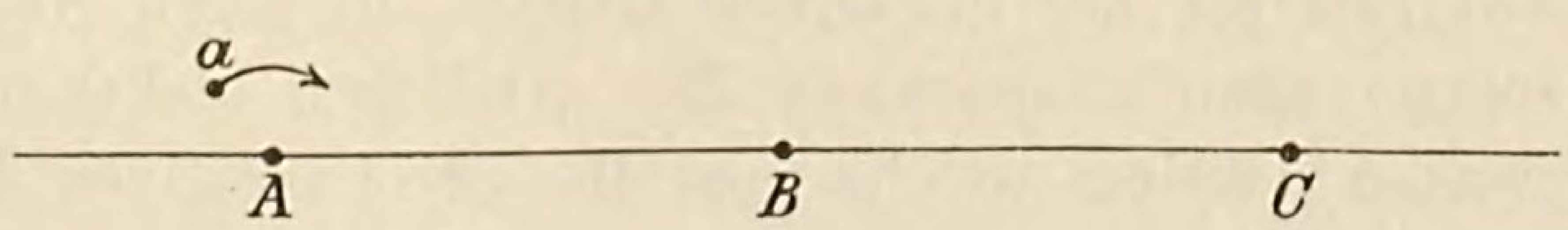


Fig. 6.

bewegliche negativ elektrische Masse, auf welche die benachbarte positive Masse in A so stark wirke, dass dagegen die Wirkung der entfernten Massen in B, C . . vernachlässigt werden könne. Die Massen in A und a wirken auf einander mit einer Kraft, die von ihrer Grösse, Entfernung, relativen Geschwindigkeit und deren Aenderung abhängt; indess möge hier der Einfachheit wegen angenommen werden, dass die aus der relativen Geschwindigkeit und deren Aenderung sich ergebende

Korrektion der elektrostatischen (von den Massen und der Entfernung abhängigen) Kraft gegen diese letztere so gering sei, dass sie ebenfalls vernachlässigt werden dürfe. Unter diesen Voraussetzungen folgt, dass, wenn keine andere Kraft auf die Masse in a wirkt, diese Masse den Gesetzen der Bewegung durch Centralkräfte, welche dem Quadrat der Entfernung verkehrt proportional sind, folgen müsse. Die Masse in a wird folglich nach den KEPLER'schen Gesetzen z. B. eine elliptische Bahn um A beschreiben. Es wird aber eine Störung in dieser Bewegung der betrachteten Masse um A eintreten, sobald ausser der Centralkraft eine elektromotorische Kraft parallel mit der Linie AB mit konstanter Intensität auf die betrachtete Masse wirkt. Die Elemente der bisherigen elliptischen Bewegung werden nun fortwährend geändert werden, und die von der betrachteten Masse beschriebene Bahn wird dadurch in eine Spirallinie übergehen, in welcher die betrachtete Masse endlich so weit von A fortgeführt wird, dass sie aus der Wirkungssphäre von A in die Wirkungssphäre von B gelangt, und so fort, nachdem sie eine Anzahl Spiralwindungen um B beschrieben hat, auch von B so weit fortgeführt wird, dass sie aus der Wirkungssphäre von B in die Wirkungssphäre von C gelangt. Auf diese Weise kann also eine elektromotorische Kraft ein Fortströmen der negativen Elektricität in der Richtung ABC bewirken, an welchem die positiven Massen in A, B, C keinen Antheil nehmen. Das Wesentliche dieser Betrachtung besteht darin, dass, sobald die elektromotorische Kraft zu wirken aufhört, die betrachtete Masse sogleich wieder nach den KEPLER'schen Gesetzen in elleptischer Bahn um diejenige positive Masse sich bewegen wird, in deren Nähe sie sich gerade befindet, weil nach Wegfall der störenden Kraft keine weitere Aenderung der Elemente ihrer Centralbewegung Statt findet. Auch ersieht man leicht, dass in dieser wesentlichen Beziehung nichts geändert werden würde, wenn die positiven Massen in A, B, C . . . gleichfalls beweglich angenommen und ausser der Centralkraft der negativen Massen, in deren Nähe sie sich befinden, der störenden Einwirkung der nämlichen elektromotorischen Kraft unterworfen würden, welche aber für diese positiven Massen die entgegengesetzte Richtung, wie für die negativen hätte. Es ergiebt sich daraus folgendes Resultat. Wenn die elektromotorische Kraft c auf die betrachtete negative Masse allein wirkte, so würde sie dieser Masse in der Richtung ABC während der Zeit t eine Geschwindigkeit ct ertheilen, mit welcher sich diese Masse, auch nachdem die Kraft c zu wirken aufgehört hätte, beharrlich in der Richtung ABC fortbewegen müsste. Unter Mitwirkung der Centralkräfte der positiven Massen in A, B, C . . aber wird zwar die elektromotorische Kraft c ebenfalls, so lange sie wirkt, ein Fortrücken der betrachteten Masse in

der Richtung *ABC* bewirken, sobald die Kraft *c* aber zu wirken aufhört, wird auch dieses Fortrücken aufhören, d. h. dieses Fortrücken der betrachteten Masse in der Richtung *ABC* geschieht dann nicht mit einer Geschwindigkeit, welche fortdauert, nachdem die Kraft zu wirken aufgehört, welche das Fortrücken hervorgebracht hat. Der Grund also, warum die betrachtete Masse in der Richtung *ABC* nicht weiter fortrückt, nachdem die elektromotorische Kraft zu wirken aufgehört hat, liegt darnach in den von den positiven Massen auf die betrachtete negative Masse ausgeübten Centralkräften. Das Wort *Widerstand* bezeichnet aber in der Theorie der galvanischen Kette wesentlich nichts Anderes, als das Faktum, dass die Fortbewegung der elektrischen Fluida im galvanischen Strome der elektromotorischen Kraft proportional ist, d. h. aufhört, sobald die elektromotorische Kraft zu wirken aufhört. Es folgt also daraus, dass der Grund des Widerstands in den *Centralkräften* liegen kann, welche die im elektrischen Doppelstrome sich begegnenden positiven und negativen Massen wechselseitig auf einander ausüben. Es würde für weitere theoretische Untersuchung wichtig sein, aus diesem Grunde eine bestimmte und präcise Definition des Widerstands abzuleiten und die Beziehungen zu entwickeln, in welchen der nach seiner Wirkung definirte Widerstand dazu stehe. Es würde dabei hauptsächlich auf eine Bestimmung der Zeit ankommen, welche ein Theilchen braucht, um in seiner Spiralbahn von einer Windung um eine Centralmasse *A* zur entsprechenden Windung um die darauf folgende Centralmasse *B* zu gelangen. Dass aber solche Bestimmungen, auch wenn alle wesentlichen Elemente für die Rechnung gegeben sind, grosse Schwierigkeiten finden, zeigt die Theorie der Störungen in der Astronomie.

VI.

Vergleichung des allgemeinen Princips der mathematischen Theorie inducirter elektrischer Ströme von Neumann *mit den aus dem Grundgesetze der elektrischen Wirkung abgeleiteten Induktionsgesetzen.*

37.

In der ersten Abhandlung über elektrodynamische Maassbestimmungen ist schon im 26. Artikel die Abhandlung angeführt worden, welche Neumann im Jahre 1845 der Berliner Akademie der Wissenschaften vorgelegt hatte, nämlich: „Die mathematischen Gesetze der inducirten Ströme“. Diese damals noch nicht gedruckte Abhandlung konnte dort nur nach dem in Poggendorff's Annalen davon erschienenen

Auszuge citirt werden. NEUMANN hat seitdem über denselben Gegenstand der Berliner Akademie der Wissenschaften eine noch umfassendere Arbeit vorgelegt: „Ueber ein allgemeines Princip der mathematischen Theorie inducirter Ströme“, welche, aus den Schriften der Berliner Akademie der Wissenschaften von 1847 besonders abgedruckt, Berlin bei Reimer, 1848, erschienen ist. In dieser Abhandlung hat NEUMANN folgendes allgemeine Theorem aufgestellt:

> „Wird ein geschlossenes, unverzweigtes, leitendes Bogensystem $A_{\prime}$ durch eine beliebige Verrückung seiner Elemente, aber ohne Aufhebung der leitenden Verbindung derselben, in ein anderes $A_{\prime\prime}$ von neuer Form und Lage übergeführt, und geschieht diese Veränderung von $A_{\prime}$ in $A_{\prime\prime}$ unter dem Einflusse eines elektrischen Stromsystems $B_{\prime}$, welches gleichzeitig durch eine beliebige Verrückung seiner Elemente eine Veränderung in Lage, Form und Intensität von $B_{\prime}$ in $B_{\prime\prime}$ erfährt, so ist die Summe der elektromotorischen Kräfte, welche in dem leitenden Bogensysteme durch diese Veränderung inducirt worden sind, gleich dem mit der Inductions-Konstante ε multiplicirten Unterschied der Potentialwerthe des Stroms $B_{\prime\prime}$ in Bezug auf $A_{\prime\prime}$ und des Stroms $B_{\prime}$ in Bezug auf $A_{\prime}$, wenn $A_{\prime\prime}$ und $A_{\prime}$ von der Stromeinheit durchströmt gedacht werden.“

Nachdem hierauf NEUMANN in den vier ersten Paragraphen seiner Abhandlung dieses Theorem nebst seinen Folgerungen entwickelt hat, fährt er § 5 fort: „W. WEBER hat in seiner Abhandlung: Elektrodynamische Maassbestimmungen u. s. w. den Weg gebahnt, welcher über die Kluft in unserer Kenntniss der elektrostatischen und elektrodynamischen Wirkung der Elektricität führen wird. Er zeigt, wie die AMPÈRE'schen Gesetze für die Wirkung zweier Stromelemente aus der Wirkung der positiven und negativen Elektricität des einen Elements auf die beiden Elektricitäten des anderen Elements abgeleitet werden können. Diese Analyse der AMPÈRE'schen Gesetze führte zu dem Grundgesetze zweier elektrischen Massen, nach welchem diese nicht allein von ihrer relativen Entfernung, sondern auch relativen Geschwindigkeit und deren Veränderung abhängig ist. Dieses Grundgesetz erklärt zugleich, wie WEBER gezeigt hat, die Induktions-Erscheinungen und giebt ihre Gesetze. Der Gegenstand dieses Paragraphen ist nachzuweisen, wie weit die im Vorhergehenden enthaltenen Resultate mit den aus WEBER's Grundgesetz der elektrischen Wirkung abgeleiteten Induktions-Gesetzen übereinstimmen.“

Aus diesem Grundgesetze der elektrischen Wirkung, wie es in der ersten Abhandlung über elektrodynamische Maassbestimmungen aufgestellt worden ist, entwickelt nun NEUMANN a. a. O. in seiner Abhand-

lung einen allgemeinen Ausdruck für die Induktion, welchen er sodann auf die verschiedenen Arten der Induktion in Anwendung bringt, nämlich 1. auf den Fall, wo weder die Strom- noch die Leiterelemente eine Ortsveränderung erleiden und die Induktion blos von einer Aenderung der Stromintensität herrührt; 2. auf den Fall, wo die Induktion blos durch eine Ortsveränderung der Leiterelemente hervorgebracht wird, die unter dem Einflusse eines konstanten und unverrückten Stroms Statt findet; 3. auf den Fall, wo der inducirte Leiter ruht und die Induktion durch eine Bewegung des ganzen Trägers eines konstanten Stroms erregt wird. In allen diesen Fällen ergiebt sich nun das Resultat, dass die aus jenem allgemeinen Grundgesetze der elektrischen Wirkung abgeleiteten Induktionsgesetze mit den Resultaten des von Neumann aufgestellten allgemeinen Princips der mathematischen Theorie inducirter Ströme vollkommen übereinstimmen.

„Anders verhält es sich,“ fährt Neumann fort, „mit der Gleichung, welche die von einem einfachen Stromumgange inducirte elektromotorische Kraft unter der Annahme ausdrückt, dass derselbe aus einem bewegten Leiterstücke und einem ruhenden besteht. Die Summe der elektromotorischen Kraft, welche während des Umlaufs der Elemente des Inducenten erregt wird, ist nach beiden Formeln dieselbe, die Richtung des inducirten Stroms aber die entgegengesetzte.“

Zur Entscheidung nun, ob in diesem einzigen Falle, wo zwischen dem von Neumann aus dem allgemeinen Grundgesetze der elektrischen Wirkung abgeleiteten Induktionsgesetze und zwischen dem Resultate seines eigenen allgemeinen Princips der mathematischen Theorie inducirter Ströme eine Abweichung Statt findet, dieses oder jenes wirklich gelte, hat Neumann in seiner Abhandlung einige Versuche angeführt, welche bewiesen haben, dass die aus Neumann's allgemeinem Principe abgeleitete Formel auch in diesem Falle die richtige sei. Auch ich habe, wie unten beschrieben werden wird, diese Versuche wiederholt und habe das von Neumann erhaltene Resultat vollkommen bestätigt gefunden. Nachdem durch diese Versuche das wahre, für diesen Fall gültige Gesetz faktisch sicher gestellt ist, unterwirft Neumann die von ihm selbst gegebene Ableitung des Induktionsgesetzes dieses Falles aus dem allgemeinen Grundgesetze der elektrischen Wirkung einer näheren Prüfung. „Es muss also untersucht werden,“ sagt er, „worin bei Ableitung der Formel aus Weber's Grundgesetz gefehlt worden ist. Der Umstand, dass der in Rede stehende Widerspruch nur bei Inducenten mit *Gleitstellen* eintritt, führt die Betrachtung sogleich auf diese. Hier treten neue Elemente in die Strombahn ein oder heraus, in welchen also die Stromstärke sich innerhalb einer sehr kurzen Zeit von i bis 0 verändert, und die durch diese ihre Intensitätsveränderung einen

inducirenden Effekt ausüben, welcher in meinen Formeln schon enthalten ist, der aber bei der Anwendung des Weber'schen Grundgesetzes noch berücksichtigt werden muss.“ Diese Prüfung führt Neumann zu dem Resultate, dass dieser zweite Theil der Induktion, welcher in der ersten Ableitung aus dem allgemeinen Grundgesetze der elektrischen Wirkung nicht berücksichtigt worden war, den fraglichen Widerspruch zur Hälfte ausgleicht, indem sich dann die Summe der elektromotorischen Kräfte aus dem ersten und aus dem zweiten Theile = 0 ergiebt.

Nach dieser zu keinem befriedigenden Resultate führenden Prüfung der Rechnung geht endlich Neumann noch zu einer Prüfung der dieser Rechnung zum Grunde liegenden Voraussetzung von den in diesem Falle Statt findenden physischen Verhältnissen über, unter welchen die Induktion geschehe. Diese Voraussetzung besteht darin, dass in den Leiterelementen, welche an den Gleitstellen in die Strombahn ein- oder heraustreten, die Stromstärke sich innerhalb einer sehr kurzen Zeit von 0 bis i oder von i bis 0 verändere. Es ist nun aber eine Bedingung für einen beharrlichen Strom, dass in allen Elementen der geschlossenen Kette eine gleiche Stromintensität Statt finde, und wenn daher auch die Stromintensität in den an der Gleitstelle ein- oder heraustretenden Elementen variirt, so scheint doch auch hier der *mittlere* Werth der Stromintensität für die kurze Zeit, wo sie variirt, jener Bedingung genügen zu müssen, was, wenn die in der ganzen Kette gleiche Stromintensität $= i$ sein soll, voraussetzt, dass in den an der Gleitstelle ein- oder heraustretenden Elementen die Stromstärke sich von 0 bis $2i$ oder von $2i$ bis 0 verändere. Unter dieser Voraussetzung von den physischen Verhältnissen, unter welcher die Induktion in diesem Falle Statt findet, lässt sich nun leicht beweisen, dass der anfänglich bemerkte Widerspruch gänzlich verschwindet und die aus dem allgemeinen Grundgesetze der elektrischen Wirkung abgeleiteten Induktionsgesetze auch für diesen Fall mit Neumann's allgemeinem Princip der mathematischen Theorie inducirter Ströme übereinstimmen.

Was nun aber die Voraussetzung selbst betrifft, worauf hierbei die Hebung des fraglichen Widerspruchs beruht, so sagt Neumann darüber, dass sie „weniger durch ihre Evidenz als durch ihren Erfolg gerechtfertigt“ werde. Abgesehen aber von dem Bedenken, welches gegen die Voraussetzung selbst etwa gehegt werden könnte, scheint mir diese Voraussetzung, wenn sie wahr ist, mit einer Folge nothwendig verbunden zu sein, welche jenen Erfolg ganz wieder aufhebt. Zugegeben nämlich, dass wirklich in den an der Gleitstelle ein- oder austretenden Elementen die Stromstärke sich innerhalb einer sehr kurzen Zeit von 0 bis $2i$ oder von $2i$ bis 0 verändere, so scheint mir damit doch die Folge nothwendig verbunden zu sein, dass unmittelbar, nachdem in dem

eintretenden Elemente die Stromstärke bis auf $2i$ gestiegen ist, sie sogleich wieder in diesem von nun in der Kette bleibenden Elemente auf i herabsinke, weil i in allen Theilen der Kette nothwendig gleiche Stromintensität bezeichnet. Auf gleiche Weise würde bei den an der Gleitstelle austretenden Theilchen, in welchen die Stromintensität konstant $= i$ gewesen war, diese Stromintensität, ehe sie von $2i$ auf 0 abnehmen kann, erst von i auf $2i$ zugenommen haben müssen. Bringt man nicht blos die oben vorausgesetzte Veränderung, sondern auch diese damit nothwendig verbundene in Rechnung, so ergiebt sich dasselbe Resultat, wie wenn man von dieser Voraussetzung abstrahirt und einfach annimmt, wie zuvor geschehen war, dass in den an der Gleitstelle ein- oder austretenden Elementen die Stromstärke sich innerhalb einer sehr kurzen Zeit von 0 bis i oder von i bis 0 verändere.

Der durch obige Voraussetzung also, wie mir scheint, nicht lösbare Widerspruch löst sich aber von selbst, wenn man näher prüft, ob in dem fraglichen Falle, bei der von Neumann gegebenen Ableitung des Induktionsgesetzes aus dem allgemeinen Grundgesetze der elektrischen Wirkung, alle gegebenen relativen Bewegungen der elektrischen Fluida und deren Veränderungen wirklich in Rechnung gebracht worden seien, und es soll diese Lösung gegeben werden, nachdem in dem folgenden Artikel die Beschreibung der erwähnten, von Neumann zur Entscheidung dieser wichtigen Frage angestellten Versuche nebst meiner Wiederholung derselben vorausgeschickt worden ist.

38.

Beschreibung von Neumann's Versuchen und deren Wiederholung.

Neumann sagt S. 59 der angeführten Abhandlung: „Ich werde, obgleich ich die Beschreibung von Experimenten aus dieser Abhandlung ausgeschlossen habe, in diesem Falle, wegen seiner Wichtigkeit, die Vorrichtung, deren ich mich zur Prüfung der in Rede stehenden Formeln bedient habe, in kurzen Abrissen angeben. Ein Theil des Schliesssungsdrahts einer galvanischen Kette a ist ringförmig $\beta\gamma\delta$ gebogen; das Ende δ dieses Ringes reicht sehr nahe an seinen Anfang β, ohne mit ihm in leitender Verbindung zu stehen. Eine im Mittelpunkte des Ringes senkrecht auf seiner Ebene stehende rotirende Axe $\varepsilon\eta$

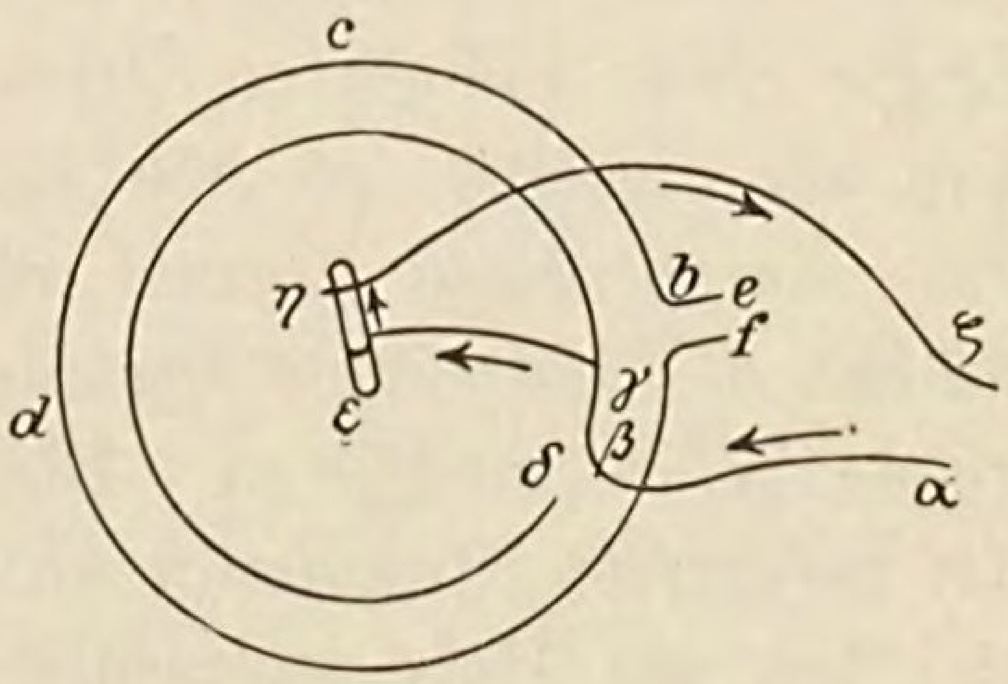


Fig. 7.

führt das bewegliche Bahnstück $\varepsilon\gamma$ mit sich im Kreise herum und zwar so, dass sein Ende in γ auf dem Ringe schleifend fortgeführt wird. Der

inducirende Strom tritt, von a kommend, bei β in den Ring und bei γ aus ihm heraus in das bewegliche Bahnstück, aus diesem in die leitende Axe $\varepsilon\eta$, bei η kehrt er durch die ruhende Drahtleitung $\eta\zeta$ nach a zurück. Diese Richtung des Stroms ist durch Pfeile in der Figur angedeutet. Koncentrisch um den Ring liegt ein kreisförmiger Leiter bcd, in welchem durch die Bewegung des Bahnstücks $\varepsilon\gamma$ ein Strom inducirt wird. Wenn das bewegliche Bahnstück von β über γ bis δ fortgeführt ist, kann die Bahn desselben, wegen der geringen Entfernung von δ bis β, als geschlossen angesehen werden, und deshalb können die gegebenen Formeln zur Bestimmung der während eines Umlaufs entwickelten elektromotorischen Kraft angewandt werden Um Richtung und Grösse des inducirten Stroms zu beobachten, war folgende Einrichtung getroffen. Der inducirte kreisförmige Leiter war bei β unterbrochen und hier mit zwei Fortsätzen e und f versehen, von denen einer unmittelbar mit dem einen Ende des Multiplikatordrahts in Verbindung stand, der andere aber zu einer Metallfeder ging, welche in schleifender Berührung mit einer Metallhülse stand, die isolirt auf die rotirende Axe $\varepsilon\eta$ gesteckt war. Der inducirte Strom ging also durch diese Feder in die Hülse, trat aus dieser durch eine zweite gegen sie drückende Metallfeder heraus und ging aus dieser zu dem anderen Ende des Multiplikatordrahts. Die Hülse hatte einen Ausschnitt, der mit Holz ausgefüllt war, auf welchem die eine Feder in dem Augenblicke lag, als das bewegliche Bahnstück $\gamma\varepsilon$ bei δ den Ring $\beta\gamma\delta$ verliess, um bei β von Neuem mit ihm in leitende Verbindung zu treten. In diesem Augenblicke nämlich wird die Schliessung des Inducenten unterbrochen und wieder hergestellt, es verschwindet sein Strom und er tritt wieder auf, dadurch wird aber in dem Leiter keine Induktion erregt, weil er ihr, nach der eben angegebenen Vorrichtung, keine geschlossene leitende Bahn darbietet. Zum Multiplikator gelangt also nur der durch die Bewegung des Bahnstücks $\gamma\varepsilon$ inducirte Strom und lässt, da er bei fortgesetzter Drehung der Axe $\varepsilon\eta$ immer in derselben Richtung fliesst, Richtung und Intensität beobachten. Die Beobachtung zeigte einen inducirten Strom, und, was die Richtung desselben betrifft, gab sie dieselbe, so wie meine Formel es fordert. Um zu beweisen, dass durch diese Formel nicht blos die Richtung, sondern auch die Stärke des inducirten Stroms richtig ausgedrückt wird, wurde auf folgende Weise verfahren. Die Feder, welche die leitende Verbindung in der inducirten Strombahn unterbrach, wurde so viel höher gestellt, dass sie den mit Holz ausgefüllten Ausschnitt der Hülse, durch den eben die Unterbrechung bewirkt wurde, nicht mehr traf. Den inducirten Strömen wird jetzt immer eine geschlossene Bahn geboten. Zum Multiplikator gelangen bei fortgesetzter rascher Drehung der Achse $\varepsilon\eta$ drei

Ströme innerhalb sehr kurzer Zeit, nämlich der durch die Bewegung des Bahnstücks $\gamma\varepsilon$ inducirte, dann der durch das Verschwinden des inducirenden Stroms inducirte, in dem Momente, wo das bewegliche Bahnstück den Ring bei δ verlässt, und endlich der durch sein Wiederauftreten inducirte, sobald das Stück den Ring in β wieder erreicht. Die Kraft, welche von diesen drei Strömen während der kurzen Dauer eines Umlaufs des Bahnstücks $\gamma\varepsilon$ auf die Magnetnadel des Multiplikators ausgeübt wird, ist mit der Summe ihrer elektromotorischen Kräfte proportional; je nachdem das Vorzeichen dieser Summe positiv oder negativ ist, wird die Nadel auf der einen Seite oder der anderen des Meridians ihre beinahe feste Stellung nehmen, oder sie wird, wenn jene Summe $= 0$ ist, in ihrer Stellung im Meridiane verharren Die Beobachtung zeigt, dass, wenn die Drehung rasch geschieht, die Nadel im Meridiane bleibt, wodurch die Richtigkeit meiner Formel sowohl in Beziehung auf die Richtung als die Stärke des inducirten Stroms erwiesen ist."

Zur Wiederholung dieser Versuche wurde 1 Kilogramm Kupferdraht, welcher $\frac{2}{3}$ Millimeter dick war, mit Seide übersponnen auf einen dünnen Messingreif von 120 Millimeter Durchmesser aufgewunden. In diesen Messingreif wurde ein hölzerner Cylinder gestellt, welcher, von etwas kleinerem Durchmesser als der Messingreif, mit einer metallenen Axe versehen war, durch die er mittelst eines Getriebes schnell gedreht werden konnte. In den hölzernen Cylinder war ein Streifen Kupfer eingelegt, welcher von der metallenen Axe bis zur Peripherie reichte. Mit diesem kupfernen Streifen waren an der Peripherie drei messingene Federn verbunden, welche den Messingreif von innen in drei Punkten berührten, welche in einer mit der Drehungsaxe parallelen Linie lagen. Diese drei Federn dienten zur Herstellung einer sicheren Berührung, damit, wenn eine der drei Federn einen Augenblick versagte, die Verbindung mit dem Messingreife durch die beiden anderen Federn erhalten würde. Von den beiden Leitungsdrähten eines Grove'schen Bechers wurde der eine an dem Lager der Drehungsaxe befestigt, der andere an irgend einen Punkt des Messingreifs. Die beiden Enden des auf den Messingreif aufgewundenen übersponnenen Kupferdrahts wurden mit dem Multiplikator des Galvanometers verbunden, dessen Nadel eine Schwingungsdauer von nahe 10 Sekunden besass.

Die beschriebene Vorrichtung unterscheidet sich von der Neumann'schen wesentlich nur in einer Beziehung, nämlich darin, dass der Messingreif nicht aufgeschnitten war, wodurch bewirkt wird, dass der Strom der Säule, welcher durch die metallene Drehungsaxe eintritt, von der einen Stelle des Messingreifs, zu welcher er durch die Messingfedern geführt wird, auf zwei Wegen zu der anderen Stelle des Messing-

reifs gelangen kann, von wo er zur Säule zurückgeführt wird: der Strom theilt sich daher zwischen diesen beiden Wegen, nämlich zwischen den beiden Theilen des Messingreifs, welche den Berührungspunkt der Messingfedern mit derjenigen Stelle verbinden, wo der andere Leitungsdraht der Säule am Messingreife befestigt ist. Durch diese Theilung des Stroms wird wesentlich dasselbe erreicht, was im NEUMANN'schen zweiten Versuche die Erhaltung des Schlusses der inducirten Kette in dem Augenblicke bezweckte, wo die Gleitstelle den Schnitt des Messingreifs passirte, dass nämlich die Summe der elektromotorischen Kräfte, welche von den an der Gleitstelle ein- und austretenden Stromelementen ausgeübt wurden, für eine ganze Umdrehung der Axe $= 0$ wird, und daher bei schneller Drehung die beobachtete Wirkung auf das Galvanometer blos von der Summe derjenigen elektromotorischen Kräfte abhing, welche von der Bewegung des Bahnstücks $\gamma\varepsilon$ herrührten. Durch die beschriebene Theilung des Stroms wird ebenfalls bewirkt, dass die Summe der elektromotorischen Kräfte, welche von den an der Gleitstelle ein- und austretenden Elementen ausgeübt werden, $= 0$ wird, und zwar nicht blos für die ganze Dauer einer Umdrehung, sondern für jeden einzelnen Augenblick, woraus für die Ausführung des Versuchs der Vortheil entspringt, dass der Erfolg nicht mehr an die Bedingung einer schnellen Drehung geknüpft ist, was bei dem NEUMANN'schen Versuche der Fall war.[1]) Eine andere Einrichtung, welche getroffen

[1]) Dass die beschriebene Theilung des Stroms die angegebene Wirkung wirklich habe, lässt sich auf folgende Weise zeigen. Bezeichnet man die konstante Intensität des ungetheilten Stroms mit i, und theilt sich dieser Strom bei seinem Eintritte in den Messingreif in zwei Theile, von denen der eine die Intensität $i_{\prime}$ hat und durch den Kreisbogen ψ zum Austrittspunkte geht, der andere die Intensität $i_{\prime\prime}$ hat und durch den Bogen $2\pi - \psi$ zum Austrittspunkte geht, so geben die OHM'schen Gesetze der Stromtheilung folgende Gleichungen:

$$i_{\prime} + i_{\prime\prime} = i,$$
$$i_{\prime} : i_{\prime\prime} = (2\pi - \psi) : \psi.$$

Nimmt nun ψ um $\mathrm{d}\psi$ zu, so verschwindet in dem Bogenelemente $\mathrm{d}\psi$ die Stromintensität $i_{\prime\prime}$ und statt dessen entsteht in demselben Elemente die Stromintensität $-i_{\prime}$ (wo das negative Vorzeichen bedeutet, dass die Richtung des neu entstandenen Stroms der Richtung des wachsenden Bogens ψ entgegengesetzt ist). Das Verschwinden eines positiven Stroms $i_{\prime\prime}$ in dem Elemente $\mathrm{d}\psi$ erzeugt eine mit $i_{\prime\prime}\mathrm{d}\psi$ proportionale elektromotorische Kraft, und das Entstehen eines negativen Stroms $-i_{\prime}$ in dem Elemente $\mathrm{d}\psi$ eine mit $-(-i_{\prime}\mathrm{d}\psi) = i_{\prime}\mathrm{d}\psi$ proportionale elektromotorische Kraft, deren Summe also, wenn a einen konstanten Faktor bezeichnet,

$$= a(i_{\prime} + i_{\prime\prime})\,\mathrm{d}\psi = a i\,\mathrm{d}\psi$$

ist. Indem nun aber ψ um $\mathrm{d}\psi$ wächst, ändert sich zugleich das Verhältniss von $i_{\prime} : i_{\prime\prime} = (2\pi - \psi) : \psi$, während die Summe $i_{\prime} + i_{\prime\prime} = i$ unverändert bleibt, woraus die beiden Differentialgleichungen erhalten werden:

wurde, um sowohl den ersten NEUMANN'schen Versuch, als auch den zweiten, ganz unverändert, zu wiederholen, soll nachher beschrieben werden.

Es wurden folgende zwei Versuche gemacht. *Erstens* wurde der hölzerne Cylinder durch das Getriebe in jeder Sekunde 10 Mal um seine Axe gedreht, während der inducirende Strom durch die Drehungsaxe und den Messingreif geführt wurde, und es wurde am Galvanometer beobachtet, dass dadurch kein Strom inducirt wurde. Der unverrückte Stand der Galvanometernadel konnte bis auf $\frac{1}{2}$ Skalentheil verbürgt werden. Dieses Resultat stimmt also mit dem des zweiten NEUMANN'schen Versuchs ganz überein. *Zweitens* wurde um den Messingreif noch ein Hülfsdraht einmal herum geführt, und seine Enden mit der Säule verbunden, so dass der Strom, statt durch die Drehungsaxe und durch den Messingreif, durch diesen Draht hindurch gehen musste. Im Augenblicke, wo diese Kette geschlossen wurde, wurde am Galvanometer ein inducirter Strom beobachtet, dessen Richtung der des inducirenden Stroms entgegengesetzt war. Bei Lösung der Kette zeigte sich ein gleich starker inducirter Strom, aber von gleicher Richtung mit dem inducirenden. In beiden Fällen erhielt die Galvanometernadel eine Ablenkung von nahe 22 Skalentheilen. Der zweite Versuch dient zum Beweise, dass im ersten Versuche, bei 100 Umdrehungen des beweglichen Stromstücks während einer Schwingung, die Galvanometernadel über 1000 Skalentheile Ablenkung erhalten haben müsste, wenn jede Umdrehung eine elektromotorische Kraft erzeugt hätte, welche der durch den zweiten Versuch bestimmten gleich wäre. Eine solche Kraft ist also nicht vorhanden.

Dieser Versuch bietet bei der beschriebenen Stromtheilung noch ein besonderes Interesse dadurch dar, dass er dem bekannten elektrodynamischen Rotationsversuche genau entspricht, wo innerhalb eines festen kreisrunden Stroms ein beweglicher Stromtheil sich befindet,

$$d i_{,} + d i_{,,} = 0,$$
$$\psi d i_{,} - (2\pi - \psi) d i_{,,} = - i d \psi,$$

folglich $d i_{,} = - i d\psi / 2\pi$ und $d i_{,,} = + i d\psi / 2\pi$. Die Intensitätsänderung $d i_{,}$ des Stroms $i_{,}$ im Bogen ψ in der Richtung abnehmender Werthe von ψ erzeugt eine mit $\psi d i_{,}$ proportionale elektromotorische Kraft $+ a\psi d i_{,} = - a\psi\, i d\psi / 2\pi$; die Intensitätsänderung $d i_{,,}$ im Bogen $(2\pi - \psi)$ in der Richtung wachsender Werthe von ψ erzeugt eine mit $-(2\pi - \psi) d i_{,,}$ proportionale elektromotorische Kraft $= - a(2\pi - \psi) d i_{,,} = - a(2\pi - \psi) i d\psi / 2\pi$. Es ergiebt sich hieraus die Summe aller elektromotorischen Kräfte in Folge der Zunahme $d\psi$ des Bogens ψ:

$$= a i d\psi - a\psi \frac{i d\psi}{2\pi} - a(2\pi - \psi)\frac{i d\psi}{2\pi} = 0,$$

was zu beweisen war.

welcher nach dem Mittelpunkte des ersteren gerichtet ist. Ueber diesen elektrodynamischen Rotationsversuch siehe POGGENDORFF in den Annalen 1849, Bd. 77, S. 22 ff. Es ist bekannt, dass der Kreisstrom den beweglichen Radialstrom rotiren macht, in der Richtung des Kreisstroms selbst oder in umgekehrter, je nachdem die Richtung des Stroms in dem beweglichen Stromtheile nach dem Mittelpunkte zu oder von ihm abgerichtet ist. Nach der sonst gültigen Regel, nach welcher elektromagnetische oder elektrodynamische Versuche in magnetoelektrische oder Voltainduktions-Versuche umgekehrt werden, scheint es, dass, wenn jener bewegliche Radialstrom gedreht wird, wie es bei unserem Versuche der Fall war, in dem festen kreisrunden Leiter ein der Drehungsrichtung paralleler oder entgegengesetzter Strom inducirt werden müsste, je nachdem der Strom in dem beweglichen Leiter von dem Mittelpunkte ab oder nach demselben zu gerichtet wäre. Auch leuchtet ein, dass die Vertauschung der Quecksilberrinne, in die man bei dem erwähnten Rotationsversuche den beweglichen Stromtheil eintauchen zu lassen pflegt, mit einem von dem beweglichen Stromtheile berührten Messingreife, unwesentlich ist und keinen Einfluss auf das Resultat haben könne. Der Versuch hat nun aber gelehrt, dass der nach der angeführten Regel zu erwartende Induktionsstrom in diesem Falle nicht Statt findet. Jene Regel der Umkehrung gilt daher nicht allgemein, sondern es findet davon eine Ausnahme Statt, wenn der geschlossene *inducirende* Strom aus einem beweglichen und einem unbeweglichen Stromtheile besteht, welche durch eine *Gleitstelle* verbunden sind. Bekanntlich findet der Induktionsstrom Statt, wenn der *inducirte* Leiter aus zwei durch eine *Gleitstelle* verbundenen Theilen besteht.

Ferner habe ich auch die NEUMANN'schen Versuche unverändert wiederholt, indem der Messingreif neben der Stelle durchschnitten wurde, wo der von der Säule kommende Leitungsdraht an ihm befestigt war. Die eine Verbindung des um den Messingreif gewundenen Drahts mit dem Multiplikator des Galvanometers wurde durch eine Feder hergestellt und konnte durch Zurückdrücken dieser Feder gelöst werden. Dieses Zurückdrücken wurde durch einen Holzstift bewirkt, welcher am Holzcylinder befestigt und so gestellt war, dass dadurch die Lösung der Feder in dem Augenblicke Statt fand, wo die am Holzcylinder angebrachten Messingfedern auf die durchschnittene Stelle des Messingreifs zu stehen kamen. Noch ist zu bemerken, dass der um den Messingreif gewundene Draht eine geringere Anzahl von Umwindungen als vorher bildete. Es wurden damit folgende Versuche gemacht. *Erstens* wurde der hölzerne Cylinder um seine Axe durch das Getriebe 10 Mal in jeder Sekunde gedreht und am Galvanometer ein inducirter Strom beobachtet, welcher so stark war, dass die Ablenkung der Nadel über

500 Skalentheile betrug und mit der Skale nicht mehr gemessen werden konnte. *Zweitens:* der Holzcylinder wurde nach Beseitigung des Holzstiftes in derjenigen Stellung festgehalten, wo die an ihn befestigten Messingfedern das mit der Säule nicht verbundene Ende des durchschnittenen Messingreifs berührten, so dass der Strom den ganzen Messingreif durchlaufen musste. In dem Augenblicke nun, wo die Säule geschlossen wurde, wurde am Galvanometer ein inducirter Strom beobachtet, welcher die Nadel um 13,5 Skalentheile in der nämlichen Richtung wie bei dem ersten Versuche ablenkte, vorausgesetzt, dass die Richtung des inducirenden Stroms die nämliche war, und dass beim ersten Versuche in derjenigen Richtung gedreht wurde, bei welcher die Messingfedern von ihrer eben beschriebenen Stelle über den Schnitt des Messingreifs fortgeführt wurden. *Drittens:* um den Messingring wurde noch ein Hülfsdraht einmal herumgewunden und die Säule so damit geschlossen, dass der Strom diese Drahtwindung in gleicher Richtung durchlief, wie vorher den Messingreif. Im Augenblicke der Schliessung der Säule wurde dann mit dem Galvanometer ein inducirter Strom beobachtet, welcher die Nadel 13,8 Skalentheile in gleicher Richtung wie vorher ablenkte. Hierauf wurde *viertens* der Multiplikator geschwächt und der erste Versuch nochmals wiederholt. Der inducirte Strom brachte dann eine bleibende Ablenkung der Magnetometernadel von 377 Skalentheilen hervor, jedoch liess sich eine feinere Messung dieser Ablenkung nicht ausführen, wegen bedeutender Schwankungen, die wahrscheinlich ihren Grund in Unvollkommenheiten der technischen Ausführung der Rotationsvorrichtung hatten. *Fünftens* wurde auch der zweite Versuch nochmals wiederholt und es ergab sich, statt der früher beobachteten Ablenkung von 13,5 Skalentheilen, mit dem geschwächten Multiplikator nur eine Ablenkung von 8 Skalentheilen. *Sechstens* endlich wurde auch der zweite Neumann'sche Versuch wiederholt, welcher sich von dem vierten Versuch nur dadurch unterschied, dass der Holzstift am Holzcylinder entfernt wurde, wodurch bewirkt wurde, dass nun bei der Drehung des Holzcylinders die inducirte Kette immer geschlossen blieb. Bei gleich schneller Drehung, wie beim ersten und vierten Versuche, wurde dann an der Galvanometernadel gar keine Ablenkung beobachtet und dieser Ruhestand konnte bis auf ein paar Skalentheile verbürgt werden, innerhalb welcher die Nadel schwankte.

Die Resultate der im vierten und fünften Versuche gemachten Messungen gestatten eine Vergleichung, welche, auch wenn diese Messungen keine grosse Genauigkeit besassen, bemerkt zu werden verdient. Aus dem Resultate der im vierten Versuche gemachten Messung lässt sich nämlich die grösste Elongation berechnen, welche die Magnetometernadel von der Ruhe ab in Folge der ihr durch eine einzige momen-

tane Umdrehung des Holzcylinders ertheilten Bewegung erreicht haben würde. Es ist nur zu diesem Zwecke noch hinzuzufügen, dass das logarithmische Dekrement der Abnahme der Schwingungsbogen der Nadel $= 0{,}471\,60$ war, oder dass, wenn man dasselbe durch den Modulus des Logarithmensystems dividirt mit λ bezeichnet, $\lambda = 1{,}088$ war. Bezeichnet man ausserdem mit y die im vierten Versuche beobachtete Ablenkung für n Umdrehungen während der Schwingungsdauer der Nadel, so ergiebt sich für die grösste Elongation, welche die Nadel in Folge der ihr durch eine Umdrehung ertheilten Bewegung erreicht haben würde, folgender Ausdruck:

$$x = \frac{y}{n} \cdot \sqrt{\pi^2 + \lambda^2} \,.\, e^{-\frac{\lambda}{\pi} \operatorname{arc\,tang} \frac{\pi}{\lambda}} \,.\text{[1]}$$

Nun ist in Skalentheilen $y = 377$, ferner $n = 100$ (weil 10 Umdrehungen auf 1 Sekunde kamen und die Schwingungsdauer $\tau = 10$ Sekunden war) und $\lambda = 1{,}088$ gefunden worden; folglich ist die grösste Elongation, welche die Magnetometernadel von der Ruhe ab in Folge der ihr durch eine Umdrehung ertheilten Bewegung erreicht haben würde, in Skalentheilen ausgedrückt,

$$x = 8{,}164,$$

während im fünften Versuche eine Elongation von 8 Skalentheilen wirklich beobachtet worden ist, wenn der Holzcylinder nicht gedreht wurde, sondern in derjenigen Stellung fest stand, bei welcher der bei Schliessung der Säule entstehende Strom den ganzen Messingreif durchlaufen musste. Aus der aus dieser Vergleichung hervorgehenden Uebereinstimmung folgt, dass der im vierten Versuche inducirte Strom, eine nur mittelbare Folge der Drehung, durch den bei jeder Umdrehung im ganzen Messingreif entstehenden Strom inducirt worden sei (dessen Wiederverschwinden keinen Einfluss ausüben konnte, weil die Multi-

[1]) Siehe *Beilage C*, wo mit Rücksicht auf die Dämpfung die der ruhenden Nadel ertheilte Drehungsgeschwindigkeit, wenn x die gesuchte Elongation und τ die Schwingungsdauer unter dem Einflusse der Dämpfung bezeichnet, ausgedrückt ist durch $\frac{x}{\tau}\sqrt{\pi^2+\lambda^2}\,.\,e^{\frac{\lambda}{\pi}\operatorname{arc\,tang}\frac{\pi}{\lambda}}$. Diese Drehungsgeschwindigkeit ist aber durch das der Ablenkung y entsprechende Drehungsmoment F, dividirt durch das Trägheitsmoment der Nadel K und multiplicirt mit der Zeit einer Umdrehung τ/n im vierten Versuche gegeben $= \tau/n \,.\, F/K$. Endlich ist das der Ablenkung y entsprechende Drehungsmoment $F = \frac{\pi^2+\lambda^2}{\tau^2} Ky$, folglich

$$\frac{x}{\tau}\sqrt{\pi^2+\lambda^2}\,.\,e^{\frac{\lambda}{n}\operatorname{arc\,tang}\frac{\pi}{\lambda}} = \frac{\tau}{n} \cdot \frac{\pi^2+\lambda^2}{\tau^2}\, y,$$

woraus sich für x der oben angeführte Ausdruck ergiebt.

plikatorkette in dem Augenblicke dieses Verschwindens gelöst war); die Drehung des beweglichen Stromstücks selbst hatte also keinen Antheil an dem inducirten Strome. Es finden sich durch diese Versuche also die von NEUMANN gegebenen Bestimmungen vollkommen bestätigt.

39.

Das Induktionsgesetz für inducirende Ströme mit Gleitstellen.

Das allgemeine Princip der mathematischen Theorie inducirter elektrischer Ströme, welches von NEUMANN aufgestellt worden ist, ist ein Theorem, welches sich auf die Ströme und Leiter im Ganzen, und zwar blos auf ihre Stärke und Lage am Anfang und am Ende der betrachteten Induktion bezieht und die gesuchte Summe der elektromotorischen Kräfte von der Betrachtung aller mitwirkenden Elemente im Einzelnen und von der Betrachtung des allmähligen Uebergangs der Ströme und Leiter aus ihrem Zustande am Anfange der Induktion zu dem am Ende derselben unabhängig darstellt. Die Erleichterung, welche ein Theorem von solcher Einfachheit und Allgemeinheit überall, wo es Anwendung findet, zur wirklichen Bestimmung der gesuchten Summe elektromotorischer Kräfte gewährt, leuchtet von selbst ein. Mit dem allgemeinen Grundgesetze der elektrischen Wirkung verhält es sich der Sache nach ganz anders, weil dieses nur eine für alle Elementarwirkungen gültige Regel geben soll, aus welcher die gesuchte Summe elektromotorischer Kräfte nicht unmittelbar erhalten wird, sondern nur mittelbar durch eine Summation aller vollständig zusammengestellten Elementarwirkungen gefunden werden kann. Es kommt daher hier bei Ableitung des Induktionsgesetzes für einen bestimmten Fall hauptsächlich auf eine für diesen Fall vollständige Zusammenstellung aller Elementarwirkungen an, welche sich aus der Betrachtung der Verhältnisse ergeben muss, welche der gegebene Fall voraussetzt. Die Ableitung der Induktionsgesetze aus dem allgemeinen Grundgesetze der elektrischen Wirkung fordert daher eine ganz besondere Aufmerksamkeit auf alle Verhältnisse, welche durch jeden gegebenen Fall bestimmt sein sollen. Es ist dies geschehen für den Fall der von Stromelementen auf andere Stromelemente oder auf Leiterelemente ausgeübten Induktion sowohl in der ersten Abhandlung über elektrodynamische Maassbestimmungen, als auch in der von NEUMANN in der angeführten Abhandlung § 5 gegebenen Ableitung, wodurch sich für diesen Fall zwei wesentlich verschiedene Arten von Elementarwirkungen herausgestellt haben, nämlich diejenigen, welche ein Stromelement durch seine relative Bewegung zum inducirten Elemente, und diejenigen, welche ein Stromelement durch Aenderung seiner Stromintensität ausübt.

Diese Eintheilung der Elementarwirkungen hat nun Neumann auch auf den Fall eines inducirenden Stroms mit *Gleitstellen* in Anwendung gebracht. Dieser Strom zerfällt in ein bewegliches und unbewegliches Stromstück, die an zwei Stellen in leitender Verbindung stehen, von denen wenigstens eine Gleitstelle ist. Es ergab sich leicht, dass die Elementarwirkungen des beweglichen Stromstücks der ersten Art angehören, nämlich denjenigen, welche die Stromelemente durch ihre relative Bewegung zu den inducirten Elementen ausüben. Eben so ergab sich, dass die Elementarwirkungen des unbeweglichen Stromstücks der zweiten Art angehören, nämlich denjenigen, welche die Stromelemente durch Aenderung ihrer Stromintensität ausüben. Den aus der ersteren Quelle stammenden Theil der elektromotorischen Kraft hatte Neumann zuerst allein berechnet, bei der nachfolgenden Prüfung aber den aus der anderen Quelle stammenden Theil der elektromotorischen Kraft noch hinzugefügt.

Eine weitere Prüfung kann nur darauf gerichtet sein, ob die Zusammenstellung der Elementarwirkungen nach den beiden angegebenen Arten für den Fall eines inducirenden Stroms mit *Gleitstelle* wirklich erschöpfend ist. In der That wäre sie wirklich erschöpfend, wenn in diesem Falle blos inducirte *Stromelemente* gegeben wären; denn diese müssen entweder dem beweglichen oder dem unbeweglichen Stromstücke angehören, wonach ihre Elementarwirkungen entweder der ersteren oder der letzteren Art sein müssen. Prüft man nun aber näher, ob in dem vorliegenden Falle wirklich alle gegebenen Bewegungen der elektrischen Fluida und deren Aenderungen auf Bewegungen der Elektricität *in Stromelementen* und deren Aenderungen zurückgeführt werden können, so ergiebt sich leicht, dass diese Zurückführung überall möglich ist, *mit Ausnahme der Gleitstelle.* An der Gleitstelle tritt nämlich eine *plötzliche* Aenderung in der Bewegung aller elektrischen Theilchen ein, indem diejenigen, welche von dem beweglichen Stromstücke zu dem unbeweglichen übergehen, an der Bewegung des ersteren Theil zu nehmen aufhören, und diejenigen, welche von dem unbeweglichen Stromstücke zu dem beweglichen übergehen, an der Bewegung des letzteren Theil zu nehmen beginnen. Diese plötzliche Aenderung in der Bewegung aller elektrischen Theilchen an der Gleitstelle, kann nicht unter denjenigen Aenderungen befasst werden, welche in den Stromelementen selbst Statt finden; denn jene Aenderung tritt weder in den Stromelementen des beweglichen Stromstücks ein, weil alle elektrischen Theilchen, so lange sie diesen Stromelementen angehören, auch an der Bewegung derselben Theil nehmen, noch tritt sie in den Stromelementen des unbeweglichen Stromstücks ein. Jene plötzliche Aenderung in der Bewegung aller elektrischen Theilchen an der Gleitstelle kann also

nicht auf Aenderungen der Bewegungen *in den Stromelementen* selbst zurückgeführt werden und ist daher die Quelle einer dritten Art von Elementarwirkungen, welche von den beiden, inducirenden Stromelementen zukommenden, Arten von Elementarwirkungen unterschieden werden muss. Es fragt sich also nur darum, ob aus der angegebenen plötzlichen Aenderung der Bewegung aller elektrischen Theilchen an der Gleitstelle nach dem allgemeinen Grundgesetze der elektrischen Wirkung elektromotorische Kräfte wirklich entspringen oder nicht. Im ersteren Falle leuchtet ein, dass diese elektromotorischen Kräfte, da sie von Neumann noch nicht in Rechnung gebracht sind, der von Neumann berechneten Summe elektromotorischer Kräfte noch hinzugefügt werden müssen.

Die Ableitung der aus der plötzlichen Aenderung in der Bewegung der elektrischen Fluida an einer *Gleitstelle* entspringenden elektromotorischen Kräfte ist auch in der im 30. Artikel der ersten Abhandlung über elektrodynamische Maassbestimmungen gegebenen Ableitung des Gesetzes der Volta-Induktion aus dem allgemeinen Grundgesetze der elektrischen Wirkung nicht mit enthalten, denn letztere ist dort ausdrücklich auf die Induktion von *Stromelementen* beschränkt worden, wobei also nur diejenigen Aenderungen der Bewegung der elektrischen Fluida in Betracht gezogen zu werden brauchten, welche in den Stromelementen vorkommen. Wenn es nun aber Aenderungen in der Bewegung der elektrischen Fluida giebt, welche in keinem Stromelemente vorkommen, sondern nur an der *Grenze* zweier Stromelemente, oder in dem Augenblicke, wo das elektrische Fluidum von dem einen Stromelemente zu dem anderen übergeht, und ein solcher Fall an einer *Gleitstelle* wirklich eintritt, so bedarf obiges Induktionsgesetz noch einer Ergänzung, wenn es diesen Fall mit umfassen soll. Diese Ergänzung kann leicht gegeben werden; denn es ist dazu nur nöthig, dass die elektrischen Massen, welche solche plötzliche Aenderungen der Geschwindigkeit ihrer Bewegung erleiden, und die Grösse dieser Aenderungen genau bestimmt seien, um das allgemeine Grundgesetz der elektrischen Wirkung auch hierauf in Anwendung zu bringen. Dabei sollen zum leichteren Verständniss dieselben Bezeichnungen gebraucht werden, wie in der im 30. Artikel der ersten Abhandlung über elektrodynamische Maassbestimmungen gegebenen Ableitung; auch sollen Kürze halber alle hierbei in gleicher Weise gültigen Bestimmungen nicht nochmals entwickelt, sondern von dort entlehnt werden.

Was die *Masse* des elektrischen Fluidums betrifft, welche eine plötzliche Aenderung in ihrer Bewegung an der Gleitstelle erleidet, so kann diese nicht, wie es bei einem Stromelemente geschah, durch das Produkt $+ ae$ ausgedrückt werden, wo a die Länge des Stromelements bezeichnete, sondern es muss an die Stelle von a die Länge des Weg-

elements $u\mathrm{d}t$ gesetzt werden, welches die Elektricität mit der Geschwindigkeit u, mit welcher sie durch die Gleitstelle geht, in dem Zeitelemente $\mathrm{d}t$ zurücklegen würde. Die inducirten Massen können dagegen eben so, wie Art. 30 der angeführten Abhandlung, durch $+ a'e'$ und $- a'e'$ dargestellt werden, wo a' die Länge des inducirten Elements und $+ e'$ die in der Längeneinheit des inducirten Leiters enthaltene positive oder negative Elektricität bezeichnet.

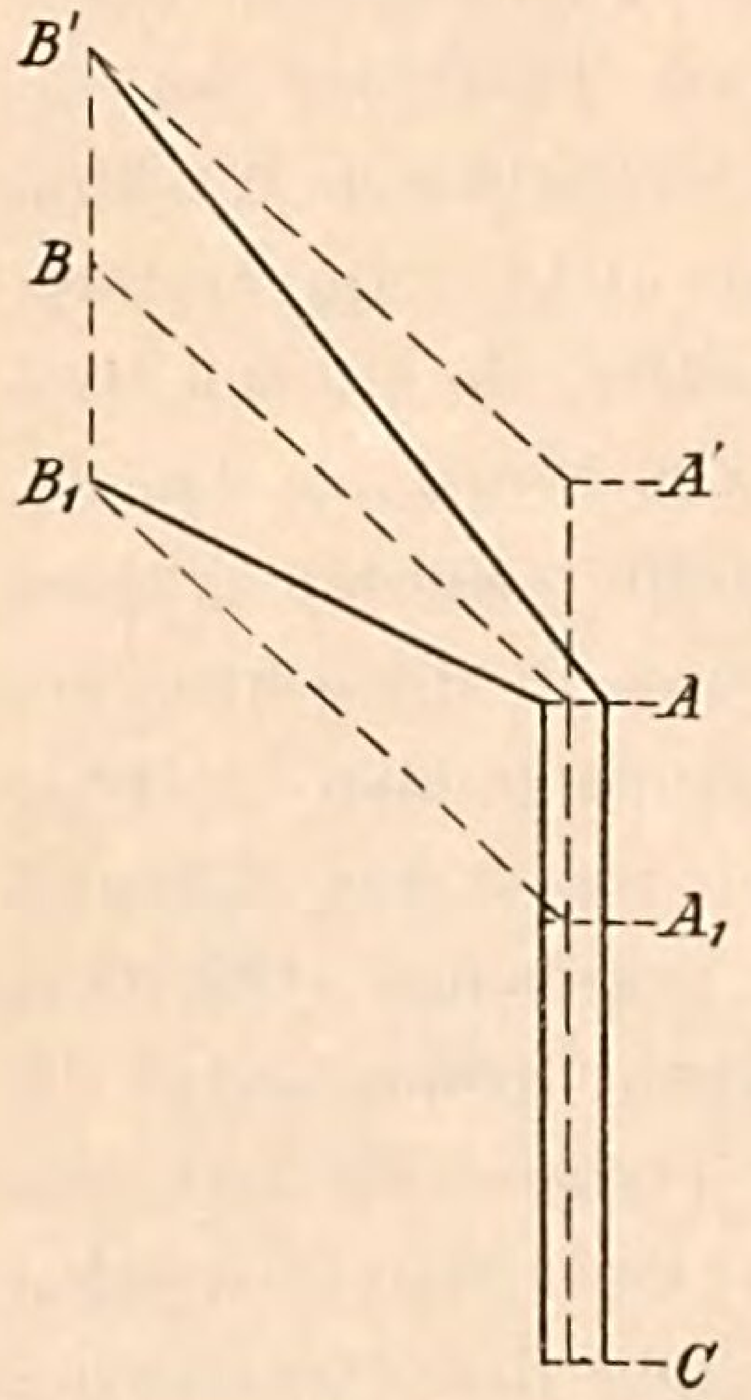


Fig. 8.

Die Bewegungen jener inducirenden Massen $+ eu\mathrm{d}t$ und $- eu\mathrm{d}t$ und die von ihnen durchlaufenen Bahnen lassen sich auf folgende Weise darstellen. A sei die Gleitstelle, AB der angrenzende Theil des beweglichen, AC der angrenzende Theil des unbeweglichen Stromstücks. Die Wege $CA = AB$ werden von den elektrischen Fluidis mit der Geschwindigkeit u in derselben Zeit durchlaufen, in welcher das bewegliche Stromstück von A_1B_1 bis AB oder von AB bis $A'B'$ fortrückt. Die Zusammensetzung beider Bewegungen ergiebt für die negative Masse (wenn diese von dem beweglichen Stromstück zum unbeweglichen übergeht) die Bahn B_1AC, und das Bahnstück B_1A wird in gleicher Zeit wie AC durchlaufen; für die positive Masse ergiebt sich eben so die Bahn CAB', und die Stücken CA und AB' werden in gleicher Zeit durchlaufen. In dieser Darstellung ist der Deutlichkeit wegen angenommen worden, dass der Strom an der Gleitstelle A eine plötzliche Wendung mache und von der Richtung CA zur Richtung AB übergehe. In der Wirklichkeit findet eine solche plötzliche Wendung nicht Statt, sondern man kann annehmen, dass die beiden Elemente der wahren Strombahn CA und AB nahe eine gerade Linie bilden. Bezeichnet man dann mit v die Geschwindigkeit des beweglichen Stromstücks, so ist $A_1A = AA' = B_1B = BB' = v\mathrm{d}t$, während die Länge der Stromelemente $CA = AB = u\mathrm{d}t$ ist. Hieraus ergiebt sich also für die positive Masse, dass sie in zwei gleichen auf einander folgenden Zeitelementen $\mathrm{d}t$ die Wege $CA = u\mathrm{d}t$ und $AB' = (u + v)\,\mathrm{d}t$, für die negative Masse, dass sie in denselben Zeitelementen die Wege $B_1A = -(u - v)\,\mathrm{d}t$ und $AC = -u\mathrm{d}t$ zurücklegt. Die Geschwindigkeit der positiven Elektricität geht also bei A von $+ u$ plötzlich zu $+ (u + v)$ über; die Geschwindigkeit der negativen Elektricität geht dagegen bei

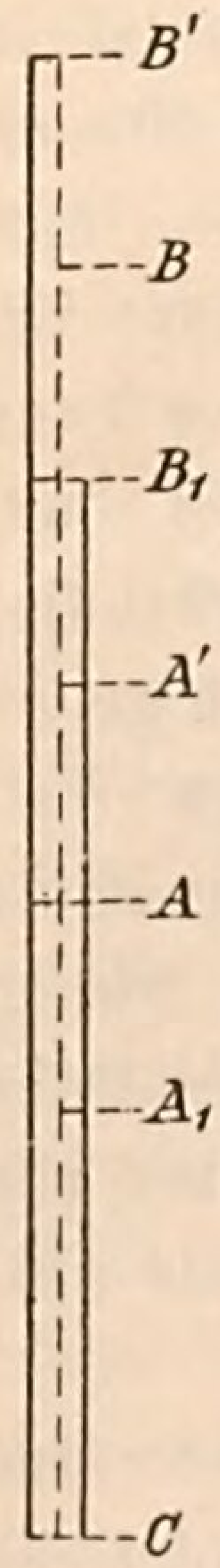


Fig. 9.

A von $-(u - v)$ plötzlich zu $-u$ über. Soll auch dieser Wechsel der Geschwindigkeit nach dem Gesetz der Stetigkeit geschehen, so bezeichne man die, wenn auch noch so kleine, Zeit dieses Uebergangs mit τ und in irgend einem Augenblicke $d\sigma$ am Ende des Zeitabschnitts σ im Zeitraum τ die Geschwindigkeit der positiven Elektricität mit $+(u + v \,.\, \sigma/\tau)$ und eben so die Geschwindigkeit der negativen Elektricität mit $-(u + v \,.\, \sigma/\tau - v)$. Ausserdem bezeichne man, wie in Art. 30 der angeführten Abhandlung, mit ϑ den Winkel, welchen die Richtung von $+u$, d. h. AB mit $Aa' = r$ macht, mit ϑ' den Winkel, welchen die Richtung, nach welcher sich die positive Elektricität im unbewegten inducirten Elemente a' mit der Geschwindigkeit $+u'$ bewegt, mit der verlängerten Geraden Aa' macht, und mit ω den Winkel der beiden Ebenen, welche durch Aa' parallel mit der Richtung von $+u$ und von $+u'$ gelegt werden. Endlich bezeichne r_1 den Abstand der Masse $+eu\mathrm{d}t$ von der Masse $+a'e'$, r_2 den Abstand der Masse $-eu\mathrm{d}t$ von der Masse $-a'e'$, r_3 den Abstand der Masse $+eu\mathrm{d}t$ von der Masse $-a'e'$, r_4 den Abstand der Masse $-eu\mathrm{d}t$ von der Masse $+a'e'$, die sämmtlich für den betrachteten Augenblick $= r$ sind, aber bei der Verschiedenheit der Bewegung jener Massen nicht gleich bleiben. Es ergiebt sich dann aus dem allgemeinen Grundgesetze der elektrischen Wirkung die *Differenz* der Kräfte, welche auf die *positive* und *negative* Elektricität im Elemente a' wirken, von welcher die *Induktion* abhängt,

$$-\frac{a^2}{16} \cdot \frac{eu\mathrm{d}t \,.\, a'e'}{r^2} \left\{\left(\frac{\mathrm{d}r_1^2}{\mathrm{d}t^2} - \frac{\mathrm{d}r_2^2}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\mathrm{d}r_3^2}{\mathrm{d}t^2} - \frac{\mathrm{d}r_4^2}{\mathrm{d}t^2}\right) - 2r\left(\frac{\mathrm{d}^2 r_1}{\mathrm{d}t^2} - \frac{\mathrm{d}^2 r_2}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\mathrm{d}^2 r_3}{\mathrm{d}t^2} - \frac{\mathrm{d}^2 r_4}{\mathrm{d}t^2}\right)\right\}.$$

Dieser Ausdruck unterscheidet sich von dem Ausdrucke dieser für ein inducirendes Stromelement im 30. Artikel der angeführten Abhandlung S. 197 abgeleiteten Differenz blos dadurch, dass $eu\mathrm{d}t$ an die Stelle von ae gesetzt ist. Ferner findet man auf die dort angegebene Weise für unseren Fall

$$\frac{\mathrm{d}r_1}{\mathrm{d}t} = -\left(u + \frac{\sigma}{\tau}v\right)\cos\vartheta + u'\cos\vartheta',$$

$$\frac{\mathrm{d}r_2}{\mathrm{d}t} = +\left(u + \frac{\sigma}{\tau}v - v\right)\cos\vartheta - u'\cos\vartheta',$$

$$\frac{\mathrm{d}r_3}{\mathrm{d}t} = -\left(u + \frac{\sigma}{\tau}v\right)\cos\vartheta - u'\cos\vartheta',$$

$$\frac{\mathrm{d}r_4}{\mathrm{d}t} = +\left(u + \frac{\sigma}{\tau}v - v\right)\cos\vartheta + u'\cos\vartheta',$$

welche von den a. a. O. gefundenen Gleichungen sich nur dadurch unterscheiden, dass $+(u + v \,.\, \sigma/\tau)$ statt $+u$ für die Geschwindigkeit der

inducirenden positiven Elektricität und $-(u+v\,.\,\sigma/\tau-v)$ statt $-u$ für die Geschwindigkeit der inducirenden negativen Elektricität gesetzt und das von der Bewegung des inducirten Elements α' abhängige Glied weggelassen worden ist. Es ist also

$$\left(\frac{dr_1^2}{dt^2}-\frac{dr_2^2}{dt^2}+\frac{dr_3^2}{dt^2}-\frac{dr_4^2}{dt^2}\right)=+4\left(u+\frac{\sigma}{\tau}v-\tfrac{1}{2}v\right)v\cos\vartheta^2.$$

Die zweiten Differentialquotienten erhält man hieraus auf die dort angegebene Weise, wenn man berücksichtigt, dass hier u, u' und v gegebene konstante Werthe haben, nämlich:

$$\frac{d^2r_1}{dt^2}=+\left(u+\frac{\sigma}{\tau}v\right)\sin\vartheta\frac{d\vartheta_1}{dt}-u'\sin\vartheta'\frac{d\vartheta'_1}{dt}-\frac{v}{\tau}\cos\vartheta,$$

$$\frac{d^2r_2}{dt^2}=-\left(u+\frac{\sigma}{\tau}v-v\right)\sin\vartheta\frac{d\vartheta_2}{dt}+u'\sin\vartheta'\frac{d\vartheta'_2}{dt}+\frac{v}{\tau}\cos\vartheta,$$

$$\frac{d^2r_3}{dt^2}=+\left(u+\frac{\sigma}{\tau}v\right)\sin\vartheta\frac{d\vartheta_3}{dt}+u'\sin\vartheta'\frac{d\vartheta'_3}{dt}-\frac{v}{\tau}\cos\vartheta,$$

$$\frac{d^2r_4}{dt^2}=-\left(u+\frac{\sigma}{\tau}v-v\right)\sin\vartheta\frac{d\vartheta_4}{dt}-u'\sin\vartheta'\frac{d\vartheta'_4}{dt}+\frac{v}{\tau}\cos\vartheta.$$

Es ist also:

$$\left(\frac{d^2r_1}{dt^2}-\frac{d^2r_2}{dt^2}+\frac{d^2r_3}{dt^2}-\frac{d^2r_4}{dt^2}\right)=+\left(u+\frac{\sigma}{\tau}v\right)\sin\vartheta\left(\frac{d\vartheta_1}{dt}+\frac{d\vartheta_2}{dt}+\frac{d\vartheta_3}{dt}+\frac{d\vartheta_4}{dt}\right)$$
$$-u'\sin\vartheta'\left(\frac{d\vartheta'_1}{dt}+\frac{d\vartheta'_2}{dt}-\frac{d\vartheta'_3}{dt}-\frac{d\vartheta'_4}{dt}\right)$$
$$-v\sin\vartheta\left(\frac{d\vartheta_2}{dt}+\frac{d\vartheta_4}{dt}\right)-4\frac{v}{\tau}\cos\vartheta$$

und man findet auf die dort angegebene Weise

$$r\frac{d\vartheta_1}{dt}=+\left(u+\frac{\sigma}{\tau}v\right)\sin\vartheta-u'\sin\vartheta'\cos\omega,$$

$$r\frac{d\vartheta_2}{dt}=-\left(u+\frac{\sigma}{\tau}v-v\right)\sin\vartheta+u'\sin\vartheta'\cos\omega,$$

$$r\frac{d\vartheta_3}{dt}=+\left(u+\frac{\sigma}{\tau}v\right)\sin\vartheta+u'\sin\vartheta'\cos\omega,$$

$$r\frac{d\vartheta_4}{dt}=-\left(u+\frac{\sigma}{\tau}v-v\right)\sin\vartheta-u'\sin\vartheta'\cos\omega,$$

$$r\frac{d\vartheta'_1}{dt}=-u'\sin\vartheta'+\left(u+\frac{\sigma}{\tau}v\right)\sin\vartheta\cos\omega,$$

$$r\frac{d\vartheta'_2}{dt}=+u'\sin\vartheta'-\left(u+\frac{\sigma}{\tau}v-v\right)\sin\vartheta\cos\omega,$$

$$r\frac{d\vartheta'_3}{dt}=+u'\sin\vartheta'+\left(u+\frac{\sigma}{\tau}v\right)\sin\vartheta\cos\omega,$$

$$r\frac{d\vartheta'_4}{dt}=-u'\sin\vartheta'-\left(u+\frac{\sigma}{\tau}v-v\right)\sin\vartheta\cos\omega.$$

Substituirt man diese Werthe, so ist

$$r\left(\frac{d\vartheta_1}{dt}+\frac{d\vartheta_2}{dt}+\frac{d\vartheta_3}{dt}+\frac{d\vartheta_4}{dt}\right)=+2v\sin\vartheta,$$

$$r\left(\frac{d\vartheta'_1}{dt}+\frac{d\vartheta'_2}{dt}-\frac{d\vartheta'_3}{dt}-\frac{d\vartheta'_4}{dt}\right)=0,$$

$$r\left(\frac{d\vartheta_2}{dt}+\frac{d\vartheta_4}{dt}\right)=-2\left(u+\frac{\sigma}{\tau}v-v\right)\sin\vartheta,$$

folglich:

$$r\left(\frac{d^2r_1}{dt^2}-\frac{d^2r_2}{dt^2}+\frac{d^2r_3}{dt^2}-\frac{d^2r_4}{dt^2}\right)=+4\left(u+\frac{\sigma}{\tau}v-\tfrac{1}{2}v\right)v\sin\vartheta^2-4\frac{rv}{\tau}\cos\vartheta,$$

woraus endlich die *Differenz* der Kräfte, welche auf die *positive* und *negative* Elektricität im Elemente α' wirken, und von welcher die *Induktion* abhängt, sich ergiebt, nämlich:

$$-\frac{a^2}{16}\cdot\frac{eu\,dt\,.\,\alpha'e'}{r^2}\left\{\left(\frac{dr_1^2}{dt^2}-\frac{dr_2^2}{dt^2}+\frac{dr_3^2}{dt^2}-\frac{dr_4^2}{dt^2}\right)-2r\left(\frac{d^2r_1}{dt^2}-\frac{d^2r_2}{dt^2}+\frac{d^2r_3}{dt^2}-\frac{d^2r_4}{dt^2}\right)\right\},$$

$$=-\frac{a^2}{4}\cdot\frac{eu\,dt\,.\,\alpha'e'}{r^2}\left(u+\frac{\sigma}{\tau}v-\tfrac{1}{2}v\right)v\,(\cos\vartheta^2-2\sin\vartheta^2)-\frac{a^2}{2}\frac{eu\,dt\,.\,\alpha'e'\,v}{r}\frac{v}{\tau}\cos\vartheta.$$

Multiplicirt man diesen Ausdruck mit dem Zeitelement $d\sigma$ und integrirt von $\sigma=0$ bis $\sigma=\tau$, so erhält man den Integralwerth jener Differenz für die Dauer des Uebergangs τ

$$=-\frac{a^2eu\,dt\,.\,\alpha'e'}{4\quad r^2}\cdot uv\tau\,.\,(\cos\vartheta^2-2\sin\vartheta^2)-\frac{a^2}{2}\cdot\frac{eu\,dt\,.\,\alpha'e'}{r}\cdot v\cos\vartheta,$$

oder, wenn τ verschwindend klein ist, d. h. wenn der Wechsel der Geschwindigkeit in den elektrischen Fluidis an der Gleitstelle sehr schnell geschieht,

$$=-\frac{a^2}{2}\cdot\frac{eu\,dt\,.\,\alpha'e'}{r}\cdot v\cos\vartheta.$$

Setzt man nun hierin, wie a. a. O. S. 202 angegeben ist, $aeu=i$ und multiplicirt man $\cos\vartheta'/e'$, so ergiebt sich die in dem Zeitelemente dt von der durch die Gleitstelle gegangenen Elektricität auf das inducirte Element α' ausgeübte *elektromotorische* Kraft

$$=-\frac{1}{2}\frac{\alpha'v\,dt}{r}\cdot ai\cos\vartheta\cos\vartheta'.$$

Nun ist aber

$$v\,dt=\alpha$$

die Länge des in die Kette während des Zeitelements dt an der Gleitstelle neu eintretenden Leiterelements, in welchem also die Stromstärke von 0 bis i wächst. Bei dem Wachsthum der Stromintensität di/dt in

dem Elemente α ist aber die von diesem Elemente auf α' ausgeübte *elektromotorische* Kraft a. a. O. S. 202

$$= -\frac{1}{2} \cdot \frac{\alpha\alpha'}{r} a \cos\vartheta \cos\vartheta' \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

gefunden worden, folglich die elektromotorische Kraft für das Wachsthum der Stromintensität von 0 bis i

$$= -\frac{1}{2}\frac{\alpha\alpha'}{r} ai \cos\vartheta \cos\vartheta'$$

und setzt man endlich hierin für a seinen Werth $v\,\mathrm{d}t$, so ersieht man, dass die in dem Zeitelemente $\mathrm{d}t$ von der durch die Gleitstelle gehenden Elektricität auf das inducirte Element α' ausgeübte elektromotorische Kraft der von dem an der Gleitstelle in demselben Zeitelemente $\mathrm{d}t$ neu eintretenden Stromelemente αi auf das inducirte Element α' ausgeübten elektromotorischen Kraft sowohl der Grösse als auch der Richtung nach gleich ist, und dass man daher, um die erstere Kraft in Rechnung zu bringen, blos die letztere Kraft zu verdoppeln brauche. Diese Verdoppelung ist aber, wie Neumann nachgewiesen hat, die Bedingung dafür, dass das aus dem allgemeinen Grundgesetze der elektrischen Wirkung abgeleitete Induktionsgesetz mit den Resultaten aus Neumann's allgemeinem Principe der mathematischen Theorie inducirter Ströme und mit der Erfahrung auch in dem Falle einer Gleitstelle übereinstimme. Diese Uebereinstimmung ist also hiermit nachgewiesen. Die plötzliche Aenderung, welche in der Bewegung aller elektrischen Theilchen an der Gleitstelle eintritt, ist also die Ursache von elektromotorischen Kräften, welche Neumann bei der von ihm gegebenen Ableitung des Induktionsgesetzes aus dem allgemeinen Grundgesetze der elektrischen Wirkung nicht in Rechnung gebracht hat, und fügt man die Summe der aus dieser Quelle entspringenden elektromotorischen Kräfte der von Neumann gefundenen Summe hinzu, so findet sich der Widerspruch, welcher zwischen den Resultaten des allgemeinen Grundgesetzes der elektrischen Wirkung und Neumann's allgemeinem Principe der mathematischen Theorie inducirter Ströme zu bestehen schien, vollständig gelöst, was zu beweisen war.

Nach den hier entwickelten Gesetzen lassen sich endlich die Resultate aller in Art. 38 beschriebenen Versuche voraussagen. Bezeichnet man nämlich mit R den Halbmesser des von der Gleitstelle beschriebenen Kreises, von welchem die Halbmesser der inducirten Kreise $R_{\prime}$ nur wenig verschieden waren, und ist m die Zahl der letzteren und n die Zahl der Umdrehungen des beweglichen Stromstücks

in der Zeiteinheit, i die Stärke des inducirenden Stroms und wird endlich Kürze halber

$$R_0 = \frac{R^2 R'^2}{(R^2+R'^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \left\{1 + \frac{15}{8}\left(\frac{RR'}{R^2+R'^2}\right)^2 + \frac{315}{64}\left(\frac{RR'}{R^2+R'^2}\right)^4 + \cdots\right\}$$

gesetzt, so ergiebt sich aus obigen Gesetzen

1. die Summe der elektromotorischen Kräfte des beweglichen Stromstücks

$$= + mn\pi^2 \,.\, aiR_0;$$

2. die Summe der elektromotorischen Kräfte der an der Gleitstelle allmählig neu eintretenden Stromelemente (wenn die Wirkung ihres plötzlichen Verschwindens durch eine momentane Lösung der inducirten Kette bei jeder Umdrehung aufgehoben wird, wie im ersten NEUMANN'schen Versuche es der Fall war)

$$= - mn\pi^2 \,.\, aiR_0;$$

3. die Summe der elektromotorischen Kräfte der durch die Gleitstelle gehenden Elektricität, wegen der plötzlichen Aenderung ihrer Geschwindigkeit in der Gleitstelle,

$$= - mn\pi^2 \,.\, aiR_0 \,.$$

Die Ableitung dieser Werthe siehe in der *Beilage E*. Aus diesen partiellen Summen lassen sich die ganzen elektromotorischen Kräfte für alle in Art. 38 beschriebenen Versuche leicht zusammensetzen. Es ergiebt sich nämlich

a) für den ersten NEUMANN'schen Versuch die elektromotorische Kraft durch Addition aller drei partiellen Summen

$$= - mn\pi^2 \,.\, aiR_0 \,.$$

Dasselbe gilt für die beiden Wiederholungen dieses Versuchs, wenn nur für m der in jedem Versuche ihm zukommende Werth gesetzt wird. Das negative Vorzeichen bedeutet, dass der Strom in den inducirten Kreisen die entgegengesetzte Richtung hat, wie der Strom in dem kreisförmigen inducirenden Stromstücke, wenn letzteres durch die an der Gleitstelle neu eintretenden Elemente wächst.

b) Für den zweiten NEUMANN'schen Versuch, wo die elektromotorische Kraft der an der Gleitstelle neu eintretenden Stromelemente durch das plötzliche Verschwinden derselben am Ende jeder Umdrehung aufgehoben wurde, fällt die partielle Summe unter (2) weg, und es sind blos die beiden partiellen Summen unter (1) und (3) zu addiren, welche die elektromotorische Kraft geben

$$= 0 \,.$$

Dasselbe gilt für die Wiederholung dieses Versuchs, so wie auch für diejenige Modifikation desselben, wo dieselbe Wirkung, welche durch das plötzliche Verschwinden aller während einer Umdrehung allmählig neu eingetretenen Stromelemente am Ende der Umdrehung hervorgebracht wurde, durch eine Stromtheilung erreicht worden ist.

c) Es bleiben also nur noch diejenigen Versuche übrig, wo der inducirende Strom, welcher durch einen kreisförmigen Leiter ging, eine Intensitätsänderung erlitt, entweder von 0 bis i oder von i bis 0, und wobei dieser Strom entweder gar nicht durch das bewegliche Stück des Leiters geführt wurde, oder dieses Stück, während der Strom durchging, nicht bewegt wurde. Für diese Versuche fallen die partiellen Summen unter (1) und (3) ganz weg und es bleibt als elektromotorische Kraft blos die partielle Summe unter (2), worin für n der Werth $= 1$ zu setzen ist, also

$$= -m\pi^2 . aiR_0 .$$

Das negative Vorzeichen bedeutet, dass bei Schliessung der Kette der Strom im inducirten Kreise die entgegengesetzte Richtung hat, wie der Strom im inducirenden Kreise.

Alle diese elektromotorischen Kräfte sind nach dem allgemeinen Kraftmaasse der Mechanik ausgedrückt und können nach Art. 27 durch Multiplikation mit $c/4 = 1/a$ auf das Art. 26 definirte absolute Maass zurückgeführt werden. Durch diese Reduktion fällt der unbekannte Faktor a in dem Ausdrucke jener Kräfte weg und der reducirte Werth kann durch Messung bestimmt werden. Uebrigens geben obige Ausdrücke die mittlere Stärke der elektromotorischen Kraft oder den Integralwerth derselben für die Zeiteinheit in allen denjenigen Versuchen, wo die Wirkung gleichförmig fortdauert. Für diejenigen Versuche dagegen, wo die Wirkung nur eine momentane ist, geben obige Ausdrücke den Integralwerth der elektromotorischen Kraft für die ganze Dauer der Wirkung. Bezeichnet T_0 im Allgemeinen die Zeit, für welche der gefundene Integralwerth der elektromotorischen Kraft gilt (wonach also in allen denjenigen Versuchen, wo die Wirkung gleichförmig fortdauert, $T_0 = 1$ zu setzen ist), so ergiebt sich die mittlere Stärke der elektromotorischen Kraft durch Division des gefundenen Integralwerths mit T_0 und kann also für (1), (2) und (3) dargestellt werden durch

$$\pm mn\pi^2 \cdot \frac{R_0}{T_0} \cdot i,$$

wo m die Zahl der inducirten Kreise und n die Zahl der Umdrehungen bezeichnet. Dividirt man diese mittlere Stärke der elektromotorischen Kraft mit dem Widerstande der inducirten Kette, wie er nach dem Art. 26 definirten Maasse gefunden wird, so erhält man die mittlere

Intensität des inducirten Stroms. Nun hat sich aber ergeben, dass der Widerstand nach dem angegebenen Maasse durch

$$p \cdot \frac{R'}{T'}$$

dargestellt werden kann, wo p eine reine Zahl ist, R' dagegen, gleichwie R_0, auf das gewählte Raummaass, T' gleichwie T_0 auf das gewählte Zeitmaass sich beziehen; folglich ergiebt sich für die mittlere Intensität des inducirten Stroms der Ausdruck

$$\pm \frac{mn\pi^2}{p} \cdot \frac{R_0}{R'} \cdot \frac{T'}{T_0} \cdot i,$$

wo $(mn\pi^2/p) \cdot (R_0/R') \cdot (T'/T_0)$ eine aus den Messungen zu berechnende reine Zahl ist, welche das Verhältniss der Stärke des inducirten Stroms zum inducirenden angiebt. Es ist hierdurch die Möglichkeit gegeben, auch die Stärke des inducirten Stroms nach dem gegebenen Maasse vorauszusagen.

Beilagen.

A.

Beschreibung eines bei Widerstandsmessungen zu gebrauchenden magnetischen Induktors.

Bei den Versuchen zur Vergleichung des Widerstands zweier Leiter wurde ein magnetischer Induktor als Elektromotor gebraucht, welcher auf die folgende Weise eingerichtet war. Zwei cylindrische Magnetstäbe von 300 Millimeter Länge und 15 Millimeter Dicke wurden in einer hölzernen Röhre so befestigt, dass sie einander gleiche Pole (die Nordpole) zukehrten, die jedoch, damit sie einander bei dieser Lage nicht schwächten, durch einen 150 Millimeter weiten Zwischenraum von einander geschieden waren. Die hölzerne Röhre Fig. 10 AB sammt den eingeschlossenen Magneten sn, sn konnte durch einen mit dem Fusse in Bewegung zu setzenden Hebelapparat $CDEF$ senkrecht gehoben und wieder gesenkt und durch die Höhle einer Induktorrolle GG hin- und hergeschoben werden, welche unbeweglich auf der oberen Seite des am Fussboden angeschraubten Gestelles $HHHH$ befestigt war. Fig. 10 stellt diesen Apparat in seinem Höhendurchschnitt dar (s. S. 429). Die Südpole der beiden Magnetstäbe sind mit s, die Nordpole mit n bezeichnet. Die Holzröhre, in welcher die beiden Magnetstäbe befestigt sind, ist an beiden Enden mit aufgeschraubten Deckeln verschlossen. Wird die Röhre in der Induktorrolle so weit abwärts geschoben, dass, wie in Fig. 10, der obere Deckel an die Induktorrolle GG anstösst, so befindet sich die Mitte des oberen Magnetstabs im Mittelpunkte der Induktorrolle; wird dagegen die Röhre so weit aufwärts geschoben, dass der untere Deckel an das Gestell HH, auf welchem die Induktorrolle GG befestigt ist, anstösst, so befindet sich die Mitte des unteren Magnetstabs im Mittelpunkte der Induktorrolle. In diesen beiden äussersten Lagen ist die Induktion Null, weil die elektromotorischen Kräfte der zu beiden Seiten der Induktorrolle symmetrisch gelegenen Pole, wenn beide zugleich nach oben oder unten bewegt werden, sich aufheben. Während der ganzen Schiebung der Röhre von unten nach oben geschieht die Induktion in gleichem Sinne und ist am stärksten während des Durch-

gangs der beiden Nordenden der Magnetstäbe durch die Induktionsrolle. Während der ganzen Schiebung in der entgegengesetzten Richtung, von oben nach unten, geschieht die Induktion im entgegengesetzten Sinne. Eine jede solche Bewegung heisst ein Induktionsstoss, und zwar ein positiver oder negativer, je nachdem die Schiebung aufwärts oder abwärts geschieht. — Dass jeder Induktionsstoss mit einer Lage beginnt und endigt, für welche die Induktion Null ist, hat den Zweck, dass der ganze Werth der einem Induktionsstosse entsprechenden Induktion ein Maximum sei und unverändert bleibe, auch wenn jene äussersten Lagen nicht ganz genau erreicht würden. Die einfache Schiebung, durch welche ein solcher ganzer Induktionsstoss bewerkstelligt wird, gestattet

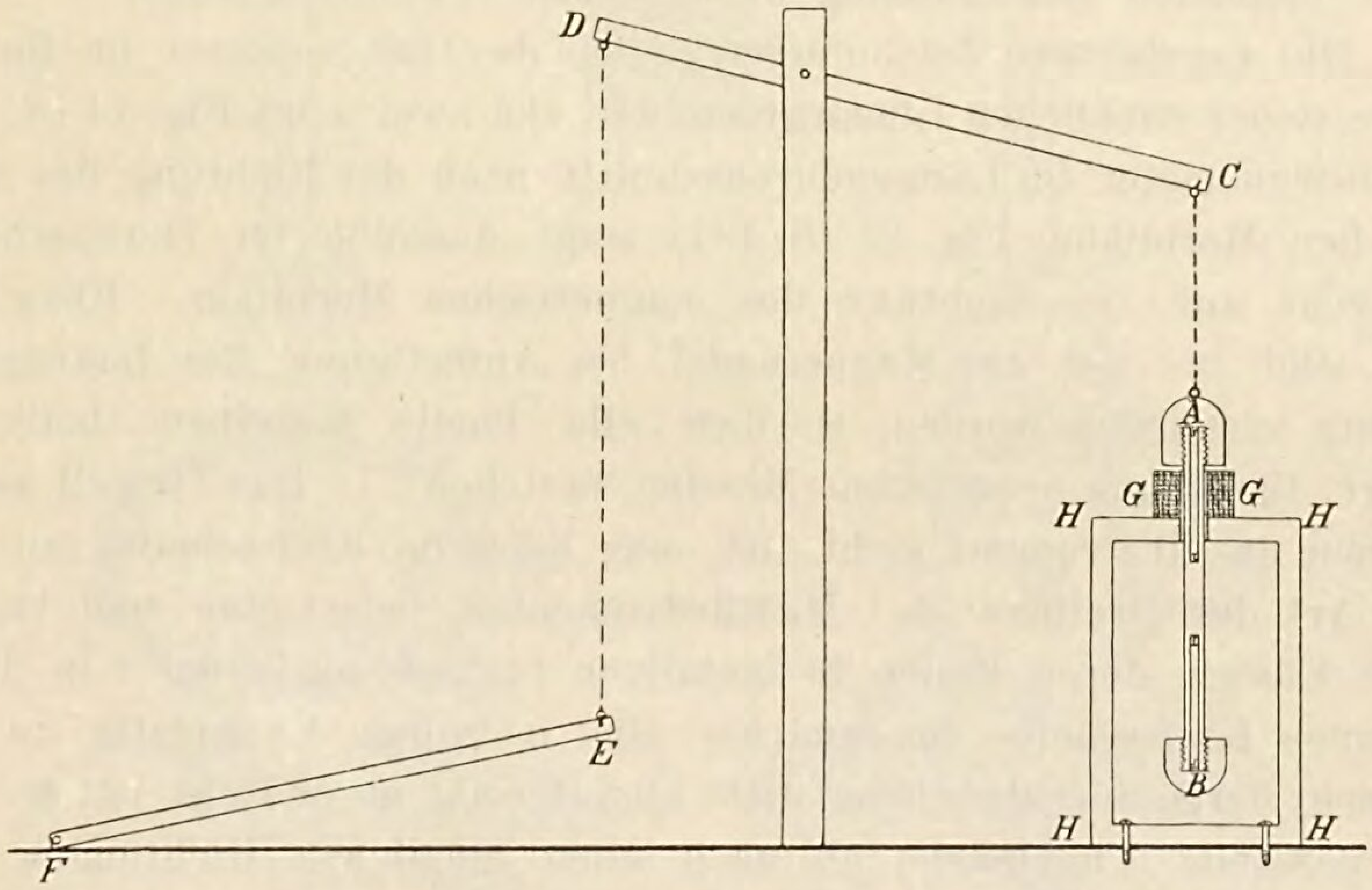


Fig. 10.

eine sehr rasche Ausführung und eignet sich daher besonders zu Messungen, wo die Induktionsstösse genau in den Augenblicken Statt finden sollen, in welchen die Galvanometernadel durch ihre Gleichgewichtslage geht. Um diese Augenblicke recht genau einhalten zu können, ist die Einrichtung getroffen, das der positive Induktionsstoss, d. h. die Schiebung von unten nach oben, durch Niedersetzen des Fusses auf dem Hebel *EF* bewerkstelligt wird, während der negative Induktionsstoss, d. h. die Schiebung von oben nach unten, durch das Gewicht des Induktors von selbst erfolgt, sobald der niedergesetzte Fuss wieder aufgehoben wird. Auf diese Weise kann der Beobachter, welcher den Gang der Galvanometernadel mit dem Fernrohre verfolgt, ohne das Fernrohr zu verlassen, den Induktionsstoss genau in dem Augenblicke geben, wo er die Nadel ihre Gleichgewichtslage passiren sieht.

B.

Beschreibung des Galvanometers.

Die folgende Beschreibung ist vom Herrn Mechanikus Leyser in Leipzig, welcher schon mehrere solche Instrumente verfertigt hat und von welchem es zu dem unten bemerkten Preise zu erhalten ist. Es ist dieses Galvanometer zugleich auch dazu eingerichtet, dass die Stärke der damit beobachteten Ströme nach dem Art. 10 festgestellten absoluten Maasse bestimmt werden kann, wozu zwei an Maassstäben verschiebbare Multiplikatoren in verschiedenen Entfernungen von der Nadel gebraucht werden. Da diese Einrichtung mit dem Instrumente nicht nothwendig verbunden ist und hier nicht gebraucht wurde, so ist sie in der folgenden Beschreibung nicht weiter erwähnt worden.

„Die zugehörigen Zeichnungen stellen das Galvanometer im fünften Theile seiner wirklichen Lineargrösse dar, und zwar zeigt Fig. 11 (S. 431) das Galvanometer im Längendurchschnitte nach der Richtung des magnetischen Meridians; Fig. 13 (S. 431) zeigt dasselbe im Durchschnitte senkrecht auf der Richtung des magnetischen Meridians. Eisen und Stahl sind bis auf die Magnetnadel bei Anfertigung des Instruments sorgsam vermieden worden, so dass alle Theile desselben theils aus Kupfer, theils aus eisenfreiem Messing bestehen. — Das Gestell selbst, auf dem das Instrument steht, ist eine hölzerne Kreisscheibe mit drei nach Art der Dreifüsse bei Messinstrumenten befestigten und beweglichen Füssen, deren Enden in metallene Spitzen auslaufen. In dieser hölzernen Kreisscheibe ist zunächst eine metallene Kreisplatte *aa* eingelassen, deren durchbrochene Mitte kugelförmig ausgedreht ist, so dass eine passende Kugelfläche *bb* nach allen möglichen Richtungen sich einstellen und mittelst eines Bolzens *c* und einer Schraubenmutter *d* an der Kreisplatte *aa* feststellen lässt. Auf der erwähnten Kugelfläche *bb* ist nun das eigentliche Galvanometer befestigt. Zu diesem Zwecke setzt sich diese Kugelfläche *bb* nach oben in zwei parallele Seitenplatten fort, die in Fig. 11 durch punktirte Linien angedeutet, in Fig. 13 dagegen deutlich zu sehen sind. Zwischen diesen Seitenplatten ist der kupferne Dämpfer *eeee* in Form eines oval gebogenen, in sich selbst zurückkehrenden Rings von 80 Millimeter Breite und 8 Millimeter Stärke mit zwei Schrauben zu jeder Seite befestigt. Der Durchschnitt dieses kupfernen Dämpfers ist eine Ellipse, in deren grosser Axe die Magnetnadel *nn* schwebt. Ueber diesen Dämpfer lässt sich ein aus dünnem Messingblech angefertigter Rahmen seitwärts überschieben, der, mit aufrechtstehenden Wänden versehen, eine Quantität übersponnenen Kupferdrahts aufnimmt und somit über dem Dämpfer noch einen Multiplikator *mmmm* darstellt. Die Drahtwindungen dieses Multiplikators

laufen ellipsenförmig um den Dämpfer herum, bestehen aus neun koncentrischen Lagen über einander, jede Lage aus 80 neben einander gelegenen Umwindungen; der Draht hat gegen $\frac{2}{3}$ Millimeter Stärke. Hierbei ist die Einrichtung getroffen, den Multiplikator bald ganz, bald

Fig. 11.

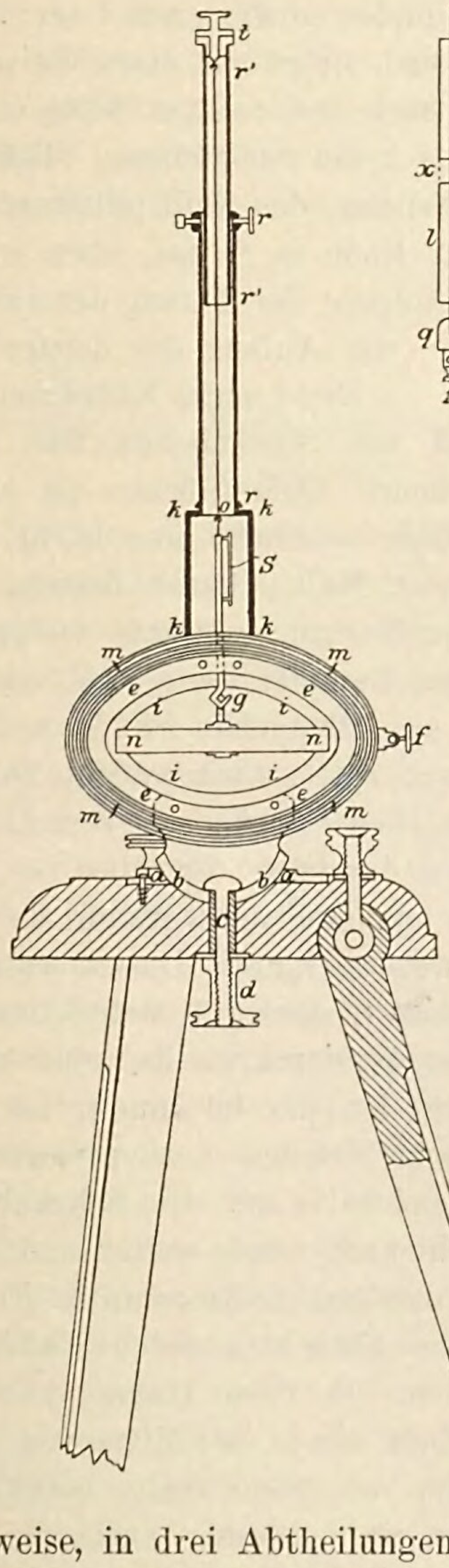


Fig. 12.

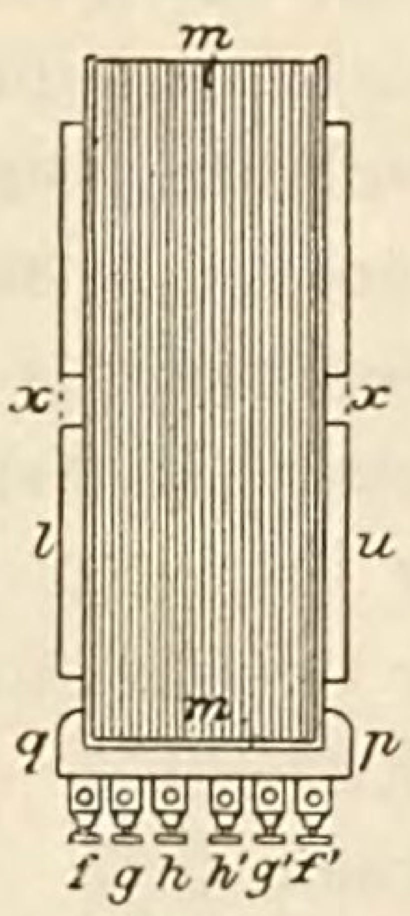
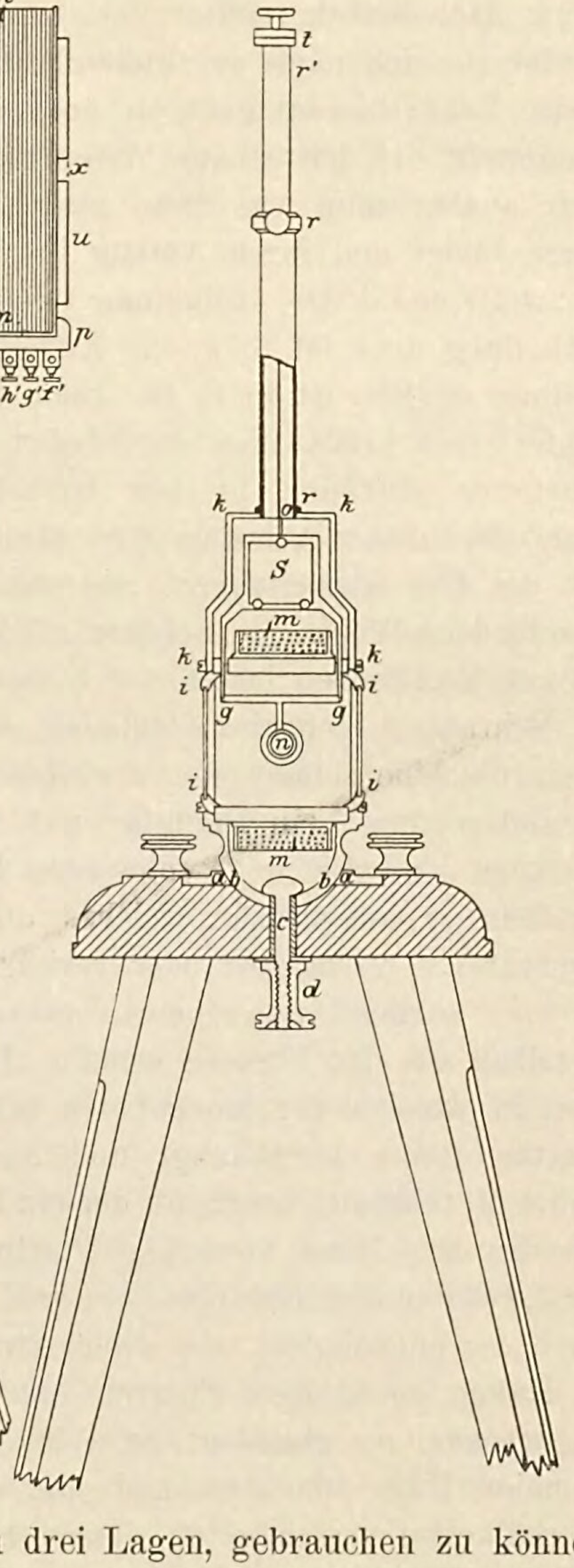


Fig. 13.



theilweise, in drei Abtheilungen zu drei Lagen, gebrauchen zu können. Auch lassen sich diese drei Abtheilungen so verbinden, dass sie gleichzeitig von demselben Strome durchlaufen werden, der sich zwischen ihnen theilt. Die Einrichtung, welche zu diesem Zwecke dem Multi-

plikator gegeben ist, wird durch Fig. 12 (S. 431) deutlich, welche den Multiplikator von oben herab gesehen darstellt; *qp* ist ein Querstäbchen von Buchsbaumholz, welches an den vorstehenden Wänden des Rahmens für den Multiplikator *mm* befestigt ist. Die erste Abtheilung des Multiplikators beginnt mit der ersten oder untersten Lage der Windungen, deren Anfang am Knöpfchen *f* ist; sie geht um den kupfernen Dämpfer herum nach dessen rechter Seite *u* und bildet so die erste Lage; dann wendet sie sich nach der linken Seite *l* und bildet auf diese Weise die zweite Lage; hierauf geht sie nochmals nach der rechten Seite *u*, und so entsteht die dritte Lage, deren Ende sich am Knöpfchen f' befindet. Ganz analog nun, wie diese erste Abtheilung des Multiplikators drei Lagen bildet und ihren Anfang in *f*, ihr Ende in f' hat, eben so hat die zweite und dritte Abtheilung jede drei Lagen; der Anfang der zweiten Abtheilung aber ist in *g*, ihr Ende in g'; der Anfang der dritten Abtheilung endlich ist in *h*, ihr Ende in h'. — Diese sechs Knöpfchen von Kupfer sind kreuzweise durchbohrt und mit Schräubchen fest, aber isolirt von einander, in dem buchsbaumenen Querstäbchen *qp* eingesetzt. Bei dieser Anordnung des Multiplikators ersieht man leicht, dass sich die drei Abtheilungen, aus denen der Multiplikator besteht, auf verschiedene Weise, je nachdem die Knöpfchen durch Drähte verbunden werden, kombiniren lassen. — Ueber dem Dämpfer *eeee*, und an ihm mit Schrauben befestigt, befindet sich ein Rähmchen *kkkk*, welches, indem die eine seiner offenen Seiten durch eine schwache Metallplatte, die andere durch ein Planglas mit parallelen Oberflächen verschlossen ist, einen viereckigen geschlossenen Raum darstellt. Darüber ist noch ein Rohr *rr* angebracht, welches durch ein stellbares graduirtes Auszugsrohr $r'r'$ verlängert oder verkürzt werden kann. Dieses Auszugsrohr $r'r'$ schliesst mit einem Torsionskreise *t*, dessen Konstruktion unmittelbar aus den Figuren erhellt. Dieser Torsionskreis hat eine kleine Oese, in welcher der Kokonfaden befestigt ist, der im Innern des vereinigten Rohrs herabhängt und an einem Häkchen *o* eine viereckige leichte Metallplatte trägt, an der ein Planspiegel *s* mit drei Schräubchen befestigt ist. Diese viereckige Platte geht nach unten weiter und zwar durch zwei an dem Dämpfer *eeee* seitlich angebrachte Ausschnitte (Fig. 12 durch *xx* angedeutet), als zwei schwache Stäbchen, deren Enden als die Haken *gg* in den Figuren erscheinen. In diese Haken wird die Magnetnadel *nn* eingelegt, zu welchem Ende sie in der Mitte von einer schmalen Hülse umgeben und mit einem an dieser Hülse befestigten Querbälkchen versehen ist, dessen Enden walzenförmig auslaufen und in jenen Häkchen *gg* eingelegt werden. Die Lage der Nadel hinsichtlich ihrer Höhe wird durch das Auszugsrohr $r'r'$ regulirt; durch Drehung des Torsionskreises *t* kann die Torsion des Fadens auf Null gebracht

werden; mittelst der Kugelbewegung aber, welche die Kugelfläche *bb* mit der Platte *aa* zulässt, kann das ganze System des Instruments stets vertikal eingestellt werden, welche Einstellung am leichtesten geschieht, wenn man das Auszugsrohr in der Nähe des Torsionskreises anfasst und bei sehr sanfter Anziehung der Schraube *d* die Einstellung vornimmt, die man dann bei erhaltener richtiger Lage des Instruments durch Anziehung der Schraube *d* feststellt. Die nach beiden Seiten noch offenen Durchsichten des Dämpfers *eeee* sind durch Einsetzen verglaster Holzrähmchen zu schliessen, deren Durchschnitt in *iiii* anschaulich gemacht ist. Der Preis des Instruments mit der Einrichtung zu absoluten Messungen ist 80 Thlr., ohne dieselbe 60 Thlr.“

C.

Uebersicht der Beobachtungsmethoden für galvanische Messungen mit Rücksicht auf den Einfluss der Dämpfung.

Bei den galvanischen Messungen wird gewöhnlich nur derjenige galvanische Strom in Rechnung gebracht, welcher, ausserhalb des Multiplikators erregt, durch denselben geleitet wird, um durch die der Nadel ertheilte Ablenkung gemessen zu werden. Ist dieser Strom *konstant* und wird die Ablenkung der Nadel nicht eher gemessen, als bis sie zur *Ruhe* gekommen ist, so hängt die Ablenkung der Nadel wirklich blos von diesem Strome ab; ist der Strom aber nicht konstant, oder dauert er nur sehr kurze Zeit, und beobachtet man die Ablenkung, ehe die Nadel zur Ruhe gekommen ist, beobachtet man z. B. die erste Elongation der Nadel, so sind ausser dem zu messenden Strome noch andere Ströme vorhanden, die häufig einen grossen Einfluss auf die Beobachtungen haben, der nicht unbeachtet bleiben darf. Diese Ströme rühren von der Bewegung der Magnetnadel her, welche in allen sie umgebenden Leitern galvanische Ströme *inducirt*, deren Intensität dem Magnetismus der Nadel und der Geschwindigkeit proportional ist, mit welcher sie sich bewegt, und deren Richtung stets so beschaffen ist, dass durch ihre Rückwirkung auf die Nadel die vorhandene Bewegung derselben verlangsamt oder *gedämpft* wird.

Ein solcher Strom wird von der bewegten Magnetnadel *erstens* im Multiplikator selbst inducirt und ist desto stärker, je grösser der metallische Querschnitt des ganzen Multiplikators und je grösser der Theil ist, welchen der Widerstand des Multiplikators von dem Widerstande der ganzen Kette bildet: er ist am stärksten, wenn der Multiplikator in sich geschlossen wird, und ist am schwächsten, wenn die Kette des Multiplikators gelöst wird.

Ein solcher Strom wird *zweitens* von der bewegten Magnetnadel auch in allen Metalltheilen des Instruments erregt, und die Rückwirkung auf die Magnetnadel ist besonders stark, wenn vertikale Platten in der Richtung des magnetischen Meridians nahe an der Nadel sich befinden, oder wenn die Nadel von einem vertikalen Metallringe umgeben ist, weshalb ein solcher Ring, wenn er absichtlich zu diesem Zwecke angebracht wird, ein *Dämpfer* heisst. Die Anwendung eines solchen Dämpfers gewährt bei den meisten Messungen nicht allein eine grosse Erleichterung, sondern gestattet oft auch eine grössere Präcision der Beobachtungen. Siehe die *„Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins im Jahre 1837“*, S. 18.[1])

Es kommt nun darauf an, die Resultate der Beobachtungen von dem dämpfenden Einflusse dieser beiden Ströme unabhängig zu machen, oder die wegen der *Dämpfung* an den Beobachtungen anzubringende *Korrektion* zu bestimmen. Diese Korrektion wird besonders wichtig und bedeutend, wenn man sich zu galvanischen Messungen entweder eines mit Dämpfer versehenen *Magnetometers* oder einer *astatischen Doppelnadel* bedient, die aus zwei stärkeren Magnetnadeln zusammengesetzt ist, und entweder ebenfalls mit Dämpfer versehen, oder von einem starken Multiplikator eng umschlossen ist. Besonders im letzteren Falle, wo die Dämpfung vom Multiplikator herrührt und sehr verschieden sein kann bei verschiedener Schliessung des Multiplikators, ist eine solche Korrektion nothwendig, um die Versuche unter einander vergleichbar zu machen.

Zur Bestimmung dieser Korrektion soll *erstens* die Dämpfungskraft des Instruments näher bestimmt werden, was durch die Beobachtung der *Abnahme der Schwingungsbogen* leicht geschehen kann. Sodann soll *zweitens* gezeigt werden, wie der Einfluss dieser Dämpfungskraft bei den verschiedenen Beobachtungsmethoden in der Berechnung der Resultate bestimmt oder eliminirt wird.

1. *Bestimmung der Dämpfungskraft eines Galvanometers.*

Die Dämpfungskraft eines Galvanometers zerfällt in zwei Theile, welche von einander getrennt werden müssen, nämlich in einen *konstanten*, von der Kette, zu welcher der Multiplikator gehört, unabhängigen Theil, und in einen *variablen.*

Den *konstanten* Theil der Dämpfungskraft erhält man durch Beobachtung der Abnahme der Schwingungsbogen, während die Kette, zu welcher der Multiplikator gehört, gelöst ist. Die Schwingungsbogen bilden bekanntlich, wenn sie nicht sehr gross sind, eine abnehmende

[1]) [Gauss' Werke, Bd. V, p. 372.]

geometrische Reihe, welche dargestellt werden kann durch Ae^0; $Ae^{-\lambda'}$; $Ae^{-2\lambda'} \ldots . Ae^{-n\lambda'}$, wo n die Zahl der Schwingungen bezeichnet, welche die Nadel, von dem Augenblicke, wo der Bogen $= A$ war, an gerechnet, gemacht hat. Während der Dauer einer Schwingung nimmt also der Bogen in dem Verhältnisse

$$e^{\lambda'} : 1,$$

während der Dauer zweier Schwingungen in dem Verhältnisse

$$e^{2\lambda'} : 1,$$

während der Dauer von n Schwingungen in dem Verhältnisse

$$e^{n\lambda'} : 1$$

ab. Nimmt man hiernach den Exponenten λ' als Maass der Dämpfung während der Dauer einer Schwingung, oder während τ' Sekunden, wenn τ' die Schwingungsdauer der Nadel in Sekunden ausdrückt, so ist $2\lambda'$ das Maass der Dämpfung für $2\tau'$ Sekunden, und $n\lambda'$ ist das Maass für $n\tau'$ Sekunden. Das Verhältniss der so bestimmten Dämpfungskräfte zu den Zeiträumen, auf welche sie sich beziehen, giebt dann endlich die Konstante $\lambda'/\tau' = 2\lambda'/2\tau' = n\lambda'/n\tau'$, welche das *auf die Zeiteinheit reducirte Maass der Dämpfung* ausdrückt. λ' ist aber nichts Anderes als der natürliche Logarithmus des Verhältnisses zweier auf einander folgender Schwingungsbogen, und τ' ist die Schwingungsdauer der Nadel unter dem Einflusse der Dämpfung; man erhält also das auf die Zeiteinheit reducirte Maass der Dämpfung, wenn man jenen Logarithmus mit dieser Schwingungsdauer, die sich beide aus den Beobachtungen leicht bestimmen lassen, dividirt.

Zur Bestimmung des *variablen* Theils der Dämpfungskraft wird die Abnahme der Schwingungsbogen beobachtet, während der Multiplikator in sich selbst geschlossen ist. Ist $e^{\lambda''} : 1$ das durch die Beobachtung gefundene Verhältniss zweier auf einander folgender Schwingungsbogen und τ'' die Schwingungsdauer, so ist das *Maass der Dämpfung für die Zeiteinheit*

$$= \frac{\lambda''}{\tau''}.$$

Die Dämpfungskraft des in sich selbst geschlossenen Multiplikators für sich ergiebt sich hieraus

$$= \frac{\lambda''}{\tau''} - \frac{\lambda'}{\tau'}.$$

In den meisten Fällen ist der Unterschied der Schwingungsdauer τ'' von τ' unmerklich und es wird dann das Maass der Dämpfung des in sich selbst geschlossenen Multiplikators

$$= \frac{1}{\tau'}(\lambda'' - \lambda').$$

Hieraus bestimmt sich nun der *variable* Theil der Dämpfung, wenn man den Bruchtheil kennt, welchen der Widerstand des Multiplikators von dem der ganzen Kette bildet. Bezeichnet a den Widerstand des Multiplikators, $a+b$ den Widerstand der ganzen Kette, so ist der gesuchte *Werth des variablen Theils der Dämpfung*

$$= \frac{a}{a+b}\left(\frac{\lambda''}{\tau''} - \frac{\lambda'}{\tau'}\right),$$

worin blos b veränderlich ist und für jeden einzelnen Fall besonders bestimmt werden muss. Fügt man hierzu das Maass des konstanten Theils der Dämpfung $= \lambda'/\tau'$, so giebt die Summe den *Werth der wirklichen Dämpfung* $= \lambda/\tau$

$$\frac{\lambda}{\tau} = \frac{a}{a+b}\cdot\frac{\lambda''}{\tau''} + \frac{b}{a+b}\cdot\frac{\lambda'}{\tau'},$$

wo für den betreffenden Fall λ den natürlichen Logarithmus des Verhältnisses zweier auf einander folgender Schwingungsbogen, τ die Schwingungsdauer bezeichnet.

2. *Berechnung der galvanischen Messungen mit Rücksicht auf Dämpfung.*

Hat man auf diese Weise die Dämpfungskraft des Instruments bestimmt, so lässt sich diese Bestimmung benutzen, um bei den verschiedenen Beobachtungsmethoden in der Berechnung der Resultate den Einfluss der Dämpfung zu eliminiren, wobei die Anweisung zu benutzen ist, welche Gauss in den „*Resultaten aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins im Jahre 1837*“, S. 58 ff.[1]) zur Bestimmung der Schwingungsdauer einer Magnetnadel gegeben hat, in welcher man die Gesetze entwickelt findet, nach denen die Dämpfung auf den Stand und die Schwingungsdauer der Nadel wirkt. Es sollen hier die verschiedenen Beobachtungsmethoden einzeln, bei allen aber nur kleine Schwingungen der Nadel, betrachtet werden.

Beobachtungen der ersten Elongation.

1. Beobachtet man bei galvanischen Messungen blos die *erste Elongation*, welche die Magnetnadel nach dem Eintritt eines *konstanten* Stroms macht, so ist bekanntlich diese Elongation, wenn *keine Dämpfung* Statt findet, das Doppelte derjenigen Ablenkung der Nadel, bei welcher sie unter der Einwirkung jenes Stroms im Gleichgewicht beharren würde; findet dagegen *Dämpfung* Statt, so wird die dem Gleichgewicht

[1]) [Gauss' Werke, Bd. V, p. 374.]

der Nadel entsprechende Ablenkung E aus der beobachteten ersten Elongation x der Nadel auf folgende Weise bestimmt:

$$E = \frac{x}{1 + e^{-\lambda}},$$ [1]

wofür bei kleinen Werthen von λ gesetzt werden kann:

$$E = \tfrac{1}{2}\, x + \tfrac{1}{4}\, \lambda x\,.$$

2. Beobachtet man bei galvanischen Messungen die *erste Elongation*, nachdem die ruhende Nadel durch einen *momentanen* Strom (durch einen Induktionsstoss) in Bewegung gesetzt worden, so kommt es wesentlich darauf an, aus der beobachteten Elongation der Nadel $= x$ die *Geschwindigkeit* herzuleiten, welche jener momentane Strom der Nadel

[1]) Für den Stand der schwingenden Nadel $= x$ am Ende der Zeit $= t$ hat man *ohne Dämpfung* den Ausdruck:

$$x = p + A \sin \frac{\pi}{T}\,(t - B),$$

wo T die Schwingungsdauer bezeichnet; *mit Dämpfung* dagegen

$$x = p + A e^{-\frac{\lambda}{\tau} t} \cdot \sin \frac{\pi}{\tau}\,(t - B),$$

wo τ die Schwingungsdauer der Nadel unter dem Einflusse der Dämpfung ausdrückt und durch folgende Gleichung bestimmt wird:

$$\frac{\pi^2}{\tau^2} = \frac{\pi^2}{T^2} - \frac{\lambda^2}{\tau^2}.$$

Siehe „*Resultate*“ 1837, S. 74, 75 [Gauss' Werke, Bd. V, p. 389], wo ε dasselbe bezeichnet, was hier λ/τ und T' dasselbe, was hier τ. Wird nun zum Anfangspunkt der Zeit t derjenige Augenblick gewählt, wo der konstante Strom die Nadel zu bewegen beginnt, wo also die Geschwindigkeit $dx/dt = 0$ und hieraus $\text{tang}\,(-B\pi/\tau) = \pi/\lambda$ folglich: $-B = \tau/\pi\,.\,\text{arc tang}\,\pi/\lambda = \tfrac{1}{2}\tau - \tau/\pi\,.\,\text{arc tang}\,\lambda/\pi$; und wird ferner der bisherige Stand der Nadel zum Anfangspunkt der Elongation x genommen, also $x = 0$ für $t = 0$, so erhält obige Gleichung folgende Form:

$$x = -\frac{\pi A}{\sqrt{\pi^2 + \lambda^2}} + A e^{-\frac{\lambda}{\tau} t} \cos\left(\frac{\pi}{\tau}\, t - \text{arc tang}\, \frac{\lambda}{\pi}\right),$$

wo $-\pi A/\sqrt{\pi^2 + \lambda^2} = E$ den neuen Ruhestand der Nadel unter dem Einflusse des konstanten Stroms bezeichnet; folglich für den Augenblick der *ersten Elongation* $t = \tau$, mit Rücksicht auf $\cos(\pi - \text{arc tang}\,\lambda/\pi) = -\dfrac{1}{\sqrt{1 + \lambda^2/\pi^2}}$,

$$x = -\frac{\pi A}{\sqrt{\pi^2 + \lambda^2}} \cdot (1 + e^{-\lambda}) = E\,(1 + e^{-\lambda}),$$

folglich

$$E = \frac{x}{1 + e^{-\lambda}}.$$

ertheilt hatte. Diese Geschwindigkeit C ergiebt sich aus folgender Gleichung:

$$C = x \cdot \frac{\pi}{T} \cdot e^{\frac{\lambda}{\pi} \operatorname{arc\,tang} \frac{\pi}{\lambda}},\ [1])$$

wo T die Schwingungsdauer der Nadel bezeichnet, wenn keine Dämpfung Statt findet. Für kleine Werthe von λ kann man setzen

$$C = \frac{\pi}{T} x + \frac{1}{2} \frac{\pi}{T} \lambda x.$$

Methode der Multiplikation.

1. Beobachtet man, wegen der Schwäche des zu messenden *konstanten* Stroms, nicht blos die erste Elongation, sondern lässt man die Nadel hin- und herschwingen, indem man am Ende jeder Schwingung die Richtung des Stroms im Multiplikator wechselt, und beobachtet dann die wachsende Grösse der auf einander folgenden Schwingungsbogen, welche mit $x_1, x_2, x_3 \ldots$ bezeichnet werden, so ergiebt sich hieraus die dem Gleichgewicht der Nadel entsprechende Ablenkung E aus folgenden Gleichungen:

[1]) Durch Differentiation der Gleichung in der vorhergehenden Note:
$x = p + Ae^{-\frac{\lambda}{\tau} t} \sin \frac{\pi}{\tau}(t - B)$ erhält man:

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{\lambda}{\tau} Ae^{-\frac{\lambda}{\tau} t} \sin \frac{\pi}{\tau}(t - B) + \frac{\pi}{\tau} Ae^{-\frac{\lambda}{\tau} t} \cos \frac{\pi}{\tau}(t - B).$$

Rechnet man nun die Zeit t von demjenigen Augenblicke an, wo der momentane Strom auf die Nadel wirkt und ihr die Geschwindigkeit $= C$ ertheilt, so ist $B = 0$ und $dx/dt = C$ für $t = 0$; folglich $A\pi/\tau = C$ oder $A = C\tau/\pi$. Setzt man nun zur Vereinfachung den ursprünglichen Stand der Nadel $p = 0$, so erhält man

$$x = \frac{\tau}{\pi} Ce^{-\frac{\lambda}{\tau} t} \sin \frac{\pi}{\tau} t,$$

folglich für das Ende der ersten Elongation, für welches $dx/dt = 0$ und also $\operatorname{tang} \pi t/\tau = \pi/\lambda$, $t = \tau/\pi \,.\, \operatorname{arc\,tang} \pi/\lambda$, $\sin \pi t/\tau = \frac{1}{\sqrt{1 + \lambda^2/\pi^2}}$,

$$x = C \cdot \frac{\tau}{\sqrt{\pi^2 + \lambda^2}} \cdot e^{-\frac{\lambda}{\pi} \operatorname{arc\,tang} \frac{\pi}{\lambda}}.$$

Nun ist aber $\tau/\sqrt{\pi^2 + \lambda^2} = T/\pi$, wie sich aus der oben angeführten Gleichung $\pi^2/\tau^2 = \pi^2/T^2 - \lambda^2/\tau^2$ ergiebt, folglich ist

$$x = C \cdot \frac{T}{\pi} e^{-\frac{\lambda}{\pi} \operatorname{arc\,tang} \frac{\pi}{\lambda}} \text{ oder } C = x \frac{\pi}{T} e^{\frac{\lambda}{\pi} \operatorname{arc\,tang} \frac{\pi}{\lambda}}.$$

$$-\frac{x_1}{E} = 1 + e^{-\lambda},$$

$$+\frac{x_2}{E} = 2 + 3\,e^{-\lambda} + e^{-2\lambda},$$

$$-\frac{x_3}{E} = 2 + 4\,e^{-\lambda} + 3\,e^{-2\lambda} + e^{-3\lambda},$$

$$+\frac{x_4}{E} = 2 + 4\,e^{-\lambda} + 4\,e^{-2\lambda} + 3\,e^{-3\lambda} + e^{-4\lambda}.\text{[1]}$$

[1] Es gilt hier bis zum Ende der ersten Elongation dieselbe Gleichung, wie in der Note S. 437, nämlich:

$$x = -\frac{\pi A}{\sqrt{\pi^2+\lambda^2}} + A e^{-\frac{\lambda}{\tau}t} \cos\left(\frac{\pi}{\tau}t - \text{arc tang}\frac{\lambda}{\pi}\right),$$

also im Augenblicke der ersten Elongation für $t=\tau$, $x = -\left(\pi A/\sqrt{\pi^2+\lambda^2}\right)\cdot\left(1+e^{-\lambda}\right)$. In diesem Augenblicke, wo die erste Schwingung endigt und die zweite beginnt, wird der Strom im Multiplikator gewechselt, wodurch der bisherige Ruhestand der Nadel $-\pi A/\sqrt{\pi^2+\lambda^2}$ in $+\pi A/\sqrt{\pi^2+\lambda^2}$ verwandelt wird; die Ablenkung der Nadel von ihrem Ruhestande, welche am Ende der ersten Schwingung $x + \pi A/\sqrt{\pi^2+\lambda^2} = -\left(\pi A/\sqrt{\pi^2+\lambda^2}\right).e^{-\lambda}$ war, verwandelt sich dadurch in $= -\left(\pi A/\sqrt{\pi^2+\lambda^2}\right)\cdot\left(2+e^{-\lambda}\right)$, woraus sich für die Dauer der zweiten Schwingung, von $t=\tau$ bis $t=2\tau$,

$$x = +\frac{\pi A}{\sqrt{\pi^2+\lambda^2}} + A\left(2+e^{-\lambda}\right) e^{-\frac{\lambda}{\tau}(t-\tau)} \cos\left(\frac{\pi}{\tau}t - \text{arc tang}\frac{\lambda}{\pi}\right)$$

ergiebt, also am Ende der zweiten Elongation, für $t=2\tau$,

$$x = +\frac{\pi A}{\sqrt{\pi^2+\lambda^2}}\left(1+2\,.\,e^{-\lambda}+e^{-2\lambda}\right).$$

Eben so erhält man für die Dauer der dritten Schwingung von $t=2\tau$ bis $t=3\tau$,

$$x = -\frac{\pi A}{\sqrt{\pi^2+\lambda^2}} + A\left(2+2e^{-\lambda}+e^{-2\lambda}\right) e^{-\frac{\lambda}{\tau}(t-2\tau)} \cos\left(\frac{\pi}{\tau}t - \text{arc tang}\frac{\lambda}{\pi}\right);$$

also am Ende der dritten Elongation, für $t=3\tau$,

$$x = -\frac{\pi A}{\sqrt{\pi^2+\lambda^2}}\left(1+2e^{-\lambda}+2e^{-2\lambda}+e^{-3\lambda}\right)$$

u. s. w. Schreibt man die gefundenen Werthe von x für $t=0$, $t=\tau$, $t=2\tau$, $t=3\tau$ u. s. w. unter einander

$$0$$

$$-\frac{\pi A}{\sqrt{\pi^2+\lambda^2}}\left(1+e^{-\lambda}\right),$$

$$+\frac{\pi A}{\sqrt{\pi^2+\lambda^2}}\left(1+2e^{-\lambda}+e^{-2\lambda}\right),$$

$$-\frac{\pi A}{\sqrt{\pi^2+\lambda^2}}\left(1+2e^{-\lambda}+2e^{-2\lambda}+e^{-3\lambda}\right),$$

so geben die Unterschiede zweier auf einander folgender Werthe von x, der Reihe nach, die gesuchten Schwingungsbogen x_1, x_2, x_3, worin $\pi A/\sqrt{\pi^2+\lambda^2} = E$ zu setzen ist.

Je grösser λ ist, desto schneller nähert sich x/E einem Grenzwerthe, für welchen man folgenden Ausdruck erhält:

$$\pm \frac{x}{E} = \frac{4}{1 - e^{-\lambda}} - 2;$$

folglich findet man, wenn man die Versuche so lange fortsetzt, bis die Schwingungsbogen zu wachsen aufhören, die dem Gleichgewicht der Nadel entsprechende Ablenkung E aus den übereinstimmenden Werthen x der letzten Schwingungsbogen auf folgende Weise:

$$E = \frac{x}{2} \cdot \frac{1 - e^{-\lambda}}{1 + e^{-\lambda}}.$$

2. Beobachtet man, wegen der Schwäche des zu messenden *momentanen* Stroms, nicht blos die erste Elongation, nachdem die ruhende Nadel in Bewegung gesetzt worden ist, sondern lässt man die Nadel mehrmals hin- und herschwingen, indem man jedes Mal in dem nächsten Augenblicke, wo die Nadel wieder ihre ursprüngliche Stellung passirt, denselben momentanen Strom zur Beschleunigung der Nadel in verkehrter Richtung durch den Multiplikator gehen lässt, und beobachtet dann die wachsende Grösse der Schwingungsbogen, welche der Reihe nach mit $x_1, x_2, x_3 \ldots$ bezeichnet werden, so ergiebt sich hieraus die *Geschwindigkeit C*, welche jener *momentane* Strom der Nadel jedes Mal ertheilt, auf folgende Weise. Setzt man

$$B = C \cdot \frac{T}{\pi} \cdot e^{-\frac{\lambda}{\pi} \operatorname{arc\,tang} \frac{\pi}{\lambda}}, \text{ so ist:}$$

$$+ \frac{x_1}{B} = 1,$$

$$- \frac{x_2}{B} = 2 + e^{-\lambda},$$

$$+ \frac{x_3}{B} = 2 + 2e^{-\lambda} + e^{-2\lambda}.\text{[1]}$$

[1]) Für die *erste* Schwingungsdauer von $t = 0$ bis $t = \tau$ gilt dieselbe Gleichung, wie in der Note S. 438, nämlich:

$$x = \frac{\tau}{\pi} \cdot Ce^{-\frac{\lambda}{\tau} t} \sin \frac{\pi}{\tau} t,$$

folglich für den Augenblick der ersten Elongation, für welchen $t = \tau/\pi \,.\, \operatorname{arc\,tang} \pi/\lambda$, $\sin \frac{\pi}{\tau} t = \frac{1}{\sqrt{1 + \lambda^2/\pi^2}} = \frac{T}{\tau}$ war, $x = \frac{T}{\pi} \cdot Ce^{-\frac{\lambda}{\pi} \operatorname{arc\,tang} \frac{\pi}{\lambda}}$. Für das Ende der Schwingungsdauer, wo $t = \tau$ ist, ergiebt sich $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = -Ce^{-\lambda}$. In diesem Augenblicke nun wird die Geschwindigkeit der Nadel durch den erneuten momentanen Strom um $-C$

Auch hier nähert sich x/B desto schneller einem Grenzwerthe, je grösser λ ist, und es ergiebt sich für diesen Grenzwerth:

$$\frac{x}{B} = \frac{2}{1 - e^{-\lambda}};$$

folglich findet man, wenn man diese Versuche so lange fortsetzt, bis die Schwingungsbogen zu wachsen aufhören, die *Geschwindigkeit C*, welche der zu messende momentane Strom der Nadel jedesmal ertheilt, aus den übereinstimmenden Werthen x der zuletzt beobachteten Schwingungsbogen auf folgende Weise:

$$C = \frac{x}{2} \cdot \frac{\pi}{T} (1 - e^{-\lambda})\, e^{\frac{\lambda}{\pi} \operatorname{arc\,tang} \frac{\pi}{\lambda}}.$$

Methode der Zurückwerfung.

Es gehört hierher endlich noch die Anwendung auf die von GAUSS angegebene Beobachtungsmethode, welche in den „*Resultaten aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins im Jahre 1838*“, S. 98 ff.[1]) beschrieben worden ist, welche auch darum von besonderer Wichtigkeit ist, weil

geändert, d. i. sie wird verwandelt in $-C(1 + e^{-\lambda})$, woraus sich nun für die *zweite* Schwingungsdauer, von $t = \tau$ bis $t = 2\tau$, ergiebt:

$$x = \frac{\tau}{\pi} \cdot C(1 + e^{-\lambda})\, e^{-\frac{\lambda}{\tau}(t-\tau)} \cdot \sin\frac{\pi}{\tau} t,$$

folglich für den Augenblick der zweiten Elongation, für welchen

$$t = \tau + \frac{\tau}{\pi} \operatorname{arc\,tang} \frac{\pi}{\lambda},\ \sin\frac{\pi}{\tau} t = -\frac{T}{\tau} \text{ ist, } x = -\frac{T}{\pi} C(1 + e^{-\lambda})\, e^{-\frac{\lambda}{\pi} \operatorname{arc\,tang} \frac{\pi}{\lambda}}.$$

Ebenso findet man für die *dritte* Schwingungsdauer von $t = 2\tau$ bis $t = 3\tau$,

$$x = \frac{\tau}{\pi} \cdot C(1 + e^{-\lambda} + e^{-2\lambda})\, e^{-\frac{\lambda}{\tau}(t-2\tau)} . \sin\frac{\pi}{\tau} t,$$

u. hieraus für den Augenblick der dritten Elongation, für welchen $t = 2\tau + \tau/\pi . \operatorname{arc\,tang} \pi/\lambda$, $\sin \pi t/\tau = + T/\pi$ ist, $x = + T/\pi . C(1 + e^{-\lambda} + e^{-2\lambda})\, e^{-\frac{\lambda}{\pi} \operatorname{arc\,tang} \frac{\pi}{\lambda}}$, u. s. w. Schreibt man die gefundenen Werthe von x für $t = 0$, $t = \tau/\pi . \operatorname{arc\,tang} \pi/\tau$, $t = \tau + \tau/\pi . \operatorname{arc\,tang} \pi/\lambda$, $t = 2\tau + \tau/\pi . \operatorname{arc\,tang} \pi/\lambda$ u. s. w. unter einander, indem man Kürze halber B statt $\frac{T}{\pi} Ce^{-\frac{\lambda}{\pi} \operatorname{arc\,tang} \frac{\pi}{\lambda}}$ setzt, nämlich:

$$\begin{array}{l} 0 \\ +B, \\ -B(1 + e^{-\lambda}), \\ +B(1 + e^{-\lambda} + e^{-2\lambda}), \\ \vdots \end{array}$$

so geben die Unterschiede je zweier auf einander folgender Werthe der Reihe nach die gesuchten Schwingungsbogen x_1, x_2, x_3 u. s. w.

[1]) [WILHELM WEBER's Werke, Bd. II, p. 115.]

sie eine scharfe und bequeme Methode an die Hand giebt, die *Dämpfung* zu messen, wenn sie stark ist, während die oben angeführte, auf der Beobachtung der Abnahme der Schwingungsbogen begründete Methode blos bei schwächerer Dämpfung zu empfehlen ist. Die genannte Messungsmethode eignet sich besonders dann, wenn man sich eines Galvanometers bedient, dessen Magnetnadel eine grosse Schwingungsdauer hat und nie mehr als wenige Grade von ihrem normalen Stande abgelenkt wird, wie dies bei einem mit Multiplikator versehenen Magnetometer der Fall ist. — Ist das Instrument mit keinem Dämpfer versehen, so wird der Einfluss der dennoch vorhandenen schwachen, vom Multiplikator herrührenden, Dämpfung mit anderen Einflüssen durch die für diese Methode eigenthümliche Kombination der Beobachtungen aus den Resultaten eliminirt; bei stärkerer Dämpfung dagegen bleibt zwar die Beobachtungsmethode wesentlich dieselbe, aber die Berechnung der Resultate aus den Beobachtungen muss eine Modifikation erleiden, wenn diese Resultate ganz übereinstimmen sollen mit denen, welche ohne Dämpfung erhalten worden wären.

Es besteht nun diese Methode wesentlich darin, dass man durch einen *momentanen Strom* die Nadel plötzlich in Bewegung setzt und ihre *erste Elongation* beobachtet, darauf in dem Augenblicke, wo die Nadel zum ersten Male wieder ihren ursprünglichen Stand passirt, wieder einen momentanen Strom auf sie wirken lässt, der aber, gleich allen folgenden, doppelt so stark ist, wie der erste. Dieser zweite Strom soll dieselbe Richtung wie der erste haben; alsdann wird die Nadel durch ihn in ihrer Bewegung nicht allein plötzlich gehemmt werden, sondern sogar eine Geschwindigkeit nach derselben Seite erhalten, von welcher sie herkommt. Man beobachtet sodann wieder die *erste Elongation*, welche die Nadel hierauf macht, die, ohne Dämpfung, der vorigen nahe gleich ist, und lässt die Nadel auf die andere Seite ihrer Ruhelage hinüberschwingen, und beobachtet hier auch noch *die zweite Elongation*. Erst wenn die Nadel von dieser anderen Seite her ihre Ruhelage wieder passirt, lässt man einen momentanen Strom in entgegengesetzter Richtung, als das zweite Mal, wirken und wirft sie dadurch nach derselben Seite zurück, woher sie kommt, und beobachtet die erste und zweite darauf folgende Elongation, worauf man, sobald die Nadel wieder ihre Ruhelage passirt, den momentanen Strom in entgegengesetzter Richtung, wie das vorige Mal, wirken lässt, u. s. w. Die so beobachteten Elongationen ordnen sich nach Paaren abwechselnd positiver und negativer Elongationen, aus denen die Mittel genommen werden, wenn sie wenig von einander verschieden sind, wie dies bei geringer Dämpfung der Fall ist. Die Unterschiede dieser auf einander folgenden positiven und negativen Mittelwerthe werden nahe gleich

gefunden und geben ein Maass für die Intensität des *momentanen* Stroms, welcher gemessen werden soll.

Hierbei wurde vorausgesetzt, dass nur eine geringe Dämpfung Statt fände. Es lässt sich aber dieselbe Methode auch bei *starker* Dämpfung anwenden und es lässt sich dann sogar noch eine grössere Genauigkeit erreichen; es erleidet aber dann die Ableitung der Resultate aus den Beobachtungen eine wesentliche Modifikation.

Zunächst möge bemerkt werden, dass bei einer starken Dämpfung der erste momentane Strom nicht genau mehr die Hälfte des folgenden sein soll, sondern, wenn m das Verhältniss zweier auf einander folgender Schwingungsbogen bezeichnet, so soll der erste Strom der $(m + 1/m)$te Theil des folgenden sein. Wenn aber auch dieses Verhältniss nicht genau eingehalten wird, so leiden darunter die Beobachtungen nicht wesentlich, sondern man braucht nur die ersten Beobachtungen von der Berechnung der Resultate auszuschliessen, weil bei den folgenden Beobachtungen der Einfluss jener anfänglichen Unregelmässigkeit durch die Dämpfung selbst sehr schnell verschwindet. Man sieht dann, dass die korrespondirenden Beobachtungen (nämlich die 1., 5., 9. u. s. w., oder die 2., 6., 10. u. s. w., oder die 3., 7., 11. u. s. w., oder die 4., 8., 12. u. s. w.) sich sehr schnell vier Grenzwerthen nähern. Bezeichnet man sodann den Unterschied des ersten und dritten Grenzwerths mit b, den Unterschied des zweiten und vierten mit a, so ist das Verhältniss von $a:b$ dem Verhältnisse zweier auf einander folgender Schwingungsbogen gleich, folglich:

$$\lambda = \log \text{nat} \frac{a}{b}.$$

Ferner ist die Geschwindigkeit c, welche der Nadel von jedem momentanen Strome, mit Ausnahme des ersten, ertheilt wird,

$$c = \frac{\pi}{2T} \frac{a^2 + b^2}{\sqrt{ab}} \cdot e^{-\frac{\lambda}{\pi} \text{arc tang} \frac{\lambda}{\pi}},$$

wofür, wenn a und b wenig verschieden sind, d. h. bei geringerer Dämpfung,

$$c = \frac{\pi}{2T} \cdot \frac{a^2 + b^2}{\sqrt{ab}}$$

und bei noch kleinerer Dämpfung

$$c = \frac{\pi}{2T}(a + b)$$

gesetzt werden kann. Der Beweis ergiebt sich ähnlich wie bei den früheren Regeln. Rechnet man nämlich die Zeit t von dem Augenblicke an, wo der momentane Strom die Nadel nach der Seite der positiven

Elongation zurückgeworfen hat, so ist x für die Dauer der beiden folgenden ungestörten Schwingungen

$$x = Ae^{-\frac{\lambda}{\tau}t} \sin\frac{\pi}{\tau}t.$$

Für die beiden beobachteten Elongationen x' und x'' ist $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = 0$ oder

$$0 = -\frac{\lambda}{\tau}Ae^{-\frac{\lambda}{\tau}t} \sin\frac{\pi}{\tau}t + \frac{\pi}{\tau}Ae^{-\frac{\lambda}{\tau}t} \cos\frac{\pi}{\tau}t,$$

folglich für den ersten Beobachtungsmoment

$$t = \frac{\tau}{\pi} \operatorname{arc\,tang}\frac{\pi}{\lambda},$$

für den zweiten

$$t = \tau + \frac{\tau}{\pi} \operatorname{arc\,tang}\frac{\pi}{\lambda}.$$

Substituirt man diese Werthe für t in der Gleichung für x, so erhält man

$$x' = +\frac{Ae^{-\frac{\lambda}{\pi}\operatorname{arc\,tang}\frac{\pi}{\lambda}}}{\sqrt{1+\frac{\lambda^2}{\pi^2}}},$$

$$x'' = -\frac{Ae^{-\frac{\lambda}{\pi}\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\pi}{\lambda}\right)-\lambda}}{\sqrt{1+\frac{\lambda^2}{\pi^2}}}.$$

Nach Verlauf der Zeit $t = 2\tau$ wird die Schwingung der Nadel durch Einwirkung des Stroms wieder geändert, nämlich es wird zur Geschwindigkeit

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\pi}{\tau} Ae^{-2\lambda},$$

welche sie am Ende der Zeit $t = 2\tau$ haben würde, die Geschwindigkeit $-c$ hinzugefügt, woraus sich für die Dauer der folgenden beiden Schwingungen

$$x = \left(Ae^{-2\lambda} - \frac{\tau}{\pi}c\right)e^{-\frac{\lambda}{\tau}(t-2\tau)} \sin\frac{\pi}{\tau}t$$

ergiebt. Für die beiden während dieses Zeitraums von $t = 2\tau$ bis $t = 4\tau$ beobachteten Elongationen x''' und x'''' ist $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = 0$ oder

$$0 = -\frac{\lambda}{\tau}\left(Ae^{-2\lambda} - \frac{\tau}{\pi}c\right)e^{-\frac{\lambda}{\tau}(t-2\tau)} \sin\frac{\pi}{\tau}t$$

$$+\frac{\pi}{\tau}\left(Ae^{-2\lambda} - \frac{\tau}{\pi}c\right)e^{-\frac{\lambda}{\tau}(t-2\tau)} \cos\frac{\pi}{\tau}t,$$

folglich für den ersten Beobachtungsmoment

$$t = 2\tau + \frac{\tau}{\pi} \text{ arc tang } \frac{\pi}{\lambda},$$

für den zweiten

$$t = 3\tau + \frac{\tau}{\pi} \text{ arc tang } \frac{\pi}{\lambda}.$$

Substituirt man diese Werthe für t in der neuen Gleichung für x, so erhält man

$$x''' = + \left(Ae^{-2\lambda} - \frac{\tau}{\pi} c\right) \frac{e^{-\frac{\lambda}{\pi} \text{ arc tang } \frac{\pi}{\lambda}}}{\sqrt{1 + \frac{\lambda^2}{\pi^2}}},$$

$$x'''' = - \left(Ae^{-2\lambda} - \frac{\tau}{\pi} c\right) \frac{e^{-\frac{\lambda}{\pi} \text{ arc tang } \left(\frac{\pi}{\lambda}\right) - \lambda}}{\sqrt{1 + \frac{\lambda^2}{\pi^2}}}.$$

Nach Verlauf der Zeit $t = 4\tau$ wird die Schwingung der Nadel durch erneuerte Einwirkung des momentanen Stroms wieder geändert, nämlich es wird zur Geschwindigkeit

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\pi}{\tau}\left(Ae^{-2\lambda} - \frac{\tau}{\pi} c\right) e^{-2\lambda},$$

welche sie am Ende der Zeit $t = 4\tau$ haben würde, die Geschwindigkeit $+ c$ hinzugefügt und dadurch bewirkt, dass die Nadel von nun an dieselbe Bewegung wieder erhält, als von Anfang für $t = 0$. Nun war aber die Geschwindigkeit für $t = 0$

$$= \frac{\pi}{\tau} A,$$

also

$$\frac{\pi}{\tau} A = c + \frac{\pi}{\tau}\left(Ae^{-2\lambda} - \frac{\tau}{\pi} c\right) e^{-2\lambda},$$

woraus

$$c = \frac{\pi}{\tau} A (1 + e^{-2\lambda})$$

folgt. Substituirt man diesen Werth in obigen Ausdrücken für x''' und x'''', so findet man $x''' = - x'$, $x'''' = - x''$, folglich

$$a = x' - x''' = \frac{2Ae^{-\frac{\lambda}{\pi} \text{ arc tang } \frac{\pi}{\lambda}}}{\sqrt{1 + \frac{\lambda^2}{\pi^2}}},$$

$$b = x'''' - x'' = \frac{2Ae^{-\frac{\lambda}{\pi} \text{ arc tang } \left(\frac{\pi}{\lambda}\right) - \lambda}}{\sqrt{1 + \frac{\lambda^2}{\pi^2}}},$$

folglich:

$$\frac{a^2+b^2}{\sqrt{ab}} = \frac{2Ae^{-\frac{\lambda}{\pi}\operatorname{arc\,tang}\frac{\pi}{\lambda}}}{\sqrt{1+\frac{\lambda^2}{\pi^2}}} \cdot \frac{1+e^{-2\lambda}}{e^{-\frac{1}{2}\lambda}} = \frac{2Ae^{\frac{\lambda}{\pi}\operatorname{arc\,tang}\frac{\lambda}{\pi}}}{\sqrt{1+\frac{\lambda^2}{\pi^2}}} \cdot (1+e^{-2\lambda})$$

woraus sich ergiebt

$$c = \frac{\pi}{2\tau}\sqrt{1+\frac{\lambda^2}{\pi^2}}\,\frac{a^2+b^2}{\sqrt{ab}}\,e^{-\frac{\lambda}{\pi}\operatorname{arc\,tang}\frac{\lambda}{\pi}}.$$

Nun ist oben S. 437 in der Note die Gleichung angeführt worden:

$$\frac{\pi^2}{\tau^2} = \frac{\pi^2}{T^2} - \frac{\lambda^2}{\tau^2},$$

wonach folglich

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{\tau}\sqrt{1+\frac{\lambda^2}{\pi^2}}$$

und

$$c = \frac{1}{2}\frac{\pi}{T}\cdot\frac{a^2+b^2}{\sqrt{ab}}\cdot e^{-\frac{\lambda}{\pi}\operatorname{arc\,tang}\frac{\lambda}{\pi}}.$$

Zugleich ersieht man, dass

$$\frac{a}{b} = e^{\lambda} \text{ oder } \lambda = \log \operatorname{nat} \frac{a}{b},$$

woraus hervorgeht, dass man durch Messung von a und b zugleich eine genaue Bestimmung des auf die Schwingungsdauer reducirten Maasses der Dämpfung erhält, was besonders dann von Nutzen ist, wenn wegen zu schneller Abnahme der Schwingungsbogen aus Beobachtungen der letzteren keine genaue Bestimmung erhalten werden kann.

Zur Erläuterung der zuletzt entwickelten Beobachtungsmethode mögen diejenigen Beobachtungen dienen, welche zur Vergleichung der Widerstände zweier Kopien des Jacobi'schen Grundmaasses nach dieser Methode gemacht und S. 351 schon erwähnt worden sind. Die *erste* Kopie bestand aus einem nicht gefirnissten Drahte, welcher auf einem nicht gefirnissten Serpentincylinder aufgewunden war, während die *zweite* Kopie aus einem gefirnissten Drahte bestand, welcher auf einer gefirnissten Glasröhre aufgewunden war. Die Versuche zerfallen in fünf Reihen. Bei allen waren die Enden des Induktordrahts mit den Enden des Multiplikatordrahts auf dieselbe Weise verbunden. In der *ersten* Reihe wurden die Drähte der beiden Kopien und der Induktor- und Multiplikatordraht auf die S. 307 unter (8) beschriebene, mit D bezeichnete Weise kombinirt; in der *zweiten* Reihe auf die unter (7) beschriebene, mit B bezeichnete Weise; in der *dritten* Reihe auf die

unter (6) beschriebene, mit A bezeichnete Weise, wobei die erste Kopie die Stelle des Grundmaasses vertrat; die *vierte* Reihe war die Wiederholung der zweiten; in der *fünften* endlich wurden die Drähte auf die unter (9) beschriebene, mit C bezeichnete Weise kombinirt. Die Versuche wurden begonnen, wenn die Galvanometernadel in Ruhe war. Der erste positive Induktionsstoss setzte die Nadel in Schwingung: die erste positive Elongation wurde nicht beobachtet, und eben so wurde auch die zweite negative Elongation nicht beobachtet. In dem Augenblicke, wo die Nadel nach dieser zweiten Elongation in positiver Richtung zu der Stelle gelangte, welche dem Ruhestande entsprach, erfolgte der zweite negative Induktionsstoss, welcher die Nadel nicht allein mitten in ihrer positiven Bewegung hemmte, sondern sie sogar nach derselben Seite zurückwarf, von welcher sie gekommen war. Die darauf folgende dritte Elongation war daher wiederum eine negative und wurde, sowie auch die vierte positive Elongation, noch nicht beobachtet. In dem Augenblicke, wo die Nadel nach dieser vierten Elongation in negativer Richtung zu der ihrem Ruhestande entsprechenden Stelle gelangte, erfolgte der dritte positive Induktionsstoss, welcher die Nadel nicht allein mitten in ihrer negativen Bewegung hemmte, sondern sie sogar nach derselben Seite zurückwarf, von welcher sie gekommen war. Auf dieselbe Weise wurden die Versuche längere Zeit fortgesetzt und von jetzt an begonnen, die Elongationen der Nadel, wie sie an der Skale beobachtet wurden, der Reihe nach aufzuzeichnen. In den folgenden Tafeln sind die vier ersten aufgezeichneten Elongationen in horizontaler Linie neben einander gestellt worden, die 5. aber unter die 1., die 6. unter die 2. u. s. f. Endlich sind von den unter einander stehenden Beobachtungen die Mittelwerthe angegeben worden.

D.

775,8	436,6	199,6	538,2
775,7	436,3	199,5	537,9
775,0	435,9	198,9	537,3
774,6	435,4	198,5	537,2
774,6	435,4	198,8	537,2
774,2	435,3	198,5	537,1
774,0	435,1	198,2	536,8
773,8	434,7	197,9	536,6
773,5	434,4	197,6	536,6
774,0	434,0	197,5	536,0
774,52	435,31	198,50	537,09

B.

692,1	448,0	277,0	521,1
691,8	447,8	276,7	521,0
691,7	447,4	276,5	520,8
691,3	447,3	276,2	520,5
691,3	447,2	276,0	520,7
691,4	447,2	276,0	520,6
691,4	447,2	275,9	520,5
691,3	447,1	275,9	520,5
691,4	447,0	275,9	520,4
691,3	447,0	275,8	520,3
691,50	447,32	276,19	520,64

A.

691,9	447,7	276,9	521,0
691,6	447,7	276,8	520,9
691,7	447,7	276,8	521,0
691,8	447,6	276,7	521,1
691,8	447,8	276,8	521,0
691,8	447,8	277,0	521,1
691,8	447,8	276,9	521,1
691,6	447,6	276,8	520,8
691,3	447,3	276,4	520,7
691,0	446,9	275,9	520,1
691,63	447,59	276,70	520,88

B.

691,6	447,0	275,7	520,5
691,4	446,9	275,6	520,3
691,2	446,7	275,3	520,0
690,9	446,3	275,2	520,0
690,7	446,2	275,0	519,7
690,5	446,1	274,9	519,8
690,5	446,5	274,8	519,7
690,3	445,9	274,6	519,4
690,1	445,8	274,6	519,2
690,1	445,6	274,3	519,2
690,73	446,30	275,00	519,78

C.

615,8	459,3	350,2	506,2
615,6	459,2	350,1	506,1
615,2	459,0	349,8	505,8
615,1	458,8	349,4	505,6
614,8	458,4	349,2	505,3
614,4	458,1	349,1	505,2
614,2	458,1	348,8	505,0
614,1	458,0	348,8	504,9
613,9	457,8	348,7	504,8
613,8	457,6	348,2	504,3
614,69	458,43	349,23	505,32

Es ist hierbei noch zu bemerken, dass der horizontale Abstand des Spiegels von der Skale 2218 Skalentheile betrug. Ferner ist zu beachten, dass die hier gebrauchte Induktorrolle von der früheren, S. 309 gebrauchten, verschieden ist. Die neue Induktorrolle hatte eine weit geringere Zahl von Umwindungen, aber von weit stärkerem Drahte, sodass ihr Widerstand viel kleiner ist, als der Widerstand der ersten Induktorrolle. Dieser Umstand hat bedeutenden Einfluss auf das Verhältniss der Beobachtungen *A*, *B*, *C*, *D* unter einander.

In der folgenden Tafel sind die Mittelwerthe aus den obigen Beobachtungen übersichtlich zusammengestellt und in der letzten Kolumne die Differenz des ersten und dritten, sowie auch des zweiten und vierten Werthes für jede Versuchsreihe beigefügt, und es sind diese beiden Differenzen eben so wie S. 443 mit *a* und *b* bezeichnet worden.

D.	774,52 435,31 198,50 537,09	$a = 576{,}02$ $b = 101{,}78$
B.	691,50 447,32 276,19 520,64	$a = 415{,}31$ $b = 73{,}32$
A.	691,63 447,59 276,70 520,88	$a = 414{,}93$ $b = 73{,}29$
B.	690,73 446,30 275,00 519,78	$a = 415{,}73$ $b = 73{,}48$
C.	614,69 458,43 349,23 505,32	$a = 265{,}46$ $b = 46{,}89$

Die in dieser Tafel zusammengestellten Werthe von a und b bedürfen nun zunächst einer Korrektion, weil sie den katoptrischen Gesetzen gemäss den Tangenten der doppelten Elongationswinkel proportional sind. Mit Hülfe des gegebenen Abstands des Spiegels von der Skale ist es leicht, sie auf Werthe zu reduciren, welche den Elongationswinkeln selbst proportional sind, und diese Reduktion genügt bei der Kleinheit aller dieser Elongationen. Zu diesem Zwecke ist, wenn x den in Skalentheilen gegebenen Werth von a oder b bezeichnet, die Zahl x um

$$\frac{1}{3}\frac{x^3}{4436^2} = \frac{x^3}{59034288}$$

zu verkleinern. Nach dieser Reduktion erhält man folgende Werthe für a und b:

	a	b
D.	572,78	101,76
B.	414,10	73,31
A.	413,72	73,28
B.	414,51	73,47
C.	265,14	46,89

Nimmt man nun die Mittel aus den beiden für B angeführten Werthen a und b, so erhält man folgende Zusammenstellung:

	a	b	$\log.\,\text{nat.}\,\frac{a}{b} = \lambda$	$\frac{a^2+b^2}{\sqrt{ab}} \cdot e^{-\frac{\lambda}{\pi}\,\text{arc tang}\,\frac{\lambda}{\pi}}$
A.	413,72	73,28	1,730 902	768,22
B.	414,305	73,39	1,730 814	769,23
C.	265,14	46,89	1,732 454	492,44
D.	572,78	101,76	1,727 884	1063,11

Die in der letzten Kolumne angegebenen Werthe können nun, wie S. 443 ff. gezeigt worden ist, als Maass der Stromstärke im Multiplikator dienen, d. h. als die S. 316 mit A, B, C, D bezeichneten Werthe betrachtet werden. Mit diesen Werthen erhält man dann endlich nach den daselbst aufgestellten Formeln:

$$\frac{AB - BC}{AB - AC} = 0{,}997\,65,$$

$$\sqrt{\frac{AB - AD}{AB - BD}} = 0{,}997\,62.$$

Im Mittel hiernach verhält sich also der Widerstand der ersten Kopie zu dem der zweiten:

$$= 0{,}997\,64 : 1.$$

D.

Begründung der Regeln zur Berechnung des Widerstands eines Leiters aus den Beobachtungen.

Zur Begründung der Regeln zur Berechnung des Widerstands eines Leiters aus den Beobachtungen soll von folgenden beiden Fundamentalsätzen der Lehre vom *Elektromagnetismus* und der Lehre von der *Magnetoelektricität* ausgegangen werden.

Erster Satz. Das linearische Element eines galvanischen Stroms ds übt auf ein Element des magnetischen Fluidums μ eine bewegende Kraft aus, die dem Quadrate der Entfernung r umgekehrt proportional ist; aber es tritt dabei zugleich der ganz abweichende Umstand ein, dass die Richtung der Kraft nicht in der verbindenden geraden Linie, sondern senkrecht gegen die durch μ und die Richtung von ds gelegte Ebene ist, und dass ausserdem die Stärke der Kraft nicht von der Entfernung allein, sondern zugleich von dem Winkel abhängt, welchen r mit der Richtung von ds macht. Nennt man diesen Winkel ϑ, so ist

$$\frac{\sin\vartheta \, . \, \mu ds}{r^2}$$

das Maass der bewegenden Kraft, welche ds auf μ ausübt, und eben so gross ist die von μ auf das Stromelement ds oder dessen ponderablen Träger ausgeübte Kraft, deren Richtung der ersteren entgegengesetzt parallel ist.

Anmerkung. Unter dem mit ds bezeichneten Stromelemente ist das Produkt seiner Länge a in die Intensisät i des durchgehenden Stroms verstanden, also $ds = ai$. — Dieser Fundamentalsatz des Elektromagnetismus ist hier wörtlich so wiedergegeben, wie ihn Gauss in den *„Resultaten aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins im Jahre 1839"*, S. 1, 2 [1]) ausgesprochen hat.

Zweiter Satz. Wird das Element des magnetischen Fluidums μ mit der Geschwindigkeit u parallel der Richtung der Kraft bewegt, welche nach dem ersten Satze auf das Stromelement $ds = ai$ wirkt, so wird auf das lineare Element des Leiters a eine der Richtung des Stroms i parallele elektromotorische Kraft ausgeübt, deren Stärke durch den im ersten Satze gegebenen Ausdruck $\sin\vartheta \, . \, \mu ds/r^2$ dargestellt wird, wenn darin $ds = ai$ mit au vertauscht wird, also durch

$$\frac{\sin\vartheta \, . \, \mu au}{r^2}.$$

Wird dagegen das Element des magnetischen Fluidums μ in einer anderen Richtung bewegt, welche mit der oben bezeichneten den Winkel ψ macht,

1) [Gauss' Werke, Bd. V, p. 198.]

so ist dieser Ausdruck der Stärke der Kraft noch mit $\cos\psi$ zu multipliciren.

Anmerkung. Führt man statt der beiden Winkel ϑ und ψ zwei andere Winkel ein, nämlich den Winkel φ, welchen die Richtung, nach welcher μ bewegt wird, mit r bildet, und den Winkel ε, welchen die Richtung von a mit der Normale einer durch r der Richtung, nach welcher μ bewegt wird, parallel gelegten Ebene macht, so verwandelt sich der Ausdruck $\sin\vartheta \,.\, \mu a u \,.\, \cos\psi/r^2$ in $\sin\varphi \,.\, \mu a u \,.\, \cos\varepsilon/r^2$. — Dieser letztere Ausdruck stimmt mit demjenigen überein, welchen man erhält, wenn man die in der ersten Abhandlung über „*Elektrodynamische Maassbestimmungen*", S. 345 [1]) angegebene elektromotorische Elementarkraft nach der Richtung des inducirten Elements a zerlegt. Der so erhaltene Ausdruck enthält zwar noch einen konstanten Faktor, dessen Werth aber von der Wahl des Maasses für die elektromotorische Kraft abhängt und für ein bestimmtes Maass $= 1$ ist.

Aus diesen beiden Sätzen werden folgende Bestimmungen abgeleitet.

1. Es findet eine solche Relation zwischen den elektromagnetischen und magnetoelektrischen Kräften Statt, dass, wenn zwei beliebig gelegene magnetische Elemente μ und μ' auf ein Stromelement $ds = ai$ gleiche und gleichgerichtete elektromagnetische Kräfte ausüben, auch ihre elektromotorischen Kräfte auf das lineare Element des Leiters a, wenn es bewegt wird, gleich sind. Dasselbe gilt, wenn für μ und μ' eine Gesammtheit von beliebig vertheilten magnetischen Elementen gesetzt wird. Hieraus folgt, dass, wenn der Erdmagnetismus an einem Orte gleiche und gleichgerichtete elektromagnetische Kraft, wie ein entfernter Magnetstab, ausübt, die elektromotorische Kraft des Erdmagnetismus auf einen daselbst bewegten Induktor ebenfalls der des Magnetstabs gleich sei, wie auch der Magnetismus in der Erde vertheilt sein möge.

2. Wenn das Stromelement ds einem Kreisstrome angehört, so wird die auf der Kreisebene senkrechte Komponente der elektromagnetischen Kraft, welche ds auf μ ausübt, erhalten, wenn $\sin\vartheta \,.\, \mu ds/r^2$ mit dem Kosinus des Winkels multiplicirt wird, welchen die Kreisebene mit der durch μ und die Richtung von ds gelegten Ebene bildet. Diese Komponente heisse C.

Das Stromelement ds möge in seine Faktoren zerlegt werden, nämlich in seine Stromintensität i und in seine Länge, welche als die Länge eines Kreiselements mit $a d\alpha$ bezeichnet wird, wenn a der Halbmesser des Kreises ist, dem es angehört, und α der Winkel, welchen der zugehörige Radius mit demjenigen Radius bildet, welcher mit μ in einer auf der Kreisebene senkrechten Ebene liegt. Bezeichnet man ferner mit b das von μ auf die Kreisebene gefällte Perpendikel und

1) [Wilhelm Weber's Werke, Bd. III, p. 177.]

mit x den Abstand des Fusspunkts dieses Perpendikels vom Mittelpunkte, so ist

$$r^2 = a^2 + b^2 + x^2 - 2ax \cos \alpha$$

und man erhält für die ganze von ds auf μ ausgeübte Kraft den Ausdruck:

$$\frac{\sin \vartheta \,.\, i\mu \,.\, a d\alpha}{a^2 + b^2 + x^2 - 2ax \cos \alpha}.$$

Ferner ist der Kosinus des Winkels, welchen die Kreisebene mit der durch μ und die Richtung von ds gelegten Ebene bildet:

$$\frac{a - x \cos \alpha}{r \sin \vartheta} = \frac{a - x \cos \alpha}{\sin \vartheta \,.\, \sqrt{a^2 + b^2 + x^2 - 2ax \cos \alpha}}.$$

Das Produkt dieses Kosinus in obigem Ausdruck der ganzen Kraft giebt den Ausdruck für die gesuchte Komponente C, nämlich:

$$C = i\mu \,.\, a d\alpha \frac{a - x \cos \alpha}{(a^2 + b^2 + x^2 - 2ax \cos \alpha)^{\frac{3}{2}}}.$$

Nach dem vorausgeschickten zweiten Satze, dem Grundgesetze der Magnetoelektricität, ergiebt sich hieraus die *elektromotorische Kraft*, welche μ auf ds ausübt, wenn μ mit der Geschwindigkeit u parallel der Richtung der Kraft C bewegt wird, durch Multiplikation des Werths, welchen C hat, wenn $i = -1$ ist, mit u, nämlich

$$- u\mu \,.\, a d\alpha \frac{a - x \cos \alpha}{(a^2 + b^2 + x^2 - 2ax \cos \alpha)^{\frac{3}{2}}};$$

dagegen ergiebt sich, wenn ds mit der Geschwindigkeit u in der nämlichen auf der Kreisebene senkrechten Richtung bewegt wird, die elektromotorische Kraft, welche μ auf ds ausübt,

$$+ u\mu \,.\, a d\alpha \frac{a - x \cos \alpha}{(a^2 + b^2 + x^2 - 2ax \cos \alpha)^{\frac{3}{2}}}.$$

Entwickelt man ferner den obigen Ausdruck von C nach Potenzen von $\cos \alpha$, so erhält man:

$$C = \frac{i\mu}{(a^2 + b^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} \Big\{ a^2 d\alpha + (2a^2 - b^2 - x^2) \frac{ax}{a^2 + b^2 + x^2} \cdot \cos \alpha d\alpha$$
$$+ \tfrac{3}{2} (3a^2 - 2b^2 - 2x^2) \frac{a^2 x^2}{(a^2 + b^2 + x^2)^2} \cdot \cos \alpha^2 d\alpha$$
$$+ \tfrac{5}{2} (4a^2 - 3b^2 - 3x^2) \frac{a^3 x^3}{(a^2 + b^2 + x^2)^3} \cdot \cos \alpha^3 d\alpha + \cdots \Big\}.$$

3. Der Ausdruck für die auf der Kreisebene senkrechte *elektromagnetische* Kraft, welche der *ganze* Kreisstrom auf μ ausübt, ergiebt sich dann auf folgende Weise. Da der Halbmesser a und die Strom-

intensität i, wie auch b und x, für alle Kreiselemente gleich sind, so ist die gesuchte Kraft, oder die Summe aller auf die Kreisebene senkrechten *elektromagnetischen* Kräfte, welche alle Stromelemente auf μ ausüben,

$$i\mu \,.\, a\int_0^{2\pi} \frac{a - x\cos\alpha}{(a^2+b^2+x^2-2ax\cos\alpha)^{\frac{3}{2}}}\, d\alpha$$

$$= \frac{i\mu}{(a^2+b^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \left\{ a^2\int_0^{2\pi} d\alpha + (2a^2-b^2-x^2)\frac{ax}{a^2+b^2+x^2}\int_0^{2\pi}\cos\alpha\, d\alpha \right.$$

$$+ \tfrac{3}{2}(3a^2-2b^2-2x^2)\frac{a^2x^2}{(a^2+b^2+x^2)^2}\cdot\int_0^{2\pi}\cos\alpha^2\, d\alpha$$

$$\left. + \tfrac{5}{2}(4a^2-3b^2-3x^2)\frac{a^3x^3}{(a^2+b^2+x^2)^3}\cdot\int_0^{2\pi}\cos\alpha^3\, d\alpha + \cdots \right\},$$

das ist:

$$\frac{2\pi a^2 \,.\, i\mu}{(a^2+b^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}\left\{1 + \tfrac{3}{4}(3a^2-2b^2-2x^2)\frac{x^2}{(a^2+b^2+x^2)^2} + \cdots\right\} \text{ I.}$$

Man kann sich übrigens leicht überzeugen, dass die Stromintensität hierin nach dem Art. 10 festgesetzten absoluten Maasse zu bestimmen ist, wenn man die Kreisebene $\pi a^2 = 1$ setzt, wo man findet, dass $i = 1$ sein muss, damit die in die Ferne (wo a^2 gegen $b^2 + x^2$ verschwindet) auf μ senkrecht gegen die Kreisebene ausgeübte Kraft der in derselben Richtung von einem Magnete ausgeübten Kraft gleich werde, welcher das absolute Maass des Magnetismus besitzt und dessen Axe auf der Kreisebene normal ist. A sei der Mittelpunkt des Magnets, AB die Richtung seiner Axe, das Element μ befinde sich in C. ABC sei ein bei C rechtwinkeliges Dreieck und $AD = \frac{1}{3}AB$; so ist nach einem bekannten Satze („*Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins im Jahre 1840*“, S. 33, 34 [1]) CD die Richtung der auf μ wirkenden Kraft und ihre Stärke ist $\mu/AC^3 \,.\, CD/AD$. Fällt man CE perpendikular auf AB, so ist die der Axe des Magnets parallele Komponente $\mu/AC^3 \,.\, CD/AD \,.\, ED/CD = \mu/AC^3 \,.\, ED/AD$. Nun sind AE und CE

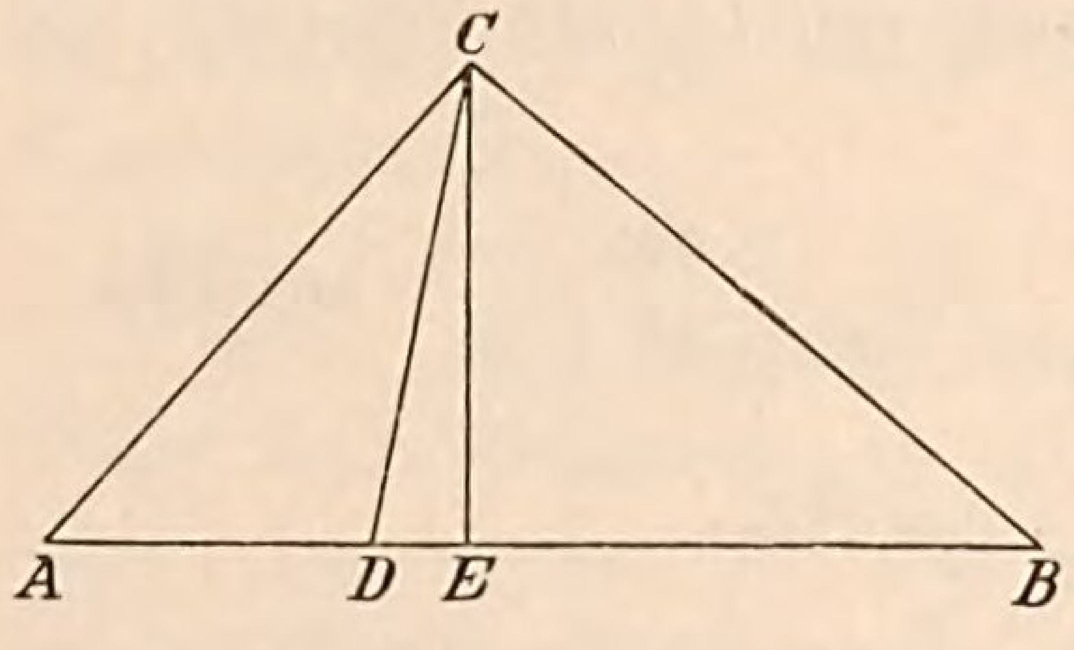


Fig. 14.

[1]) [Gauss' Werke, Bd. V, p. 434.]

die oben mit b und x bezeichneten Linien, wonach $AC = \sqrt{b^2 + x^2}$;
$AD = \frac{1}{3} AB = \frac{1}{3} \frac{AC^2}{AE} = \frac{b^2 + x^2}{3b}$ und $ED = AE - AD = \frac{2b^2 - x^2}{3b}$;
folglich die gesuchte Kraft

$$\mu \cdot \frac{2b^2 - x^2}{(b^2 + x^2)^{\frac{5}{2}}}.$$

Wird dagegen in obigem Ausdrucke $\pi a^2 = 1$ und $\frac{a^2}{b^2 + x^2} = 0$ gesetzt, so erhält man

$$i\mu \cdot \frac{2b^2 - x^2}{(b^2 + x^2)^{\frac{5}{2}}},$$

woraus sich ergiebt, dass $i = 1$ sein müsse, wenn der die Flächeneinheit umlaufende Strom dem absoluten Maasse des Magnetismus gleich wirken soll. Diese Stromintensität ist aber das Art. 10 festgesetzte absolute Maass, woraus einleuchtet, dass bei den Anwendungen der obigen elektromagnetischen Gesetze die Stromintensitäten nach dem festgesetzten absoluten Maasse zu bestimmen sind.

4. Der Ausdruck für die *elektromotorische Kraft*, welche μ auf den *ganzen* Kreis ausübt, wenn es mit der Geschwindigkeit u in senkrechter Richtung auf die Kreisebene bewegt wird, ergiebt sich auf folgende Weise. Aus dem vorausgeschickten zweiten Satze ergab sich die elektromotorische Kraft, welche μ auf ds ausübt, wenn es mit der Geschwindigkeit u parallel der Richtung der Kraft C bewegt wird, durch Multiplikation von u in den Werth von C, wenn darin $i = -1$ gesetzt wird, nämlich:

$$\begin{aligned} -\frac{\mu u}{(a^2 + b^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \Big\{ & a^2 \mathrm{d}\alpha + (2a^2 - b^2 - x^2) \frac{ax}{a^2 + b^2 + x^2} \cdot \cos\alpha \,\mathrm{d}\alpha \\ & + \tfrac{3}{2}(3a^2 - 2b^2 - 2x^2) \frac{a^2x^2}{(a^2 + b^2 + x^2)^2} \cdot \cos\alpha^2 \,\mathrm{d}\alpha \\ & + \tfrac{5}{2}(4a^2 - 3b^2 - 3x^2) \frac{a^3x^3}{(a^2 + b^2 + x^2)^3} \cdot \cos\alpha^3 \,\mathrm{d}\alpha + \cdots \Big\}. \end{aligned}$$

Die Summe der von μ auf alle Kreiselemente ausgeübten elektromotorischen Kräfte folglich:

$$\begin{aligned} -\frac{\mu u}{(a^2 + b^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} \Big\{ & a^2 \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\alpha + (2a^2 - b^2 - x^2) \frac{ax}{a^2 + b^2 + x^2} \int_0^{2\pi} \cos\alpha \,\mathrm{d}\alpha \\ & + \tfrac{3}{2}(3a^2 - 2b^2 - 2x^2) \frac{a^2x^2}{(a^2 + b^2 + x^2)^2} \int_0^{2\pi} \cos\alpha^2 \,\mathrm{d}\alpha \\ & + \tfrac{5}{2}(4a^2 - 3b^2 - 3x^2) \frac{a^3x^3}{(a^2 + b^2 + x^2)^3} \int_0^{2\pi} \cos\alpha^3 \,\mathrm{d}\alpha + \cdots \Big\}, \end{aligned}$$

das ist:

$$-\mu u \frac{\pi a^2}{(a^2+b^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \left\{2 + \tfrac{3}{2}(3a^2 - 2b^2 - 2x^2)\frac{x^2}{(a^2+b^2+x^2)^2} + \ldots\right\} \text{II.}$$

Man kann sich übrigens leicht überzeugen, dass dieser Werth die elektromotorische Kraft nach dem Art. 10 festgesetzten absoluten Maasse ausdrückt. Setzt man nämlich in diesem Werthe $b = 0$, so ist die lineare Geschwindigkeit u des Elements μ identisch mit einer Drehungsgeschwindigkeit $\gamma = u/x$ um den gegen x senkrechten Kreisdurchmesser, wofür dann wieder, ohne Aenderung der elektromotorischen Kraft, die entgegengesetzte Drehungsgeschwindigkeit des Kreises $-\gamma$ um die nämliche Axe gesetzt werden kann. Der Ausdruck der elektromotorischen Kraft von μ auf den mit der Geschwindigkeit $-\gamma$ gedrehten Kreis ist also

$$-\mu\gamma \frac{\pi a^2 x}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} \left\{2 + \tfrac{3}{2}(3a^2 - 2x^2)\frac{x^2}{(a^2+x^2)^2} + \cdot \cdot\right\}$$

und ist daher auf den mit der Geschwindigkeit $+\gamma$ gedrehten Kreis, wenn μ aus der Ferne wirkt, wo a^2 gegen x^2 verschwindet, $-\mu\gamma \,.\, \pi a^2/x^2$ Hieraus ergiebt sich die Summe der beiden elektromotorischen Kräfte, wenn erstens $\mu = +m$ und $x = R + e$ und zweitens $\mu = -m$ und $x = R - e$, d. i., die elektromotorische Kraft eines Magnets $M = 2em$, welcher aus der Ferne R wirkt,

$$-m\gamma \frac{\pi a^2}{(R+e)^2} + m\gamma \frac{\pi a^2}{(R-e)^2} = M\gamma \frac{2\pi a^2}{R^3}.$$

Macht man nun die Drehungsgeschwindigkeit γ des Kreises so gross, dass seine Projektion auf eine gegen x normale Ebene in der Zeiteinheit um die Flächeneinheit sich ändert, d. i. $\gamma\pi a^2 = 1$, so findet man, dass obiger Werth der elektromotorischen Kraft $= 1$ sein müsse, damit M den Stabmagnetismus bezeichne, welcher der Einheit des Erdmagnetismus, dessen Richtung mit x parallel ist, gleich wirkt. Wenn nämlich in der Richtung des Erdmagnetismus T eines Ortes in dem Abstande R ein gleich gerichteter Magnet M liegt, so ist nach magnetischen Maassbestimmungen die Wirkung von M der Wirkung von T an jenem Orte gleich, wenn

$$\frac{2M}{R^3} = T$$

ist. M bezeichnet also den der Maasseinheit des Erdmagnetismus gleich wirkenden Stabmagnetismus, wenn

$$\frac{2M}{R^3} = 1$$

ist, woraus hervorgeht, dass, wenn zugleich $\gamma\pi a^2 = 1$, der obige Werth der elektromotorischen Kraft auch $= 1$ sei. Diese elektromotorische Kraft ist aber selbst das Art. 10 festgesetzte absolute Maass, woraus einleuchtet, dass bei Anwendungen des hier entwickelten magnetoelektrischen Gesetzes die elektromagnetische Kraft nach dem angegebenen absoluten Maasse bestimmt wird.

Wir haben bisher die Kräfte betrachtet, welche ein Element eines magnetischen Fluidums μ ausübt oder erleidet. Die Anwendung auf die Versuche fordert, alle Elemente beider magnetischen Fluida, welche in einer Magnetnadel enthalten sind, in Rechnung zu bringen. Es leuchtet aber ein, dass man sich dabei nach Gauss an die Betrachtung der Elemente der idealen, an der Oberfläche vertheilten magnetischen Fluida halten könne, die gänzlich von einander geschieden sind. Ist die Summe der positiven Elemente $= + m$, so ist die Summe der negativen $= - m$; und bezeichnet man den Abstand des Mittelpunkts jener von dem Mittelpunkte dieser mit $2e$, so ist das Moment der Nadel $= 2em$ und die Linie e ist von einer messbaren Grösse. Auch leuchtet ein, dass, wenn alle positiven Elemente nahe beisammen liegen und eben so alle negativen, ihre Wirkung nahe dieselbe ist, wie wenn sie in ihren respektiven Mittelpunkten koncentrirt wären. Es wird dann in der gebrauchten Nadel nur die Wirkung zweier Punkte in Rechnung kommen, nämlich desjenigen, in welchem alles nordmagnetische, und desjenigen, in welchem alles südmagnetische Fluidum koncentrirt gedacht wird. Hiernach ergiebt sich

5. die Vergleichung des Drehungsmoments, welches der Multiplikator auf die in seinem *Mittelpunkte* befindliche Nadel ausübt, mit demjenigen, welches er ausüben würde, wenn die Nadel *weit entfernt* wäre, folgendermassen. Die Meridianebene, in welcher die Nadel liegt, theilt den Multiplikator so, dass eine gleiche Zahl von Umwindungen zu beiden Seiten liegt. Zieht man in dieser Ebene eine horizontale Linie durch den Mittelpunkt des Multiplikators, so liege der Punkt, in welchem alles nordmagnetische Fluidum $+ m$ koncentrirt gedacht wird, in dieser Linie und der Abstand desselben vom Mittelpunkte heisse $+ e$; der Abstand des in derselben Linie liegenden Punkts, in welchem alles südmagnetische Fluidum $- m$ koncentrirt gedacht wird, heisse $- e$. a' und a'' seien der innere und äussere Durchmesser des Multiplikators und $2b'$ die Breite seines Querschnitts, welcher also $2(a'' - a')b'$ ist. Der Theil von diesem Querschnitte des ganzen Rings, welcher auf eine Umwindung kommt, deren Halbmesser a ist und deren Ebene im Abstande b vom Mittelpunkte des Multiplikators liegt, werde mit $\mathrm{d}a\mathrm{d}b$ bezeichnet: so ist nach (I.) das Produkt des Querschnitts einer Umwindung in die auf $+ m$ von ihr ausgeübte *Kraft:*

$$+ im \frac{2\pi a^2 \mathrm{d}a \mathrm{d}b}{(a^2 + b^2 + e^2)^{\frac{3}{2}}} \left\{ 1 + \tfrac{3}{4}(3a^2 - 2b^2 - 2e^2) \frac{e^2}{(a^2 + b^2 + e^2)^2} + \cdots \right\}.$$

Multiplicirt man dieses Produkt mit dem von der Drehungsaxe auf die Richtung der Kraft gefällten Perpendikel e, so erhält man das Produkt des Querschnitts der Umwindung in das von ihr ausgeübte *Drehungsmoment*. Setzt man endlich in diesem Ausdrucke $-m$ für $+m$ und $-e$ für $+e$, so erhält man einen gleichen Werth für das Produkt desselben Querschnitts in das von der nämlichen Umwindung auf das negative Fluidum ausgeübte Drehungsmoment. Folglich ist das Produkt des von jener Umwindung auf die ganze Nadel ausgeübten Drehungsmoments in ihren Querschnitt, wenn man mit $M = 2em$ den Nadelmagnetismus bezeichnet:

$$iM \frac{2\pi a^2 \mathrm{d}a \mathrm{d}b}{(a^2 + b^2 + e^2)^{\frac{3}{2}}} \left\{ 1 + \tfrac{3}{4}(3a^2 - 2b^2 - 2e^2) \frac{e^2}{(a^2 + b^2 + e^2)^2} + \cdots \right\}.$$

Da e ein kleiner Bruchtheil von a ist, so können alle Theile, welche die vierte oder höhere Potenzen zum Faktor haben, weggelassen werden und man erhält dann

$$iM \frac{2\pi a^2 \mathrm{d}a \mathrm{d}b}{(a^2 + b^2)^{\frac{3}{2}}} \left\{ 1 + \frac{3}{4} \frac{a^2 - 4b^2}{(a^2 + b^2)^2} \cdot e^2 \right\}.$$

Hieraus folgt nun die Summe der Produkte des Querschnitts jeder Umwindung in das von derselben ausgeübte Drehungsmoment

$$iM \,.\, 2\pi \int\limits_{a'}^{a''} a^2 \mathrm{d}a \int\limits_{-b'}^{+b'} \frac{\mathrm{d}b}{(a^2 + b^2)^{\frac{3}{2}}} \left\{ 1 + \frac{3}{4} \frac{a^2 - 4b^2}{(a^2 + b^2)^2} e^2 \right\}$$

$$= iM \left\{ 4\pi b' \,.\, \log \frac{a'' + \sqrt{a''^2 + b'^2}}{a' + \sqrt{a'^2 + b'^2}} + \frac{\pi}{b'} \left(\frac{a''^3}{(a''^2 + b'^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{a'^3}{(a'^2 + b'^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \cdot e^2 \right\}.$$

Dividirt man diesen Ausdruck mit dem Produkte aus dem Querschnitt einer Umwindung in die Zahl der Umwindungen, d. i. mit dem Querschnitte des ganzen Rings $2(a'' - a')\,b'$, so erhält man das mittlere Drehungsmoment, welches eine Umwindung auf die Nadel ausübt, woraus durch Multiplikation mit der Zahl der Umwindungen n das Drehungsmoment des Multiplikators auf die in seinem Mittelpunkte befindliche Nadel hervorgeht, nämlich:

$$iM \,.\, 2n\pi \cdot \frac{1}{a'' - a'} \left\{ \log \frac{a'' + \sqrt{a''^2 + b'^2}}{a' + \sqrt{a'^2 + b'^2}} + \frac{1}{4} \left(\frac{a''^3}{(a''^2 + b'^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{a'^3}{(a'^2 + b'^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \frac{e^2}{b'^2} \right\}.$$

Für den Fall, wo b' gegen a' verschwindet und a' von a'' wenig verschieden ist, ergiebt sich $iM \,.\, 2n\pi/a'$ und a' ist in diesem Falle der

Halbmesser des Multiplikators. Versteht man nun im Allgemeinen unter Halbmesser des Multiplikators einer gegebenen *Centralnadel* den Ausdruck:

$$\frac{a''-a'}{\log\frac{a''+\sqrt{a''^2+b'^2}}{a'+\sqrt{a'^2+b'^2}}+\frac{1}{4}\left(\frac{a''^3}{(a''^2+b'^2)^{\frac{3}{2}}}-\frac{a'^3}{(a'^2+b'^2)^{\frac{3}{2}}}\right)\frac{e^2}{b'^2}}$$

und bezeichnet ihn mit r', so ist das Drehungsmoment

$$\frac{2n\pi}{r'}\cdot Mi.$$

Wird dagegen die Nadel vom Multiplikator weit entfernt, bleiben aber dabei $+m$ und $-m$ in derselben Geraden, in den Abständen $R+e$ und $R-e$ vom Mittelpunkte, so muss auf den Ausdruck C S. 453 für die gegen die Meridianebene senkrechte Kraft zurückgegangen werden, welche ein Element ds auf μ ausübt, indem darin $+m$ oder $-m$ für μ, und $R+e$ oder $R-e$ für x gesetzt wird. Man erhält dann für $+m$

$$im\,.\,a\mathrm{d}\alpha\frac{a-(R+e)\cos\alpha}{(a^2+b^2+(R+e)^2-2a(R+e)\cos\alpha)^{\frac{3}{2}}},$$

für $-m$

$$-im\,.\,a\mathrm{d}\alpha\frac{a-(R-e)\cos\alpha}{(a^2+b^2+(R-e)^2-2a(R-e)\cos\alpha)^{\frac{3}{2}}}.$$

Die Summe des ersteren mit $+e$ multiplicirten und des letzteren mit $-e$ multiplicirten Werths giebt das von ds auf die Nadel ausgeübte Drehungsmoment, nämlich, wenn man M für $2em$ schreibt und beachtet, dass a, b und e gegen R verschwinden,

$$iM.\,a\mathrm{d}\alpha.\frac{a-R\cos\alpha}{(R^2-2aR\cos\alpha)^{\frac{3}{2}}}=-\frac{iM}{a}\left\{\frac{a^2}{R^2}\cos\alpha\,\mathrm{d}\alpha+\frac{a^3}{R^3}(3\cos\alpha^2-1)\,\mathrm{d}\alpha+..\right\},$$

folglich ist das von dem ganzen Kreise, zu welchem ds gehört, auf die Nadel ausgeübte Drehungsmoment

$$-\frac{iM}{a}\left\{\frac{a^2}{R^2}\int_0^{2\pi}\cos\alpha\,\mathrm{d}\alpha+\frac{a^3}{R^3}\int_0^{2\pi}(3\cos\alpha^2-1)\,\mathrm{d}\alpha+..\right\}$$

$$=-\frac{\pi a^2}{R^3}\cdot Mi,$$

weil die folgenden Glieder, welche die vierte oder höhere Potenzen von a/R enthalten, weggelassen werden können.

Integrirt man diesen mit dadb multiplicirten Werth zwischen den Grenzen von $a=a'$ bis $a=a''$ und von $b=-b'$ bis $b=+b'$, so

ist das Produkt dieses Integrals in $n/[2(a''-a')b']$ das vom Multiplikator auf die entfernte Nadel ausgeübte Drehungsmoment

$$-\frac{1}{3}\frac{n\pi Mi}{R^3}\cdot\frac{a''^3-a'^3}{a''-a'}=-\frac{n\pi Mi}{R^3}\cdot\frac{a'^2+a'a''+a''^2}{3}.$$

Für den Fall, wo a' von a'' wenig verschieden ist, ergiebt sich

$$-\frac{n\pi a'^2}{R^3}\cdot Mi$$

und a' ist in diesem Falle der Halbmesser des Multiplikators. Versteht man nun im Allgemeinen unter Halbmesser des Multiplikators einer *entfernten Nadel* den Ausdruck

$$\sqrt{\tfrac{1}{3}(a'^2+a'a''+a''^2)}$$

und bezeichnet ihn mit r'', so ist das Drehungsmoment

$$-\frac{n\pi r''^2}{R^3}\cdot Mi.$$

Vergleicht man endlich den gefundenen Ausdruck des Drehungsmoments, welches der Multiplikator auf die in seinem *Mittelpunkte* befindliche Nadel ausübt, mit demjenigen, welches er ausüben würde, wenn die Nadel *weit entfernt* wäre, so ergiebt sich das Verhältniss

$$\frac{2n\pi}{r'}\cdot Mi : -\frac{n\pi r''^2}{R^3}\cdot Mi = 1 : -\frac{r'r''^2}{2R^3}.$$

Regeln zur Berechnung des Widerstands aus den nach der ersten Methode Art. 14 ausgeführten Beobachtungen.

Die Gerade NS bezeichne die Richtung des horizontalen Erdmagnetismus, dessen Stärke an dem Orte $A=T'$, an dem Orte $B=T''$ sei. Eine geschlossene Kette bestehe aus zwei vertikalen Ringen, deren Mittelpunkte A und B seien. Der Ring B, welcher den Multiplikator bildet, stehe fest, der Ring A, welcher den Induktor bildet, sei um

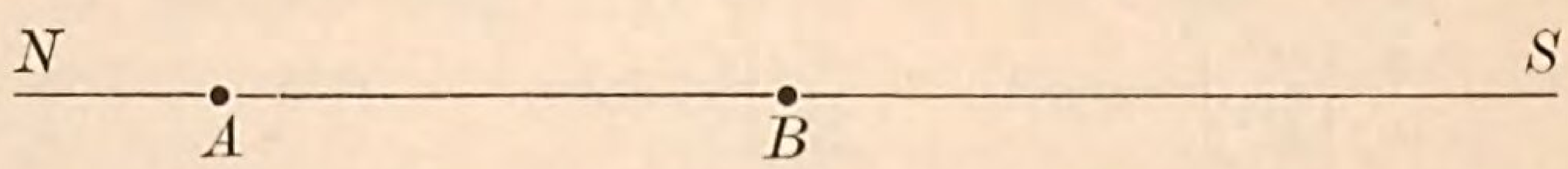


Fig. 15.

seinen vertikalen Durchmesser drehbar. Die Summe der Flächen, welche von allen Umwindungen des Rings A begrenzt werden, sei S, und ψ bezeichne den Winkel, welchen die Normale der Ringebene mit der Richtung NS am Ende der Zeit t bildet, so ist die Projektion von S auf eine auf NS senkrechte Ebene in diesem Augenblicke $=S\cos\psi$ und die Zunahme derselben in dem Zeitelemente dt ist $-S\sin\psi\,.\,d\psi$.

Hieraus ergiebt sich der absolute Werth der vom Erdmagnetismus T' auf den Ring A ausgeübten *elektromotorischen Kraft* nach Art. 10

$$eE = -ST' . \sin\psi \frac{d\psi}{dt} \cdot E.$$

Der Integralwerth hiervon von dem Augenblicke, wo $\psi = \pi$ war, bis zu dem Augenblicke, wo $\psi = 0$ geworden ist, werde durch $e'E$ bezeichnet, so ist

$$e' = 2ST'.$$

Der von dieser elektromotorischen Kraft in der ganzen geschlossenen Kette hervorgebrachte Strom, dessen Intensität am Ende der Zeit t mit iJ bezeichnet wird, geht durch den Multiplikatorring B, welcher, so durchströmt, auf die in seinem Mittelpunkte befindliche Nadel, deren magnetische Axe mit NS zusammenfällt, ein Drehungsmoment ausübt, welches nach S. 459 auf folgende Weise ausgedrückt wird:

$$\frac{2n\pi}{r'} \cdot Mi,$$

worin

$$\frac{1}{r'} = \frac{1}{a''-a'} \left\{ \log \frac{a'' + \sqrt{a''^2 + b'^2}}{a' + \sqrt{a'^2 + b'^2}} + \frac{1}{4} \left(\frac{a''^3}{(a''^2 + b'^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{a'^3}{(a'^2 + b'^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \frac{e^2}{b'^2} \right\}.$$

Es bezeichnet hier n die Zahl der Umwindungen des Multiplikatorringes B, a' und a'' den kleinsten und grössten Halbmesser und $2b'$ die Höhe desselben, M den Magnetismus der Nadel nach absolutem Maasse und $2e$ ist der Quotient M/m, wenn m die Menge des nordmagnetischen Fluidums ausdrückt, welches nach der idealen Vertheilung auf der Oberfläche der Nadel verbreitet ist.

Bezeichnet K das Trägheitsmoment der Nadel, so ergiebt sich hieraus die Acceleration der Drehung der Nadel

$$= \frac{2n\pi}{r'} \cdot \frac{Mi}{K}.$$

Bezeichnet man ferner den Integralwerth der Stromintensität iJ für den Zeitraum von dem Augenblicke an, wo $\psi = \pi$ war, bis zu dem Augenblicke, wo $\psi = 0$ geworden ist, mit $i'J$, so ist der Integralwerth der Acceleration für den nämlichen Zeitraum, d. i. die durch den Induktionsstoss der Nadel ertheilte Drehungsgeschwindigkeit

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{2n\pi}{r'} \cdot \frac{Mi'}{K},$$

woraus durch Multiplikation mit t'/π die Elongationsweite a

$$a = \frac{2nt'}{r'} \cdot \frac{i'M}{K},$$

folglich

$$i' = \frac{aKr'}{2nMt'}$$

erhalten wird, wo t' die Schwingungsdauer der Nadel bezeichnet.

Ist $1:(1+\vartheta)$ das Verhältniss, in welchem die magnetische Direktionskraft durch die Elasticität des Fadens, an welchem die Nadel hängt, vergrössert wird, und T'' die Stärke des horizontalen Erdmagnetismus am Orte des Multiplikators, so ist

$$t'^2 = \frac{\pi^2 K}{(1+\vartheta)\,MT''}$$

oder

$$\frac{K}{Mt'} = \frac{(1+\vartheta)\,T''t'}{\pi^2},$$

folglich

$$i' = \frac{(1+\vartheta)\,T''r't'}{2n\pi^2}\cdot a.$$

Bezeichnet endlich wW den Widerstand der ganzen geschlossenen Kette, so ergiebt sich für die Berechnung des Koefficienten w die Regel

$$w = \frac{e'}{i'} = \frac{n}{1+\vartheta}\cdot\frac{T'}{T''}\cdot\frac{4\pi^2 S}{ar't'},$$

was zu beweisen war.

Regel zur Berechnung des Widerstands aus den nach der zweiten Methode Art. 15 ausgeführten Beobachtungen.

Wird der feststehende dem magnetischen Meridiane parallele Ring B in sich geschlossen und die in seinem Mittelpunkte hängende Nadel in Schwingung gesetzt, so wird von dieser Nadel auf den Ring B eine *elektromotorische Kraft* ausgeübt, welche auf folgende Weise bestimmt werden kann.

Bezeichnet $+m$ das nordmagnetische Fluidum, welches nach der idealen Vertheilung auf der Oberfläche der Nadel verbreitet gedacht wird, und $+e$ die Entfernung, in welcher der Mittelpunkt dieser magnetischen Masse von dem Mittelpunkte des Ringes B liegt; bezeichnet ferner $-m$ das südmagnetische Fluidum, welches nach der idealen Vertheilung auf der Oberfläche der Nadel verbreitet gedacht wird, und $-e$ die Entfernung, in welcher der Mittelpunkt dieser magnetischen Masse von dem Mittelpunkte des Ringes B liegt; und ist folglich der Nadelmagnetismus

$$M = 2em,$$

so wird, wenn γ die Drehungsgeschwindigkeit der Nadel ist, für kleine Elongationsweiten der Nadel, die elektromotorische Kraft, welche die

Nadel auf eine Umwindung des Ringes B ausübt, deren Halbmesser $= a$ ist und deren Ebene in der Entfernung b vom Mittelpunkte des Ringes B liegt, nach S. 456 durch folgenden Ausdruck bestimmt:

$$-\gamma M \frac{\pi a^2}{(a^2+b^2+e^2)^{\frac{3}{2}}}\left\{2+\tfrac{3}{2}(3a^2-2b^2-2e^2)\frac{e^2}{(a^2+b^2+e^2)^2}\right\},$$

indem dort *erstens* $\mu = +m$ und $u = +e\gamma$, *zweitens* $\mu = -m$ und $u = -e\gamma$ gesetzt und die Summe beider Werthe genommen wird. Die elektromotorische Kraft, welche die Nadel auf den ganzen Ring ausübt, dessen innerer und äusserer Halbmesser a' und a'' und dessen Höhe $2b'$ ist und der n Umwindungen besitzt, folgt hieraus $= eE$, wo $e =$

$$-\frac{n}{2(a''-a')b'}\cdot\gamma M\pi\int_{a'}^{a''} a^2 \mathrm{d}a \int_{-b'}^{+b'}\frac{\mathrm{d}b}{(a^2+b^2+e^2)^{\frac{3}{2}}}\left(2+\tfrac{3}{2}(3a^2-2b^2-2e^2)\frac{e^2}{(a^2+b^2+e^2)^2}\right)$$

oder

$$e = -\gamma M.\, 2n\pi\frac{1}{a''-a'}\left\{\log\frac{a''+\sqrt{a''^2+b'^2}}{a'+\sqrt{a'^2+b'^2}}\right.$$
$$\left.+\frac{1}{4}\left(\frac{a''^3}{(a''^2+b'^2)^{\frac{3}{2}}}-\frac{a'^3}{(a'^2+b'^2)^{\frac{3}{2}}}\right)\frac{e^2}{b'^2}\right\}$$

oder

$$e = -\frac{2n\pi}{r'}\cdot M\gamma,$$

wenn, wie oben,

$$\frac{1}{r'} = \frac{1}{a''-a'}\left\{\log\frac{a''+\sqrt{a''^2+b'^2}}{a'+\sqrt{a'^2+b'^2}}+\frac{1}{4}\left(\frac{a''^3}{(a''^2+b'^2)^{\frac{3}{2}}}-\frac{a'^3}{(a'^2+b'^2)^{\frac{3}{2}}}\right)\frac{e'^2}{b'^2}\right\}$$

gesetzt wird.

Der im Multiplikatorringe hierdurch inducirte Strom, dessen Intensität mit $-\gamma iJ$ bezeichnet werde, wo iJ die Intensität desjenigen Stroms ist, welcher von der elektromotorischen Kraft $2n\pi/r'\ M$ hervorgebracht werden würde, übt rückwärts auf die schwingende Nadel wieder ein Drehungsmoment aus, welches nach S. 459 auf folgende Weise ausgedrückt wird:

$$-\frac{2n\pi}{r'}\cdot M\gamma i.$$

Bezeichnet K das Trägheitsmoment der Nadel, so ergiebt sich hieraus eine Retardation der Drehungsgeschwindigkeit γ

$$= -\frac{2n\pi}{r'}\cdot\frac{M\gamma i}{K}.$$

Bezeichnet man endlich mit φ den kleinen Winkel, welchen die schwingende Nadel in irgend einem Augenblicke mit dem magnetischen Meri-

diane macht, also $\gamma = \mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}t$, so ist das Drehungsmoment, welches der Erdmagnetismus T auf die Nadel ausübt,

$$= - MT\varphi$$

und dies verursacht eine Retardation der Geschwindigkeit γ

$$= - \frac{MT}{K}\varphi,$$

wozu noch derjenige Theil der Retardation hinzuzufügen ist, welcher von der Elasticität des Aufhängungsfadens herrührt, und welcher, wenn ϑ die daraus entspringende Direktionskraft der Nadel in Theilen ihrer magnetischen Direktionskraft ausdrückt,

$$= - \frac{\vartheta MT}{K}\varphi$$

ist. Die ganze Retardation der Geschwindigkeit $\gamma = \mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}t$ beträgt hiernach

$$-\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} = (1+\vartheta)\frac{MT}{K}\varphi + \frac{2n\pi}{r'}\cdot\frac{Mi}{K}\cdot\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t},$$

woraus

$$\varphi = Ae^{-\frac{n\pi Mi}{Kr'}t}\sin t\sqrt{(1+\vartheta)\frac{MT}{K} - \left(\frac{n\pi Mi}{Kr'}\right)^2}$$

folgt, wo e die Basis der natürlichen Logarithmen, t die von einem Durchgang der Nadel durch den Meridian gerechnete Zeit und

$$\frac{\pi}{\sqrt{(1+\vartheta)\frac{MT}{K} - \left(\frac{n\pi Mi}{Kr'}\right)^2}}$$

die Schwingungsdauer der Nadel t', endlich

$$1 : e - \frac{n\pi Mit'}{Kr'}$$

das Verhältniss zweier auf einander folgender Schwingungsbogen ist. Der natürliche Logarithmus dieses Verhältnisses oder das logarithmische Dekrement der Abnahme der Schwingungsbogen ist also

$$\lambda = \frac{n\pi Mit'}{Kr'}.$$

Aus dieser Gleichung folgt zur Bestimmung der Intensität iJ des von der elektromotorischen Kraft $e = 2n\pi M/r'$ in dem geschlossenen Ringe B hervorgebrachten Stroms

$$i = \frac{Kr'}{n\pi Mt'}\cdot\lambda$$

und hieraus endlich zur Bestimmung des Widerstands wW des Ringes B

$$w = \frac{e}{i} = \left(\frac{n\pi M}{r'}\right)^2\cdot\frac{2t'}{K\lambda}.$$

Dieser Ausdruck von w lässt sich in eine andere Form bringen, wenn man beachtet, dass die Schwingungsdauer der Nadel

$$t' = \frac{\pi}{\sqrt{(1+\vartheta)\frac{MT}{K} - \left(\frac{n\pi Mi}{Kr'}\right)^2}}$$

und

$$\lambda = \frac{n\pi Mi}{Kr'} \cdot t'$$

war, woraus

$$\frac{MT}{K} = \frac{\pi^2 + \lambda^2}{(1+\vartheta)\,t'^2}$$

sich ergiebt, und wenn man ausserdem beachtet, dass, wenn

$$\frac{2M}{Tr'^3} = \operatorname{tang} v_0$$

gesetzt wird, v_0 nach bekannter Methode aus magnetometrischen Ablenkungsversuchen bestimmt werden kann. Durch Multiplikation dieser beiden Gleichungen erhält man

$$\frac{2M^2}{Kr'^3} = \frac{\pi^2 + \lambda^2}{(1+\vartheta)\,t'^2} \cdot \operatorname{tang} v_0$$

und folglich

$$w = \frac{n^2\pi^2}{1+\vartheta} \cdot \operatorname{tang} v_0 \cdot \frac{\pi^2+\lambda^2}{\lambda} \cdot \frac{r'}{t'},$$

was zu beweisen war.

E.

Regeln zur Berechnung des von einem Strome mit Gleitstelle inducirten Stroms.

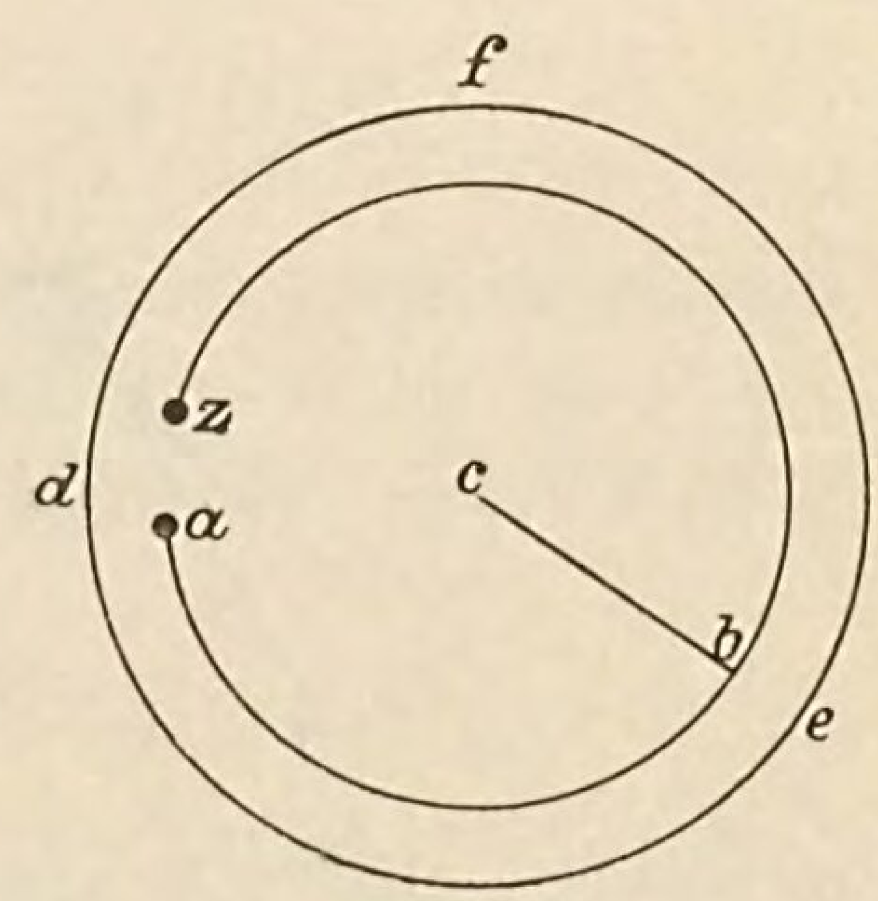


Fig. 16.

Es ist ein Strom von der konstanten Intensität i gegeben, welcher bei a in den Kreisbogen ab eintritt und durch denselben bis zu der Stelle b fortgeht, von wo er durch den Halbmesser bc nach dem Mittelpunkte c und von c nach a zurückgeleitet wird. Es soll die elektromotorische Kraft berechnet werden, welche von diesem Strome auf einen oder mehrere koncentrische Kreise def ausgeübt wird, während das bewegliche Stromstück bc einen Kreis um c beschreibt, oder genauer, während das Ende b des beweglichen Stromstücks bc den Bogen abz durchläuft, welcher um den beliebig kleinen Zwischenraum za kleiner ist, als die ganze Peripherie. Es sind hierbei

dreierlei Arten von elektromotorischen Kräften zu unterscheiden, nämlich 1. diejenigen elektromotorischen Kräfte, welche von den Elementen des beweglichen Stromstücks bc ausgeübt werden; 2. diejenigen elektromotorischen Kräfte, welche die am Ende des Bogens ab in Folge des Fortrückens des beweglichen Stromstücks bc neu eintretenden Stromelemente ausüben; 3. diejenigen elektromotorischen Kräfte, welche die an der Gleitstelle b von dem Bogen ab zu dem Halbmesser bc, oder von bc zu ba übergehende Elektricität in Folge der Aenderung ihrer Geschwindigkeit, welche sie daselbst erleidet, ausübt.

Was die *erste* Art von elektromotorischen Kräften betrifft, so wird nach Art. 30 S. 367[1]) der ersten Abhandlung über elektrodynamische Maassbestimmungen die elektromotorische Kraft eines Elements α des beweglichen Stromstücks bc auf ein Element α' des inducirten Leiters def durch folgenden Ausdruck bestimmt:

$$-\frac{\alpha\alpha'}{r^2} i (\sin\vartheta \sin\eta \cos\varepsilon - \tfrac{1}{2}\cos\vartheta\cos\eta) \,.\, av \cos\vartheta'.$$

Die a. a. O. gegebene Erklärung der Buchstaben erhellt aus der Anwendung auf den vorliegenden Fall von selbst. Es sei nämlich C der Mittelpunkt des Kreisbogens $A'A$, durch welchen der inducirende Strom i von A' nach A geht, und der bewegliche Radius $CA = R$ bilde das bewegliche Stromstück, durch welches derselbe Strom i von A nach C geht. Das inducirende Element α liege in diesem Radius in der Entfernung ϱ vom Mittelpunkte C. Das inducirte Element α' sei ein Element eines koncentrischen Kreises, dessen Halbmesser $= R'$ ist, und der bewegliche Radius CA bilde mit dem durch α' gelegten Radius den Winkel $\varphi = AC\alpha'$. r ist die von α nach α' gezogene Gerade, mit welcher die Richtung des Stroms in α, nämlich αC den Winkel $\alpha'\alpha C = \vartheta$ macht. Es leuchtet nun ferner ein, weil die Induktion blos von der relativen Bewegung der beiden Elemente α und α' gegen einander abhängt, dass statt der Drehung von α um den Mittelpunkt C, wobei α' unverrückt bliebe, eine im Bogenwerthe gleiche, der Richtung nach entgegengesetzte Drehung von α' um denselben Mittel-

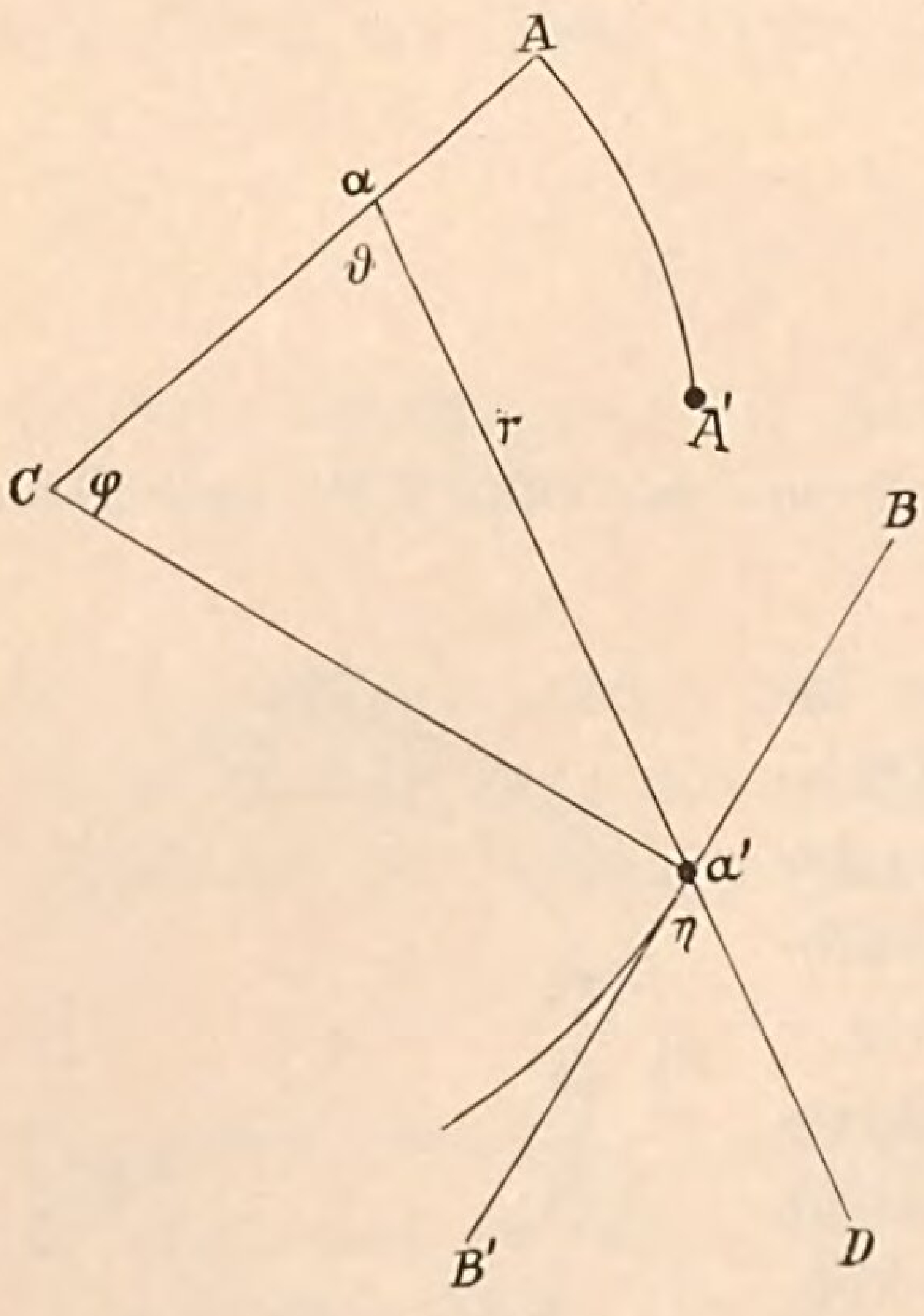


Fig. 17.

[1]) [Wilhelm Weber's Werke, Bd. III, p. 202.]

punkt C gesetzt werden kann, wobei a unverrückt bleibt. Man setze also hiernach, dass das Element a' nach der Richtung der negativen Tangente $a'B'$ mit der Geschwindigkeit v bewegt werde. Diese Richtung bildet mit der verlängerten r, d. i. mit $a'D$ den Winkel $Da'B' = \eta$. Da ferner a' selbst ein Element des Kreises ist, dessen Richtung mit der positiven Kreistangente $a'B$ zusammenfällt, so ist der Winkel, den seine Richtung mit der verlängerten r macht, $\vartheta' = \eta + \pi$. Der Winkel ε der beiden Ebenen endlich, welche durch r parallel der Stromrichtung in a und parallel der Richtung, in welcher a' verschoben wird, gelegt werden, ist $\varepsilon = 0$, wenn ϑ und η entweder beide kleiner oder beide grösser als π sind, oder $\varepsilon = \pi$, wenn der eine von den beiden Winkeln ϑ, η kleiner, der andere grösser als π ist. Setzt man daher für ϑ oder η, sobald sie grösser als π sind, ihre Ergänzungswinkel zu 2π, so wird immer $\cos\varepsilon = +1$. Man erhält hiernach für obigen Ausdruck

$$+\frac{aa'}{r^2} i (\sin\vartheta \sin\vartheta' - \tfrac{1}{2}\cos\vartheta\cos\vartheta') \,.\, av\cos\vartheta',$$

worin der Werth von ϑ immer kleiner, der von ϑ' grösser als π ist, ferner:

$$\begin{aligned} r^2 &= R'^2 + \varrho^2 - 2R'\varrho\cos\varphi, \\ r\sin\vartheta &= R'\sin\varphi, \\ r\cos\vartheta &= \varrho - R'\cos\varphi, \\ r\sin\vartheta' &= \varrho\cos\varphi - R', \\ r\cos\vartheta' &= -\varrho\sin\varphi. \end{aligned}$$

Setzt man ausserdem $a = -\mathrm{d}\varrho$ und $a' = R'\mathrm{d}\varphi$, so erhält man folgenden Ausdruck:

$$+\tfrac{1}{2}avi \,.\, R'\sin\varphi^2\mathrm{d}\varphi \,.\, \left(1 - \frac{3R'}{r^2}(R' - \varrho\cos\varphi)\right)\frac{\varrho\,\mathrm{d}\varrho}{r^3}.$$

Setzt man hierin $r^2 = R'^2 + \varrho^2 - 2R'\varrho\cos\varphi$, so findet man

$$\int\left(1 - \frac{3R'}{r^2}(R' - \varrho\cos\varphi)\right)\frac{\varrho\,\mathrm{d}\varrho}{r^3} = -\frac{\varrho^2}{r^3} + \text{Const.}$$

Es ist daher die Summe der elektromotorischen Kräfte, welche sämmtliche Elemente des beweglichen Stromstücks von $\varrho = R$ bis zu $\varrho = 0$ auf das inducirte Element a' ausüben, wenn $R'^2 + R^2 - 2R'R\cos\varphi = r'^2$ gesetzt wird,

$$+\tfrac{1}{2}avi \,.\, R'R^2 \cdot \frac{\sin\varphi^2\mathrm{d}\varphi}{r'^3};$$

endlich die Summe der elektromotorischen Kräfte für alle inducirten Elemente des Kreises def, d. h. für alle Elemente von $\varphi = 0$ bis $\varphi = 2\pi$:

$$+\tfrac{1}{2}avi \,.\, R'R^2 \,.\, \int_0^{2\pi}\frac{\sin\varphi^2\mathrm{d}\varphi}{r'^3}.$$

Das Produkt dieses Ausdrucks in die Zeit t ist der Integralwerth der Summe der elektromotorischen Kräfte für die Zeit t, oder für den vom Inducenten in dieser Zeit durchlaufenen Weg vt. Setzt man folglich $vt = 2n\pi R'$, d. h. gleich der n fachen Länge der Kreisbahn, so erhält man den Integralwerth der elektromotorischen Kraft für n Umdrehungen des Inducenten:

$$+ ai \,.\, n\pi R^2 R'^2 \int_0^{2\pi} \frac{\sin\varphi^2 \,\mathrm{d}\varphi}{r'^3}.$$

Besteht der inducirte Leiter nicht blos aus einer, sondern aus m Umwindungen, deren Halbmesser nicht merklich verschieden sind, so erhält man die Summe der elektromotorischen Kräfte, welche durch n Umdrehungen des Inducenten auf alle m Umwindungen des inducirten Leiters ausgeübt werden:

$$+ ai \,.\, mn\pi R^2 R'^2 \int_0^{2\pi} \frac{\sin\varphi^2 \,\mathrm{d}\varphi}{r'^3},$$

worin $r'^2 = R'^2 R^2 - 2R'R\cos\varphi$ zu setzen ist. Setzt man $R = kR'$, wo $k < 1$ ist, so erhält man

$$\frac{1}{r'^3} = \frac{1}{R'^3}\left\{\frac{1}{(1+k^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{3k\cos\varphi}{(1+k^2)^{\frac{5}{2}}} + \frac{15}{2}\frac{k^2\cos\varphi^2}{(1+k^2)^{\frac{7}{2}}} + \frac{35}{2}\frac{k^3\cos\varphi^3}{(1+k^2)^{\frac{9}{2}}} + \frac{315}{8}\frac{k^4\cos\varphi^4}{(1+k^2)^{\frac{11}{2}}} + \ldots\right\},$$

folglich

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin\varphi^2 \,\mathrm{d}\varphi}{r'^3} = \frac{\pi}{(1+k^2)^{\frac{3}{2}} R'^3}\left\{1 + \frac{15}{8}\frac{k^2}{(1+k^2)^2} + \frac{315}{64}\frac{k^4}{(1+k^2)^4} + \ldots\right\}.$$

Setzt man hierin wieder für k seinen Werth R/R' und

$$R_0 = \frac{R^2R'^2}{(R^2+R'^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \left\{1 + \frac{15}{8}\left(\frac{RR'}{R^2+R'^2}\right)^2 + \frac{315}{64}\left(\frac{RR'}{R^2+R'^2}\right)^4 + \ldots\right\},$$

so erhält man für die gesuchte elektromotorische Kraft den Ausdruck

$$+ ai \,.\, mn\pi^2 R_0,$$

was zu beweisen war.

Was die *zweite* Art von elektromotorischen Kräften betrifft, so wird nach Art. 30, S. 367 [1]) der ersten Abhandlung über elektrodynamische Maassbestimmungen die elektromotorische Kraft, welche ein Element

[1]) [Wilhelm Weber's Werke, Bd. III, p. 202.]

des unbeweglichen Stromstücks a, in welchem die Stromstärke im Zeitelemente $\mathrm{d}t$ um $\mathrm{d}i$ wächst, auf ein inducirtes Element a' ausübt, durch folgenden Ausdruck bestimmt:

$$-\frac{1}{2}\frac{aa'}{r}\, a\cos\vartheta\cos\vartheta' \cdot \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}.$$

Es sind nun a und a' Elemente zweier Kreisbogen $A'a$ und $B'a'$, welche einen gemeinschaftlichen Mittelpunkt C und die Halbmesser R und R' haben $A'a$ ist das unbewegliche, aC das bewegliche Stück des inducirenden Stroms; der Winkel $aCa' = \varphi$ ist der Winkel, welchen das bewegliche Stromstück mit dem Halbmesser des inducirten Elements a' bildet; a ist das in die Stromkette neu eintretende Leiterelement, während das Ende des beweglichen Stromstücks um $R\mathrm{d}\varphi = a$ fortschreitet. Die Stromrichtung aA im Elemente a macht mit der Richtung $aa' = r$ den Winkel $D'aA + \pi = \vartheta$; die Richtung $a'B$ des inducirten Elements a' macht mit der Richtung der verlängerten r, d. h. mit $a'D$ den Winkel $aa'B + \pi = \vartheta'$. Fällt man von a auf Ca' das Perpendikel aE, und von a' auf die verlängerte Ca das Perpendikel $a'F$, so ist $aa'F = D'aA = \vartheta - \pi$ und $a'aE = aa'B = \vartheta' - \pi$; folglich die Perpendikel

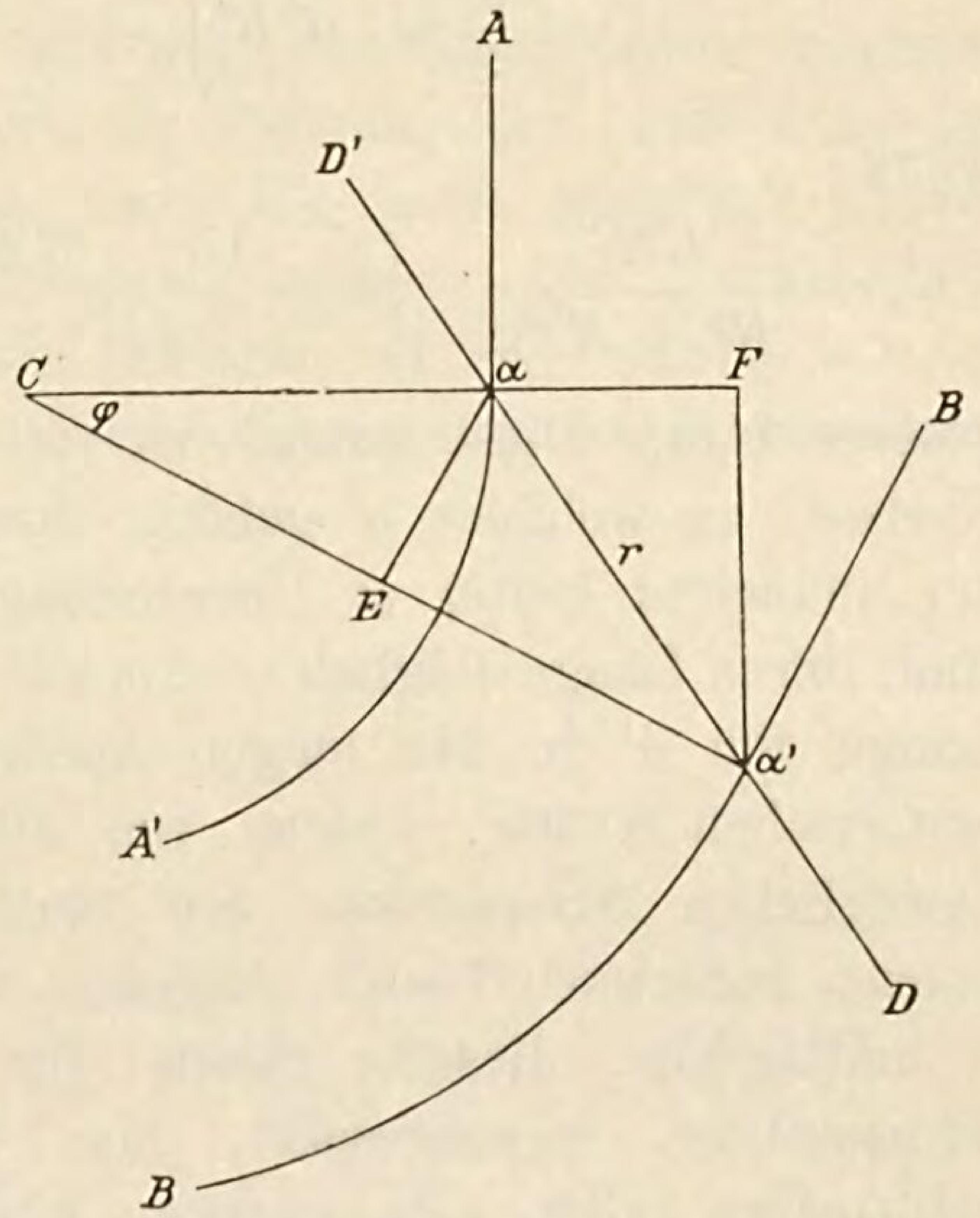


Fig. 18.

$$a'F = R'\sin\varphi = r\cos aa'F = -r\cos\vartheta,$$
$$aE = R\sin\varphi = r\cos a'aE = -r\cos\vartheta'.$$

Hieraus ergiebt sich

$$a\cos\vartheta\cos\vartheta' = \frac{R^2R'}{r^2}\sin\varphi^2\,\mathrm{d}\varphi.$$

Setzt man diesen Werth in den obigen Ausdruck der elektromotorischen Kraft, so erhält man dafür:

$$-\frac{a'}{2}\frac{R^2R'}{r^3}\sin\varphi^2\,\mathrm{d}\varphi\,.\,a\,\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}.$$

Setzt man $\mathrm{d}i/\mathrm{d}t = i/t$, wo t die Zeit bezeichnet, in welcher die Stromstärke im inducirenden Elemente $a = R\mathrm{d}\varphi$ von 0 bis i wächst, so ist

die elektromotorische Kraft des mit der Stromstärke i neu eintretenden Stromelements a das Produkt dieses Ausdrucks in die Zeit t:

$$-\frac{a'}{2}\,ai\cdot\frac{R^2R'}{r^3}\sin\varphi^2\,d\varphi$$

und die Summe der elektromotorischen Kräfte für alle während einer Umdrehung des beweglichen Stromstücks neu eintretenden Stromelemente:

$$-\frac{a'}{2}\,ai\,.\,R^2R'\int_0^{2\pi}\frac{\sin\varphi^2\,d\varphi}{r^3}=-\frac{a'}{2}\,ai\,.\,\pi\frac{R_0}{R'},$$

wenn

$$R_0=\frac{R^2R'^2}{(R^2+R'^2)^{\frac{3}{2}}}\cdot\left\{1+\frac{15}{8}\left(\frac{RR'}{R^2+R'^2}\right)^2+\frac{315}{64}\left(\frac{RR'}{R^2+R'^2}\right)^4+\ldots\right\}$$

gesetzt wird. Diese Summe ist für alle inducirten Elemente desselben Kreises, zu welchem a' gehört, ihrer Länge proportional. Bildet also der inducirte Leiter m Umwindungen, deren Halbmesser nahe $=R'$ sind, deren Länge folglich $=2m\pi R'$ ist, so erhält man, wenn man diese Länge für a' in den obigen Ausdruck setzt, die Summe der elektromotorischen Kräfte, welche von allen während einer Umdrehung des beweglichen Stromstücks neu eintretenden Stromelementen auf den ganzen inducirten Leiter ausgeübt werden, oder, wenn man noch mit n multiplicirt, dieselbe Summe für n Umdrehungen des beweglichen Stromstücks, vorausgesetzt, dass die Wirkung des plötzlichen Verschwindens aller eingetretenen Stromelemente am Ende jeder Umdrehung durch Lösung der inducirten Kette in diesem Augenblicke aufgehoben werde. Die gesuchte elektromotorische Kraft ist also

$$-ai\,.\,mn\pi^2R_0,$$

was zu beweisen war.

Es bleibt also nur noch die *dritte* Art von elektromotorischen Kräften zu betrachten übrig, nämlich diejenigen, welche die an der Gleitstelle von dem unbeweglichen zum beweglichen Stromstück übergehende Elektricität in Folge der Aenderung ihrer Geschwindigkeit, welche sie bei diesem Uebergange erleidet, ausübt. Alle hieraus sich ergebenden Elementarwirkungen sind aber, wie Art. 39 bewiesen worden ist, den aus der *zweiten* Art der elektromotorischen Kräfte sich ergebenden gleich; folglich findet diese Gleichheit auch für die Summe Statt, für die also gleichfalls der soeben gefundene Ausdruck gültig ist.

Die ganze elektromotorische Kraft für die Dauer von n Umdrehungen des Inducenten ist die Summe der drei gefundenen Ausdrücke, von denen der erste den beiden letzten entgegengesetzt gleich ist, und ist also

$$-ai\,.\,mn\pi^2R_0.$$

Bezeichnet man endlich mit T die Dauer von n Umdrehungen des Inducenten und mit w den Widerstand des inducirten Leiters, so erhält man zur Berechnung der Stärke i' des inducirten Stroms, im Vergleich mit der Stärke i des inducirenden Stroms, welcher eine Gleitstelle hat, folgende Gleichung:

$$\frac{i'}{i} = -\frac{a}{w} \cdot mn\pi^2 \frac{R_0}{T},$$

wo das negative Vorzeichen des zweiten Glieds bedeutet, dass die Richtung des inducirten Stroms der Richtung des inducirenden entgegengesetzt ist, vorausgesetzt, dass durch die Drehung des Inducenten dem unbeweglichen Stromstücke immer neue Elemente zugefügt werden. Bei umgekehrter Drehung des Inducenten dagegen, durch welche dem unbeweglichen Stromstücke Elemente entzogen würden, würde, wie von selbst einleuchtet, das zweite Glied der Gleichung den entgegengesetzten Werth erhalten.

XI.

Elektrodynamische Maassbestimmungen

insbesondere über

Diamagnetismus.

Von

Wilhelm Weber.

[Abhandlungen der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften, mathematisch-physische Klasse, Bd. 1, Leipzig 1852, p. 485—577.]

Der *Diamagnetismus* ist in den wenigen Jahren seit seiner Entdeckung Gegenstand vielseitiger Forschungen gewesen, welche nicht blos zu einer Erweiterung seines Gebiets, sondern auch zur Entdeckung und Untersuchung mehrerer anderen neuen Naturerscheinungen geführt haben. Das Interesse an diesen Forschungen ist dadurch immer mehr gewachsen. Jedoch bedarf die Lehre vom *Diamagnetismus* noch eines *Fundamentalgesetzes,* wenn sie der Lehre vom Magnetismus, Elektromagnetismus und von der Magnetelektricität, womit sie innigst zusammen zu hängen scheint, gehörig begründet zur Seite gestellt werden soll. Auch zu diesem *Fundamentalgesetze* zu gelangen, schien nun gleich anfangs eine Aussicht dadurch eröffnet zu sein, dass es Faraday gelungen war, die beiden hauptsächlichsten von ihm entdeckten Thatsachen, nämlich die diamagnetische *Abstossung* und die *äquatoriale Stellung* diamagnetischer Körper in der Nähe eines starken Magnets, unter einen sehr einfachen und allgemeinen Ausdruck zu bringen, der, wenn er auch nicht selbst als Fundamentalgesetz betrachtet werden konnte, doch in nächster und engster Beziehung mit einem solchen stehen zu müssen schien. Faraday führte nämlich diese diamagnetischen Wirkungen auf die Gesetze *veränderlicher Magnete* (Eisenmagnete) zurück, indem er die Wirkungen diamagnetischer Körper den Wirkungen von magnetischem Eisen verglich, worin Nord- und Südmagnetismus mit einander vertauscht wären. Die hiernach vorhandene Relation des Diamagnetismus zum Magnetismus bildet das von ihm aufgestellte Gesetz der *diamagnetischen Polarität.*

Um keine Ungewissheit über den Sinn zu lassen, welcher mit dem Worte *magnetische* oder *diamagnetische Polarität* zu verbinden sei, möge hier sogleich eine Erklärung desjenigen Sinnes, in welchem dieser Ausdruck in folgender Abhandlung genommen wird, beigefügt werden. Es ist bekannt, dass Gauss bewiesen hat, dass alle Wirkungen, die irgend ein Magnet (oder ein Körper, welcher geschlossene galvanische Ströme enthält) auf andere Körper ausübt, auf die Wirkungen zweier magnetischen Fluida zurückgeführt werden können, welche *auf seiner Oberfläche* auf eine bestimmte Weise vertheilt sind. Gauss hat diese Vertheilung *die ideale Vertheilung der magnetischen Fluida* genannt. Demnach soll nun in der folgenden Abhandlung unter *magnetischer* oder *diamagnetischer Polarität* eines Körpers ein solcher Zustand des-

selben verstanden werden, vermöge dessen er Wirkungen auf andere Körper ausübt, welche so beschaffen sind, dass sie sämmtlich *aus einer idealen Vertheilung magnetischer Fluida* erklärt werden können.

In diesem Sinne folgt also aus dem Gesetze der *diamagnetischen Polarität,* dass alle *Wirkungen* eines diamagnetischen Körpers sich *aus einer idealen Vertheilung der beiden magnetischen Fluida* auf seiner Oberfläche erklären lassen. Da nun aus dem Gesetze der *magnetischen Polarität* derselbe Ausspruch sich für magnetische Körper ergiebt, so folgt, dass, wenn es in dem angegebenen Sinne wirklich eine *diamagnetische Polarität* giebt,

> *diamagnetische* Körper von *magnetischen* sich nicht wesentlich durch ihre *Wirkungen*, sondern blos durch die Art und Weise ihrer *Entstehung* oder *Veränderung* unterscheiden;

denn vorausgesetzt, dass die von ihrer Entstehung (oder Veränderung) abhängige *ideale Vertheilung* gegeben ist, so sind auch alle Wirkungen gegeben, gleichgültig ob es *Magnetismus* oder *Galvanismus* oder *Diamagnetismus* sei, an dessen Stelle jene *ideale Vertheilung* gesetzt worden.

Soll nun aber das Gesetz der *diamagnetischen Polarität* wirklich eine allgemeine Geltung haben, so darf seine Anwendbarkeit nicht blos auf diejenigen Erscheinungen beschränkt bleiben, welche Faraday zuerst entdeckt hatte, die nämlich auf der Wechselwirkung des diamagnetischen Körpers mit demjenigen Magnet, durch dessen Einfluss er diamagnetisch geworden war, beruhen, sondern sie muss auf alle Arten von Erscheinungen erstreckt werden können, die ein Körper durch eine bestimmte Vertheilung seiner magnetischen Fluida hervorbringen kann, wenn er auf andere Körper wirkt. Alle diese verschiedenen Arten von Erscheinungen werden eingetheilt in *rein magnetische*, *elektromagnetische* und *magnetelektrische.* Es war daher von besonderem Interesse, das wirkliche Vorhandensein dieser *verschiedenen Wirkungsarten* thatsächlich festzustellen. Die *zweite* Wirkung würde nämlich, wenn sie bei diamagnetischen Körpern wirklich vorhanden wäre, den Fundamentalversuch des *Elektrodiamagnetismus*, die *dritte* den Fundamentalversuch der *Diamagnetelektricität* (oder der diamagnetischen Induktion elektrischer Ströme) geben. Fänden dagegen nicht alle diese Wirkungen Statt, so hiesse das so viel, als das Gesetz der *diamagnetischen Polarität* wäre nicht allgemein gültig, wodurch es seine ganze Wichtigkeit und Bedeutung in theoretischer Beziehung verlöre.

Ueber den Thatbestand dieser verschiedenen Wirkungsarten diamagnetischer Körper stimmen nun die von verschiedenen Beobachtern gefundenen Resultate noch nicht mit einander überein, was leicht erklärlich ist, wenn man bedenkt, wie schwach nothwendiger Weise namentlich die letzteren Arten von Wirkungen sein müssen, und wie

leicht es daher geschehen kann, dass es nicht allen Beobachtern sie darzustellen gelingt, zumal wenn sie nicht alle ganz gleiche Instrumente gebrauchen. Namentlich ist es Faraday nicht gelungen, sich von dem Vorhandensein der letzten (inducirenden) Wirkung diamagnetischer Körper zu überzeugen, ungeachtet er auf die Wiederholung der darüber gemachten Versuche grosse Mühe und Sorgfalt verwendet hat.

Wie schwach zum Beispiel die Wirkungen eines diamagnetischen Körpers auf eine Boussole sein müssen, leuchtet daraus ein, dass selbst die von starken Elektromagneten auf einen von ihnen diamagnetisirten Körper auch in kleiner Entfernung ausgeübten Kräfte sehr schwach sind, obgleich sie den grossen Kräften der Elektromagnete proportional sind. Betrachtet man nun aber, statt der Wechselwirkung eines in gegebener Weise diamagnetisirten Körpers mit so kraftvollen Elektromagneten, die Wechselwirkung desselben diamagnetischen Körpers mit einer schwachen Boussole, so leuchtet ein, dass aus dieser letzteren Wechselwirkung bei gleichem Abstande eine Kraft hervorgeht, welche in dem Verhältnisse der magnetischen Kraft jener Elektromagnete zu der dieser Boussole noch kleiner ist als die aus der ersten Wechselwirkung entsprungene Kraft, die selbst schon sehr klein war.

Unter diesen Verhältnissen, wo man *a priori* übersehen kann, dass die fraglichen Wirkungen, wenn sie vorhanden sind, ausserordentlich schwach sein müssen, bedarf es besonderer Vorkehrungen, um sie von anderen kleinen Wirkungen genau zu unterscheiden und zu einem sicheren Resultate über ihr Dasein zu gelangen. Es reicht nicht hin, dass man die Beobachtungsmittel zu schärfen und zu verfeinern sucht, sondern man muss sich auch von der wirklich erreichten Schärfe und Feinheit dieser Mittel, und von der Stärke der fraglichen Wirkungen, welche damit beobachtet werden sollen, nähere Kenntniss zu verschaffen suchen, um darüber gewiss zu werden, dass das *Beobachtete* dem *Gesuchten* wirklich entspricht, — kurz, die Beobachtung so schwacher Wirkungen bedarf, um zu sicheren Resultaten zu führen, der *quantitativen Kontrole*, an der es bisher gänzlich gefehlt hat. Namentlich kann die Frage über das Vorhandensein oder Nichtvorhandensein einer *diamagnetischen Induktion elektrischer Ströme*, um die es sich vorzüglich handelt, auf dem Wege des Versuchs nur dann sicher entschieden werden, wenn die *Stärke des Stroms*, welcher diamagnetisch inducirt werden müsste, d. i. der Gegenstand, um den es sich handelt, einigermaassen ihrer Grösse nach vorausbestimmt ist, weil nur hiernach die Mittel bemessen werden können, welche zur Prüfung nothwendig sind und genügen.

Um nun aber zu einer solchen *quantitativen Kontrole* der Betrachtungen zu gelangen, muss diejenige Betrachtung, welche auf die Ver-

muthung einer *diamagnetischen Induktion elektrischer Ströme* geführt hat, genauer verfolgt werden. Nach dieser Betrachtung wird nämlich angenommen, dass alle Wirkungen eines diamagnetischen Körpers aus einer bestimmten Vertheilung der beiden magnetischen Fluida auf seiner Oberfläche erklärt werden können, und dass umgekehrt ein diamagnetischer Körper *alle* Wirkungen der so vertheilten magnetischen Fluida ausübe. Hieraus folgt nun, das jedem diamagnetischen Körper ein bestimmtes *magnetisches Moment* müsse beigelegt, und dass jede Art von diamagnetischer Wirkung müsse benutzt werden können, um dieses magnetische Moment seiner Grösse nach zu bestimmen, und dass sich daraus wieder alle anderen Arten von diamagnetischen Wirkungen ihrer Grösse nach entweder genau oder wenigstens näherungsweise müssen vorausbestimmen lassen. Es würde also durch diese Betrachtung, wenn sie richtig ist, der Weg gebahnt sein, von bekannten diamagnetischen Erscheinungen auf unbekannte zu schliessen und dieselben ihrer Grösse nach vorauszubestimmen, so dass jeder Versuch, welcher die dadurch bedingte Feinheit nicht besitzt, sogleich im Voraus verworfen werden kann; jeder Versuch dagegen, welcher bei solcher Feinheit doch kein Resultat, oder ein ganz verschiedenes, ergäbe, zur Widerlegung der ganzen Betrachtung genügen würde. Eine gründliche Entscheidung ist nur auf diesem Wege möglich.

Diesen Weg habe ich nun in der folgenden Untersuchung einzuschlagen versucht und glaube so weit gelangt zu sein, dass die dadurch gewonnenen Resultate keinem Zweifel unterliegen, wenn auch zu wünschen bleibt, dass die quantitativen Bestimmungen künftig noch grössere Präcision erlangen. Wäre mir ein reicheres Material vergönnt gewesen, so würde ich meine Beobachtungsmittel leicht bedeutend haben verstärken und dadurch den quantitativen Bestimmungen schon jetzt einen höheren Grad von Präcision verschaffen können, welcher in jeder Beziehung wünschenswerth bleibt, auch wenn das Hauptresultat hinreichend festgestellt erscheint.

Elektrodiamagnetismus und Messung des Moments eines Elektrodiamagnets.

1.

Wie Eisenmagnete in *gewöhnliche* (deren Magnetismus vom Einfluss anderer Magnete herrührt) und in *Elektromagnete* eingetheilt werden, ebenso können auch Diamagnete in *gewöhnliche* (deren Diamagnetismus von magnetischem Einfluss herrührt) und in *Elektrodiamagnete* eingetheilt werden. Nur ist zwischen *Elektromagneten* und

Elektrodiamagneten darin ein grosser für die Beobachtung wichtiger Unterschied, dass wenn man gleiche galvanische Ströme um einen Eisenstab und einen Wismuthstab herumführt, das Eisen magnetische Kräfte in die Ferne ausübt, gegen welche die Kräfte des galvanischen Stroms fast verschwinden, während die vom Wismuth ausgeübten diamagnetischen Kräfte gegen die des galvanischen Stroms verschwinden. Hierin liegt der Grund, dass das *Vorhandensein des Elektrodiamagnetismus* schwer nachzuweisen ist. Diese Schwierigkeit kann aber überwunden werden und es ergiebt sich dann sogar, dass die Kraft eines Elektrodiamagnets sich zu wirklichen *Maassbestimmungen* weit besser eignet als die eines gewöhnlichen Diamagnets. Doch bedarf es einer besonderen Einrichtung, um *reine* Wirkungen einer solchen elektrodiamagnetischen Kraft darzustellen und den Einfluss des galvanischen Stroms dabei ganz zu beseitigen. Ich will hier nun *zuerst* die *Einrichtung* beschreiben, mit der ich die *reine* Wirkung eines *Elektrodiamagnets* dargestellt und die Grösse seiner Kraft mit der eines *Elektromagnets* verglichen habe; *sodann* werde ich die *Resultate* der damit gemachten Versuche folgen lassen.

2.

Elektrodiamagnetischer Messapparat.

Es sollte die Wirkung beobachtet werden, welche ein *Elektrodiamagnet* auf eine in einiger Entfernung davon aufgestellte *Magnetnadel* ausübt. Es ist schon oben bemerkt worden, wie klein die Wirkung sei, welche man von der von einem diamagnetischen Körper auf eine gewöhnliche Magnetnadel ausgeübten Kraft zu erwarten habe, zumal wenn diese Nadel vom Diamagnete einige Zoll entfernt ist. Je kleiner die zu erwartende Wirkung war, desto feinere Methoden der Beobachtung mussten gebraucht werden. Es wurde daher ein kleines Magnetometer angewendet, dessen Nadel 100 Millimeter lang und mit Spiegel versehen war, um nach der Gauss'schen Methode mit Fernrohr und Skala beobachtet zu werden. Es liessen sich damit Ablenkungen der Nadel von einzelnen Bogenminuten genau messen. Die Empfindlichkeit einer solchen Nadel hängt, wie bekannt, von der Grösse der horizontalen Richtkraft ab, die der Erdmagnetismus auf sie ausübt. Die Schwingungsdauer der Nadel betrug bei ungeschwächter Richtkraft des Erdmagnetismus 7,687 Sekunden; nun wurde aber diese Richtkraft, um die Empfindlichkeit zu steigern, so vermindert, dass die Schwingungsdauer auf 18,45 Sekunden wuchs, was auf sehr einfache Weise durch einen starken Magnetstab Fig. 2 [siehe S. 481] SN bewirkt wurde, welcher, mit verkehrten Polen, in der Richtung der Nadel NS in angemessener Ent-

fernung fest aufgestellt wurde. Durch eine kleine Verrückung dieses Magnetstabs konnte die Empfindlichkeit der Nadel ganz beliebig regulirt werden; doch wird durch zu grosse Empfindlichkeit die Präcision der Beobachtung leicht gefährdet. Ausserdem ergab sich, dass der oben angegebene Grad der Empfindlichkeit genügte. Uebrigens war die Nadel mit einem kupfernen Dämpfer versehen, welcher eine Abnahme der Schwingungsbögen in dem Verhältnisse von 3:2 bewirkte, oder genauer das *decrementum logarithmicum* war

$$= 0{,}178\,87.$$

Von dieser Beschreibung des magnetischen Messapparats gehen wir zur Darstellung des *Elektrodiamagnets* selbst und seiner Aufstellung über.

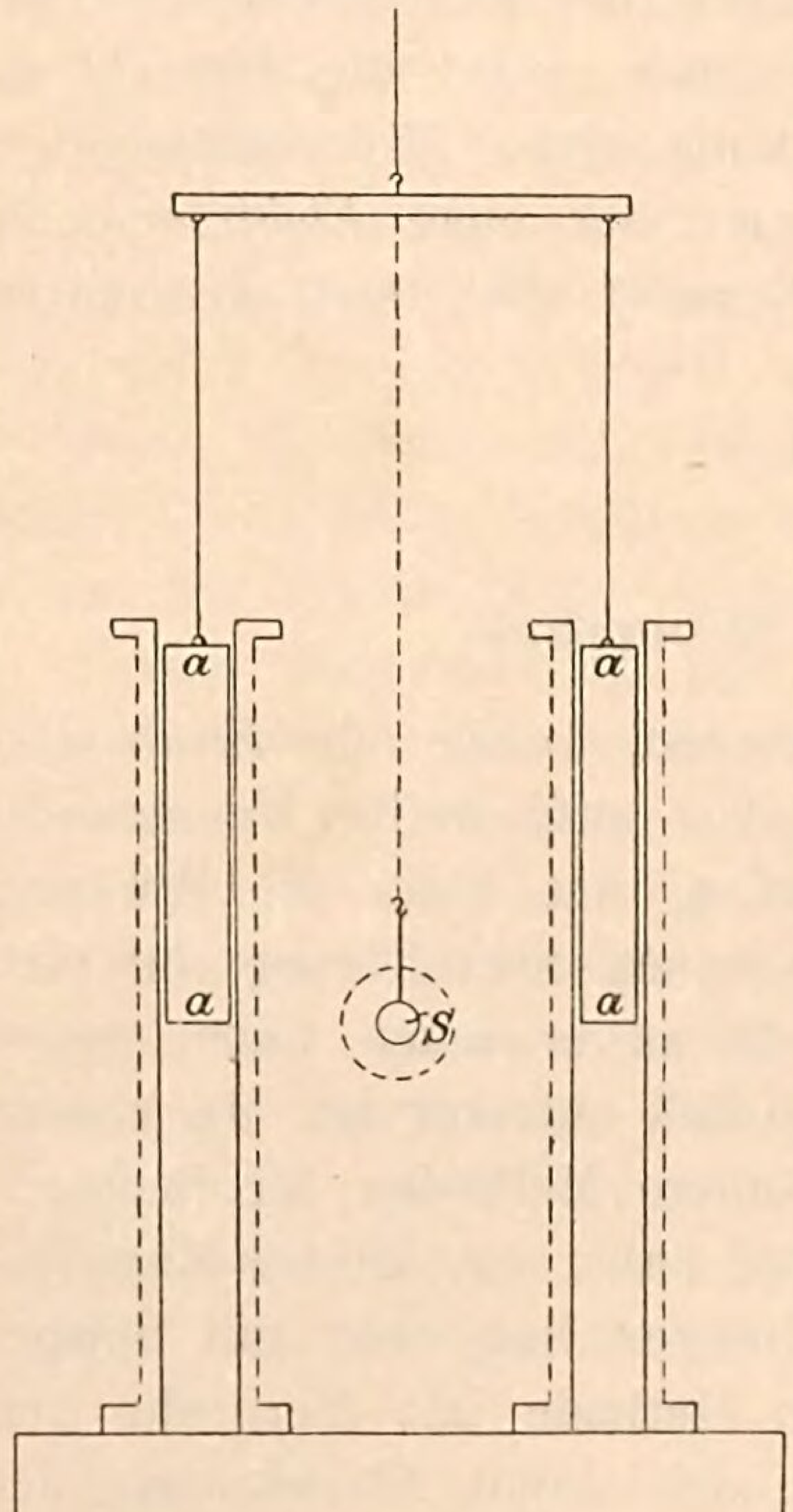


Fig. 1.

Der Elektrodiamagnet bestand *erstens* aus zwei gleichen Wismuthcylindern, 92 Millimeter lang, 16 Millimeter dick, beide zusammen 343 500 Milligramm schwer, welche, wie Fig. 1 *a a* darstellt, in vertikaler Stellung und 100 Millimeter Abstand fest mit einander verbunden waren und durch eine einfache Hebelvorrichtung höher oder tiefer gestellt werden konnten; *zweitens* aus zwei spiralförmig aufgewundenen kupfernen Leitungsdrähten. Jede dieser Spiralen war 190 Millimeter lang, hatte 17 Millimeter inneren Durchmesser und bestand aus vier Lagen, jede Lage aus 146 Umwindungen. Sie waren vertikal wie Säulen, 100 Millimeter von einander, auf einem Stative befestigt und ihre Drähte so mit einander verbunden, dass ein Strom, welcher von der einen zur anderen ging, sie in entgegengesetztem Sinne durchlief. Beide Wismuthcylinder konnten zugleich in diese beiden Spiralen herabgelassen werden und wurden dann durch den galvanischen Strom in *Elektrodiamagnete* verwandelt, deren einer seinen Nordpol nach oben, der andere nach unten kehrte. Zur Darstellung des Stroms dienten sechs Grove'sche Becher.

Diese beiden Spiralen wurden nun so aufgestellt, dass eine durch die Nadel gelegte Horizontalebene sie halbirte; das Südende *S* der Nadel schwebte genau in der Mitte zwischen beiden Spiralen. Fig. 2 stellt die gegenseitige Lage der Nadel *NS* und der beiden Spiralen

um *aa* im horizontalen Durchschnitte dar. Die beiden Wismuthcylinder wurden entweder in den Spiralen so tief herabgesenkt, dass ihr oberes Ende bis zum Niveau der Nadel herauf, oder sie wurden so hoch gehoben, dass ihr unteres Ende bis zum Niveau der Nadel herabreichte.

Die Gründe dieser Einrichtung sind folgende. Es kam *erstens* darauf an, dass der galvanische Strom, welcher durch beide Spiralen ging, gar keine Wirkung unmittelbar auf die Nadel ausübte, trotz seiner Stärke und Nähe und trotz der Empfindlichkeit der Nadel. Durch die symmetrische Stellung der beiden Spiralen halb über halb unter der Horizontalebene der Nadel wurde die Ablenkung aufgehoben; durch die gleiche Entfernung der beiden Spiralen von der Nadel und durch die entgegengesetzte Richtung ihres Stroms wurde auch die senkrechte Kraft aufgehoben, welche sonst die Nadel in vertikale Schwankung setzen würde. Da aber eine vollkommene Symmetrie dieser Verhältnisse praktisch nicht erreichbar ist, so bedurfte es noch einer besonderen Einrichtung, um die unvermeidlichen kleinen Abweichungen zu kompensiren. Dazu diente ein dritter Leitungsdraht, welcher in 18 Windungen um einen viereckigen Rahmen *M* gewunden war und in die Kette eingeschaltet wurde. Dieser Rahmen war 244 Millimeter lang, 146 Millimeter hoch und wurde vertikal in der Ebene der Nadel aufgestellt. Derselbe Strom, welcher durch die beiden Spiralen ging, übte, indem er auch diesen dritten Draht durchlief, ein Drehungsmoment auf die Nadel aus, welches durch Näherung oder Entfernung des Rahmens leicht vergrössert oder verkleinert werden konnte, bis die beabsichtigte Kompensation vollkommen erreicht war.

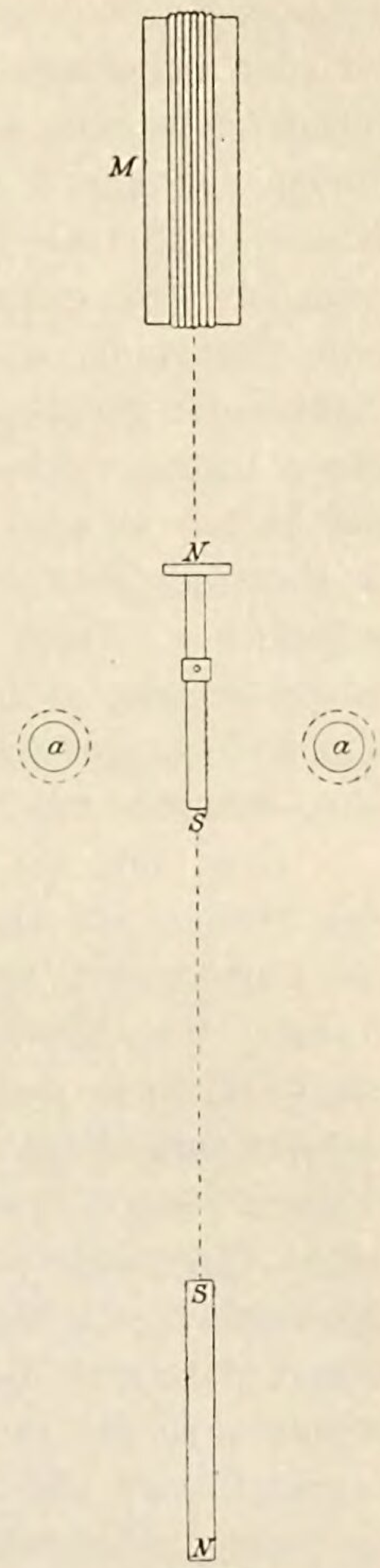


Fig. 2.

Zweitens kam es darauf an, dass die beiden Wismuthcylinder abwechselnd in die untere Stellung, wo ihre *oberen Enden* stärker auf die Nadel wirkten, und in die obere Stellung, wo ihre *unteren Enden* stärker wirkten, gebracht werden konnten, *ohne dass die Stärke ihres Diamagnetismus sich änderte und ohne dass durch diese Bewegung im Wismuth als Leiter ein Strom inducirt wurde.* Hierbei trat nun der Vorzug des *Elektrodiamagnets* vor einem *gewöhnlichen* hervor. Denn der *gewöhnliche,* durch die Nähe eines Magnetpols hervorgebrachte, Diamagnetismus ändert sich mit jeder Verrückung seines Trägers und zu-

gleich werden dabei in diesem Träger, wenn er ein Leiter ist, stets Ströme inducirt. Ganz anders verhält es sich mit einem *Elektrodiamagnete*, wo der diamagnetische Wismuthcylinder von allen Seiten von der galvanischen Spirale umschlossen ist. Ist diese Spirale gleichförmig gewunden und so lang, dass der Wismuthcylinder stets von den Enden der Spirale entfernt bleibt, so ergiebt sich die elektromagnetische Kraft der Spirale für alle Theile des Raumes, in denen der Wismuthcylinder sich befindet, nach bekannten elektromagnetischen Gesetzen, nahe konstant, und der Wismuthcylinder kann also in dem mittleren Raume der Spirale hin und her geschoben werden, ohne dass sein Diamagnetismus verändert, und ohne dass galvanische Ströme in demselben als Leiter inducirt werden. Dazu kommt noch, dass die ganze Wismuthmasse darin *gleichmässig* diamagnetisirt wird, welches bei der gewöhnlichen, durch die Nähe eines Magnetpols hervorgebrachten Diamagnetisirung nicht der Fall ist, weil hier diejenigen Theile, welche dem Pole am nächsten liegen, weit stärker werden, als die entfernteren, ein Umstand, welcher alle Maassbestimmungen verhindert.

Fand nun bei der beschriebenen Aufhebung kein direkter Einfluss des Stroms auf die Nadel Statt, und wurde in den Wismuthcylindern als Leitern bei ihrer Auf- und Abschiebung kein Strom inducirt, so musste die Ablenkung der Nadel, welche beobachtet wurde, als eine reine Wirkung der *diamagnetischen Kraft* der Wismuthstäbe betrachtet werden, und diese Ablenkung musste nach dem Gesetze der *diamagnetischen Polarität positiv* oder *negativ* sein, je nachdem die Wismuthstäbe ihre *untere* oder *obere Stellung* in den Drahtspiralen erhielten. Es ergiebt sich daraus der für die schärfere Beobachtung günstige Umstand, dass sich diese Ablenkung durch *Multiplikation* verstärken lässt, indem man die Stellung der Wismuthstäbe immer in dem Augenblicke wechselt, wo die Nadel das Ende ihres Schwingungsbogens erreicht, so lange, bis endlich durch die Wirkung des Dämpfers, womit die Nadel versehen ist, ihre Schwingungsbogen während jeder Schwingung um eben so viel abnimmt, als er durch die diamagnetische Wirkung der Wismuthstäbe zunimmt. Der zugehörige *Grenzwerth* lässt sich aus allen nach einander beobachteten Schwingungsbögen mit grosser Schärfe berechnen und kann bei bekannter Dämpfung als *Maass der Stärke des Elektrodiamagnetismus* der Wismuthstäbe dienen.

Setzt man alsdann für die Wismuthstäbe einen *Eisencylinder* von gleicher Länge und wiederholt damit die nämlichen Versuche, so gelangt man zu einer *Vergleichung der Stärke eines Elektrodiamagnets mit der eines Elektromagnets.* Nur leuchtet ein, dass man bei der grossen Empfindlichkeit des Apparats die Wirkung des Elektromagnets dadurch möglichst schwächen muss, dass man einen sehr *dünnen* Eisen-

stab gebraucht. Bei den folgenden Versuchen war der Eisenstab so dünn, dass sein Gewicht nur den 59200. Theil von dem Gewichte der beiden Wismuthstäbe betrug, und auch dann ergab sich seine Wirkung noch viel stärker, als die der beiden Wismuthstäbe zusammen.

Endlich kam es *drittens* bei diesen Versuchen hauptsächlich noch darauf an, die *Richtung* der Ablenkung für jede Stellung der Wismuthstäbe zu bestimmen und mit der Richtung zu vergleichen, welche die Ablenkung bei gleicher Stellung des Eisenstäbchens hatte. Es wurde daher die Stellung der Stäbe für jede Schwingungsdauer bei den Beobachtungen bemerkt. Es ergab sich stets, wie die folgenden Versuche zeigen, dass die Ablenkung der Nadel, bei gleicher Stellung der Wismuth- und Eisenstäbe, *in entgegengesetzter Richtung* erfolgte, dass also, wie für *gewöhnliche Diamagnete* aus anderen Wirkungen schon bekannt ist, auch bei *Elektrodiamagneten* das nördliche und südliche magnetische Fluidum, unter gleichen Stromverhältnissen, auf *entgegengesetzte Weise* wie bei *Elektromagneten* vertheilt gedacht werden muss, was eben durch diese Versuche bewiesen werden sollte.

3.

Versuche und Messungen.

Die mit dem beschriebenen Apparate angestellten Versuche und Messungen sind von verschiedenen Beobachtern gemacht worden, um die Unsicherheit zu beseitigen, der bei so schwachen Wirkungen ein einzelner Beobachter leichter ausgesetzt erscheinen könnte. Ausser mir haben folgende Herren die Güte gehabt, dieselben Messungen an verschiedenen Tagen zu wiederholen, nämlich Professor Listing, Professor Sartorius von Waltershausen, Dr. von Quintus Icilius und Dr. Riemann. Ich werde beispielsweise statt des Protokolls meiner eigenen Messungen das Protokoll der von Herrn Professor Listing sehr sorgfältig gemachten Messungen hier vollständig mittheilen, indem ich nur bemerke, dass die meinigen sowohl wie alle anderen sämmtlich damit nahe übereinstimmen.

Göttingen 1851. Juni 21.

Beobachter: Herr Professor Listing.

Galvanischer Strom von sechs Grove'schen Platin-Zinkbechern.

1. *Versuche mit den beiden Wismuthstäben.*

No. der Schwingung	Stellung der Stäbe	Stand der Nadel am Anfange oder Ende jeder Schwingung	Ruhestand der Nadel	Schwingungsbogen der Nadel
		500,0		
1.	oben	467,0	487,6	— 40,0
2.	unten	513,9	488,3	— 50,4
3.	oben	459,9	488,3	— 56,3
4.	unten	518,5	489,2	— 58,5
5.	oben	460,0	487,3	— 55,2
6.	unten	512,0	489,3	— 46,5
7.	oben	471,1	484,9	∓ 29,7
8.	oben	489,7	487,3	± 7,0
9.	unten	494,2	489,3	— 8,9
10.	oben	480,9	488,9	— 15,6
11.	unten	498,9	482,7	— 30,0
12.	oben	457,0	483,1	— 50,4
13.	unten	516,0	487,2	— 57,8
14.	oben	459,3	484,2	— 50,9
15.	unten	504,4	487,6	∓ 35,6
16.	unten	478,3	483,1	± 12,4
17.	oben	476,9	485,6	— 14,7
18.	unten	504,9	485,7	— 36,6
19.	oben	459,6	480,6	— 42,6
20.	unten	499,4	479,6	— 39,6
21.	oben	460,1	484,1	— 46,6
22.	unten	513,9	488,2	— 51,7
23.	oben	464,2	486,8	— 45,9
24.	unten	506,2	480,0	— 50,6
25.	oben	446,9	474,1	— 55,2
26.	unten	498,0	476,4	∓ 44,5
27.	unten	460,0	465,6	± 15,5
28.	oben	453,1	462,5	— 16,8
29.	unten	479,8	464,6	— 29,8
30.	oben	446,9	467,8	— 40,3
31.	unten	494,6	471,8	— 46,0
32.	oben	450,4	471,3	— 42,2
33.	unten	490,5	468,2	— 44,0
34.	oben	442,6		

2. *Versuche mit einem Eisenstäbchen.*

Um bei der Empfindlichkeit der Nadel die Wirkung des Eisens zu vermindern, wurde nur ein einfaches Stäbchen gebraucht und damit zwei Versuchsreihen gemacht, wobei das Stäbchen erst in der einen,

dann in der anderen Spirale auf- und abgeschoben wurde. Das Eisenstäbchen wog, bei gleicher Länge mit den Wismuthstäbchen, nur 5,8 Milligramm, d. i. 59200 Mal weniger als die beiden Wismuthstäbe zusammen. Dennoch war die Wirkung so stark, dass die Ablenkung nur *ohne Multiplikation* einfach gemessen werden konnte.

No.	*Erste Reihe*			
	Stellung des Eisenstäbchens	Elongationen der Nadel	Ruhestand der Nadel	Mittel
1.	unten	428,1 215,2 362,8 261,0	300,4 303,8 301,7	302,0
2.	oben	451,2 652,0 515,0 609,9 544,4	571,7 569,8 571,9 570,6	571,0
3.	unten	435,5 206,7 364,7 254,6 336,9	298,2 301,5 298,6 304,0	300,6
4.	oben	503,2 598,0 536,9	560,1 561,3	560,7

No.	*Zweite Reihe*			
	Stellung des Eisenstäbchens	Elongationen der Nadel	Ruhestand der Nadel	Mittel
1.	oben	524,0 590,5 549,3	563,9 565,8	564,9
2.	unten	227,4 387,1 275,4 357,9	323,2 320,1 324,9	322,7
3.	oben	450,9 661,8 525,3 600,0	577,4 579,9 570,1	575,8
4.	unten	217,8 392,2 270,0 349,4	322,4 318,9 317,6	319,6
5.	oben	439,7 638,8 495,8 595,0	559,2 553,0 555,3	555,8

Es ist hierbei noch zu bemerken, dass die Intensität des von sechs GROVE'-schen Bechern hervorgebrachten Stroms mit einer Tangentenboussole, deren Ring 211 Millimeter Durchmesser hatte, gemessen wurde. Der Strom lenkte die Boussole um $28^0\ 21'$ ab, wonach die Intensität des Stroms (den horizontalen Theil der erdmagnetischen Kraft $= 1{,}8$ gesetzt) gefunden wird

$$= 105{,}5 \cdot \frac{1{,}8}{2\pi} \cdot \operatorname{tang} 28^0\ 21' = 16{,}31.$$

4.

Berechnung der Versuche.

In der Tafel der mit den beiden *Wismuthstäben* gemachten Versuche sind die Nadelstände, wie sie am Anfange und Ende jeder Schwingung beobachtet worden sind, in der *dritten* Kolumne angegeben. Aus je drei von diesen unmittelbar beobachteten Nadelständen sind in der *vierten* und *fünften* Kolumne der entsprechende Ruhestand und Schwingungsbogen mit Rücksicht auf die Dämpfung berechnet. Ein *positives* Vorzeichen vor dem Schwingungsbogen bedeutet, dass die Nadel bei der *oberen Stellung* der Wismuthstäbe von kleineren auf grössere, oder bei der *unteren Stellung* von grösseren auf kleinere Skalentheile ging; das Umgekehrte gilt für das *negative* Vorzeichen. Nachdem die Stellung der Wismuthstäbe mehrmals regelmässig am Ende jeder Schwingung gewechselt worden war und der Schwingungsbogen seinen Grenzwerth fast erreicht hatte, wurde eine Unterbrechung dadurch hervorgebracht, dass die Stellung der Wismuthstäbe während zweier Schwingungen unverändert gelassen, darauf aber wieder regelmässig gewechselt wurde. Der *negative* Schwingungsbogen wurde dadurch in einen *positiven* verwandelt, der aber schnell bis auf Null abnahm und sehr bald wieder in einen *negativen* überging, wodurch die Richtung der von den Wismuthstäben hervorgebrachten Ablenkung am augenscheinlichsten hervortrat. — Zählt man die Schwingungsbögen von demjenigen an, welcher der Null am nächsten ist, so lassen sich die beobachteten dem Grenzwerthe am nächsten kommenden Werthe mit Hülfe des bekannten *decrementum logarithmicum* leicht auf den *Grenzwerth* reduciren, und daraus ein genauerer Mittelwerth des letzteren finden. In dem vorliegenden Falle, wo das *decrementum logarithmicum* nahe $= \log \frac{3}{2}$ war, genügt es, den Werth des nten Schwingungsbogens mit $(1 - (\frac{2}{3})^n)$ zu dividiren, oder genauer, weil das *decrementum logarithmicum* $= 0{,}17887$ war, mit $(1 - 0{,}6624^n)$. Hiernach ergeben sich folgende reducirte Werthe.

No.	beobachtet	reducirt	Mittel
1.	— 40,0	— 63,4	
2.	— 50,4	— 66,6	
3.	— 56,3	— 67,1	— 61,8
4.	— 58,5	— 65,5	
5.	— 55,2	— 59,4	
6.	— 46,5	— 48,8	
11.	— 30,0	— 47,5	
12.	— 50,4	— 66,6	— 59,8
13.	— 57,8	— 68,5	
14.	— 50,9	— 56,8	
19.	— 42,6	— 67,5	
20.	— 39,6	— 52,3	
21.	— 46,6	— 55,5	
22.	— 51,7	— 57,9	— 56,1
23.	— 45,9	— 49,4	
24.	— 50,6	— 53,1	
25.	— 55,2	— 57,0	
30.	— 40,3	— 63,9	
31.	— 46,0	— 60,2	— 55,8
32.	— 42,2	— 50,0	
33.	— 44,0	— 49,3	

Aus allen Beobachtungen zusammen ergiebt sich also der gesuchte Grenzwerth

$$x = -58{,}4.$$

Das *negative* Vorzeichen bedeutet, dass die Nadel bei der *unteren Stellung* der Wismuthstäbe auf *grössere*, bei der *oberen* auf *kleinere* Skalentheile getrieben wurde. Bei diesen nach der *Methode der Multiplikation* gemachten Versuchen ergiebt sich nun ferner aus dem gefundenen *Grenzwerthe* der Schwingungsbögen $= x$, nach der in der vorigen Abhandlung (in diesem Bande S. 440) von mir gegebenen Regel, *die dem Gleichgewichte der Nadel entsprechende Ablenkung* E

$$E = \frac{x}{2} \cdot \frac{1 - e^{-\lambda}}{1 + e^{-\lambda}},$$

worin $\log e^{\lambda}$ das logarithmische Dekrement bezeichnet, also $\log e^{\lambda} = 0{,}17887$ ist. Hieraus ergiebt sich *die dem Gleichgewichte der Nadel entsprechende Ablenkung*

$$E = -5{,}93.$$

Aus den mit dem *Eisenstäbchen* ohne Multiplikation gemachten Versuchen haben sich abwechselnd für die *obere* und für die *untere* Stellung folgende Ruhestände der Nadel ergeben:

	erste Reihe	zweite Reihe
oben	—	564,9
unten	302,0	322,7
oben	571,0	575,8
unten	300,6	319,6
oben	560,7	555,8

Hieraus ergeben sich unmittelbar die Werthe der Ablenkung E:

erste Reihe	zweite Reihe
+ 134,50	+ 121,10
+ 135,20	+ 126,55
+ 130,05	+ 128,10
	+ 118,10

also im Mittel aus beiden Reihen die Ablenkung

$$E' = + 128,4.$$

Das *positive* Vorzeichen bedeutet, dass die Nadel bei der *unteren Stellung* des Eisenstäbchens auf *kleinere,* bei der *oberen* auf *grössere* Skalentheile getrieben wurde, d. i. *gerade umgekehrt wie bei den Wismuthstäben.*

Das *Moment* des *Magnetismus* des Eisenstäbchens verhält sich hiernach zum Momente des *Diamagnetismus* der beiden Wismuthstäbe, wie

$$+ 128,4 : - 5,93,$$

d. h. das Moment des Eisens ist dem 21,7 fachen des Wismuths entgegengesetzt gleich, ungeachtet die Masse des Eisens 59 200 Mal kleiner war. Hiernach würde also, auf gleiche Massen reducirt, der *Diamagnetismus des Wismuths* 1 285 000 Mal kleiner zu setzen sein, als der *Magnetismus des Eisens.*

Aus einer eben solchen von Herrn Professor Sartorius von Waltershausen ausgeführten Versuchsreihe hatte sich der *Grenzwerth*

$$x = - 48,2,$$

aus einer dritten von Herrn Dr. von Quintus Icilius gemachten,

$$x = - 47,3,$$

aus einer vierten von Herrn Dr. Riemann gemachten,

$$x = - 45,0,$$

aus der von mir gemachten

$$x = - 55,8$$

ergeben. Im Mittel aus allen diesen Versuchen ist also

$$x = - 50,9,$$
$$E = - 5,17,$$

und hiernach ist der *Diamagnetismus* des Wismuths 1470000 Mal kleiner zu setzen, als der Magnetismus des Eisens.

Die obigen Versuche genügen, um dadurch den *Elektrodiamagnetismus* des Wismuths nachzuweisen. Die für seine *Stärke* daraus abgeleitete Bestimmung kann nun zwar, wie man leicht übersieht, nur als eine ungefähre betrachtet werden; es reicht aber eine solche ungefähre Bestimmung hin, um als ein fester Stützpunkt bei der folgenden Untersuchung über *diamagnetische Induktion galvanischer Ströme* gebraucht zu werden.

5.

Bequemste Einrichtung zur Beobachtung der diamagnetischen Polarität.

Die vorhergehenden Versuche beweisen dreierlei:

erstens, dass bei der Darstellung von Diamagneten, ebenso wie bei der Darstellung von Magneten, die rein magnetischen Kräfte durch *elektromagnetische Kräfte* galvanischer Ströme ersetzt werden können;

zweitens, dass an einem seiner Länge nach gleichförmig diamagnetisirten Wismuthstabe, wie er durch die elektromagnetische Kraft einer galvanischen Spirale, in die er gelegt wird, dargestellt werden kann, die *diamagnetische Polarität* deutlich und sicher beobachtet wird, indem er auf eine Magnetnadel *entgegengesetzte Drehungskräfte* ausübt, je nachdem er ihr mit seinem einen oder mit seinem anderen Ende genähert wird, — gerade so wie die *magnetische Polarität* an einem durch denselben Strom magnetisirten Eisenstabe;

drittens, dass sich endlich unter den angegebenen Verhältnissen die von dem diamagnetisirten Wismuthstabe auf eine Magnetnadel ausgeübte Drehungskraft sowohl ihrer Richtung als Grösse nach bestimmen und mit der Richtung und Grösse der von einem durch dieselben Kräfte magnetisirten Eisenstabe auf dieselbe Magnetnadel ausgeübten Drehungskraft vergleichen lässt, woraus sich die *Richtung* der Drehungskraft stets *entgegengesetzt* ergiebt, während die Bestimmung der *Grösse* zu einer *Vergleichung sich entsprechender magnetischer und diamagnetischer Momente* führt.

Alle diese Versuche lassen sich mit geringen Hülfsmitteln, wenn sie zweckmässig verwendet werden, ausführen, was um so mehr Beachtung verdient, als, nach der in der Einleitung gemachten Bemerkung, die Kräfte, um die es sich hierbei handelt, ausserordentlich klein sind, und man daher gefasst sein musste, dass die Beobachtung deutlich wahrnehmbarer Wirkungen dieser kleinen Kräfte die Anwendung sehr starker Mittel fordern würde, was in der That aber nicht der Fall ist. Denn

eine Grove'sche oder Bunsen'sche Säule von sechs bis acht Bechern und ein Paar Pfund Kupferdraht von angemessener Stärke sind Gegenstände, die zu vielen anderen Versuchen gebraucht werden, und ausserdem bedarf es blos noch einer kleinen Magnetnadel, die mit einem Spiegel versehen ist, um wie beim Magnetometer mit einem Fernrohre (wozu ein Sextantenfernrohr genügt) beobachtet zu werden.

Um die Ausführung dieser für die Begründung der Lehre vom Diamagnetismus besonders wichtigen Versuchen möglichst zu erleichtern, namentlich die auf die Aufstellung des Apparats zu verwendende Mühe zu vermindern, habe ich folgende Einrichtung getroffen, welche zur

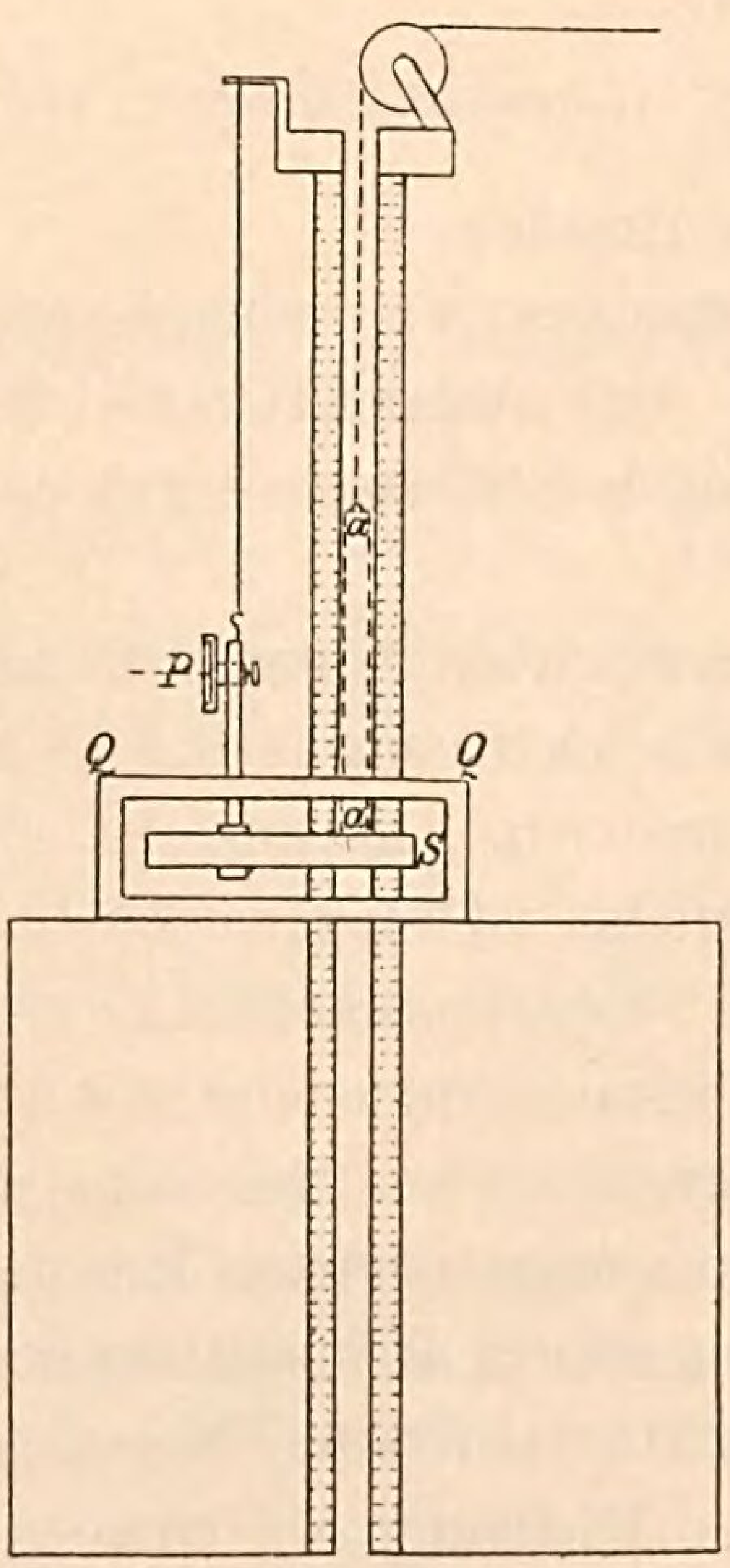


Fig. 4

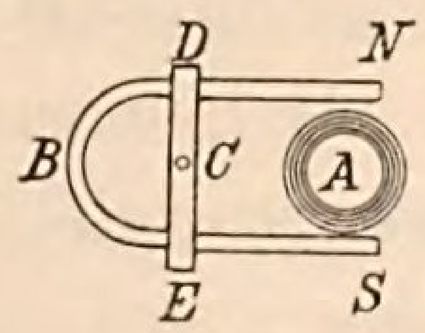


Fig. 3.

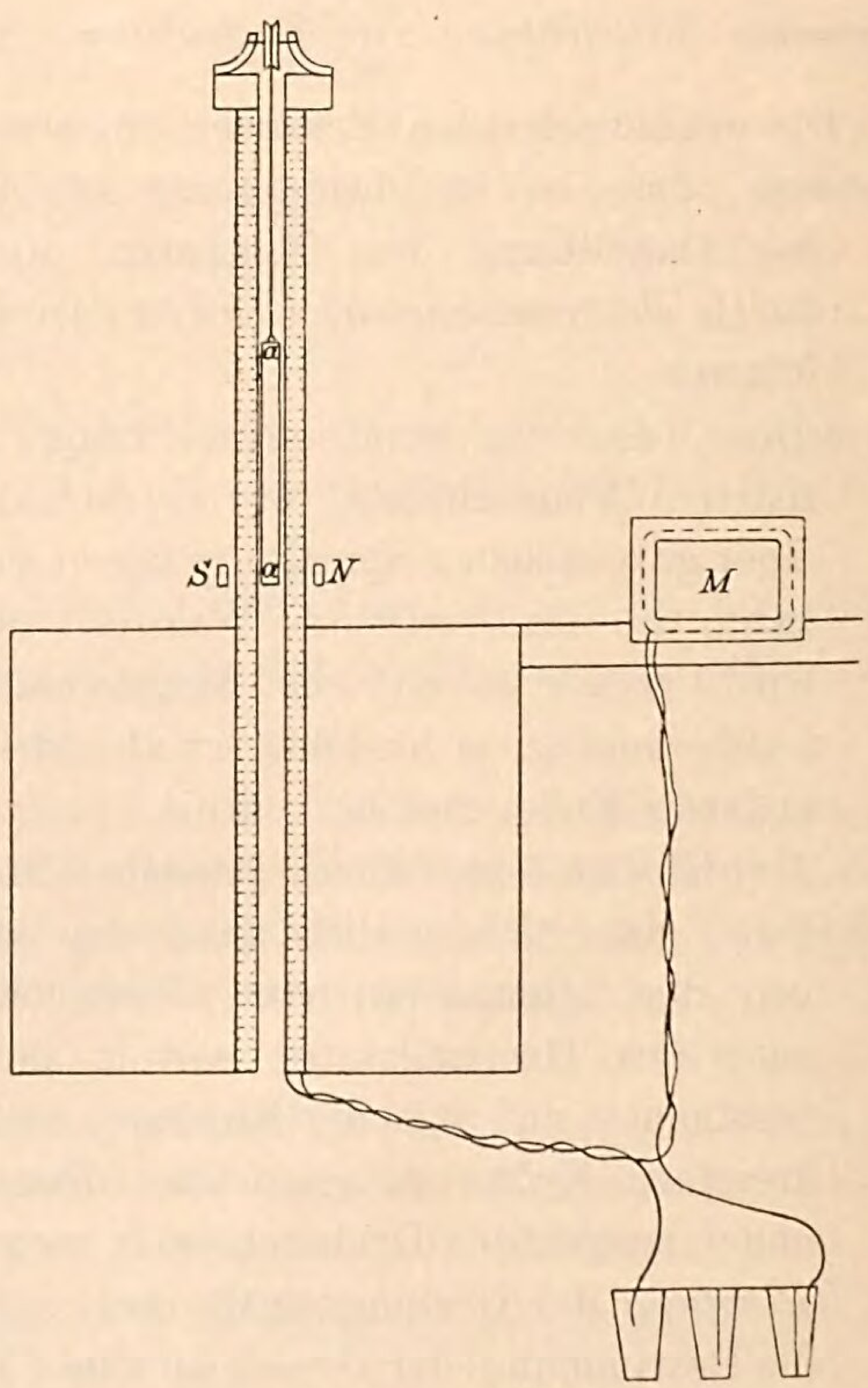


Fig. 5.

Wiederholung der Versuche als die bequemste empfohlen werden kann. Sie besteht wesentlich darin, dass, statt zweier galvanischen Spiralen, welche bei obigen Versuchen (Art. 2) vertikal so aufgestellt wurden, dass der eine Pol einer *geraden* Magnetnadel symmetrisch zwischen ihnen lag, nur *eine* solche Spirale gebraucht wird, welche symmetrisch mitten zwischen den beiden Polen einer *hufeisenförmig* gebogenen Magnetnadel aufgestellt wird. Fig. 3 stellt A den Querschnitt dieser

Spirale dar, welcher symmetrisch zwischen den Polen *N*, *S* der hufeisenförmig gekrümmten Magnetnadel *NBS* liegt. Diese Magnetnadel wird von der Klemme *DE* gehalten, in deren Mitte *C* der Aufhängungsfaden befestigt ist. Fig. 4 und 5 stellt das Instrument in zwei Seitenansichten dar. Es ist vortheilhaft, der Spirale eine beträchtliche Länge zu geben, z. B. von 400 bis 500 Millimeter, wodurch es leichter wird, die Aufhängung der Nadel so zu reguliren, dass sie in der die Länge der Spirale halbirenden Horizontalebene schwebt, wo dann der durch die Spirale gehende Strom auf die Nadel kein Drehungsmoment ausübt. Sollte aber auch ein kleines Drehungsmoment vorhanden sein, so lässt sich dies leicht auf die Art. 2 schon angegebene Weise durch einen aus wenigen Windungen bestehenden Multiplikator Fig. 5 *M* kompensiren, indem man denselben Strom hindurchleitet und ihn der Magnetnadel nähert. Zur Beobachtung der Magnetnadel ist es nothwendig, sie mit einem Spiegel Fig. 4 *P* zu versehen und darin mit einem Fernrohre das Spiegelbild einer entfernten Skala zu beobachten. Die Magnetnadel wird ausserdem mit .einem Dämpfer Fig. 4 *QQ* umgeben. Der Wismuthstab *aa* Fig. 4 und 5 wird an einem Faden vertikal in der Spirale aufgehangen; er kann gehoben oder gesenkt werden, so dass entweder, wie Fig. 4 und 5 darstellt, sein unteres Ende zwischen den beiden Polen der Magnetnadel zu liegen kommt, oder sein oberes Ende. Die Beobachtungen lassen sich am bequemsten machen, wenn durch Rollen oder durch eine einfache Hebelvorrichtung die Einrichtung getroffen wird, dass der Beobachter am Fernrohre selbst durch Hebung oder Senkung des Fusses die Senkung oder Hebung des Wismuthstabs bewirken kann. Ist der Strom geschlossen und die Magnetnadel ganz in Ruhe, so hebt man den Wismuthstab und beobachtet darauf eine kleine Bewegung der Nadel. Sobald dann die Nadel ihre grösste Elongation erreicht hat, wird der Wismuthstab wieder gesenkt, und die Magnetnadel bewegt sich dann schon mit grösserer Geschwindigkeit zurück. Hat sie die grösste Elongation nach dieser Seite erreicht, so wird der Wismuthstab wieder gehoben u. s. w. Zwischen je zwei Elongationen bemerkt man die Stellung, welche der Wismuthstab während der dazwischen verflossenen Zeit gehabt hat. Vertauscht man den Wismuthstab mit einem gleich langen aber sehr dünnen Eisendrahte, so kann man sich überzeugen, dass bei gleicher Stellung des Eisendrahts die Ablenkung der Nadel in entgegengesetzter Richtung geschieht, wie beim Wismuthstabe.

Diamagnetelektricität und Messung der diamagnetisch inducirten elektrischen Ströme.

6.

Die Versuche über *diamagnetelektrische Induktion* bieten, wie man leicht übersehen kann, wegen ihrer grösseren Feinheit der Beobachtung mehr Schwierigkeit dar, als die vorhergehenden Versuche über den *Elektrodiamagnetismus*, und es bedarf einer besonderen Kunst in der Einrichtung und Anordnung der Versuche, um mit einem Aufwande von mässigen Hülfsmitteln hier wirklich zum Ziele zu gelangen. Die folgenden Versuche werden zeigen, wie dies dennoch möglich ist, und wenn die mit Hülfe solcher Mittel dargestellten Wirkungen auch nur klein sind, so zeigen sie doch eine solche Uebereinstimmung, dass bei einiger Beachtung der Verhältnisse kaum etwas zu wünschen übrig bleibt, wenn es sich blos darum handelt, das Faktum der *diamagnetischen Induktion* zu begründen und vor Täuschungen durch fremdartige Einflüsse sicher zu stellen. Die dargestellten Wirkungen können sogar, wie man sehen wird, zu *quantitativen* Bestimmungen über die *Stärke* der diamagnetischen Induktion gebraucht werden, die sich zu solchen Prüfungen benutzen lassen, zu welchen ein geringerer Grad von Genauigkeit genügt. Nur der Wunsch, diesen quantitativen Bestimmungen die für einige besondere Untersuchungen nothwendige grössere Präcision zu geben, wird es künftig nöthig machen, grössere Mittel in Anwendung zu bringen. Ich werde die Beschreibung des hier gebrauchten diamagnetischen Induktionsapparats vorausschicken und darauf die der damit ausgeführten Versuche folgen lassen.

7.

Beschreibung des diamagnetischen Induktionsapparats.

Ich werde hier einen anderen diamagnetischen Induktionsapparat beschreiben, als derjenige war, mit dem ich früher (Berichte 1847 und POGGENDORFF's Annalen 1848, Bd. 73[1]) eine schwache Spur von einer diamagnetischen Induktion beobachtet habe, der aber nicht ganz die zu diesen Versuchen wünschenswerthe Feinheit und Genauigkeit besass. Jener Apparat war im Wesentlichen derselbe, dessen sich später FARADAY bediente und in den *Philos. Transact.* 1850, *P. I* beschrieb, mit dem ihm aber die Beobachtung der diamagnetischen Induktion nicht gelungen ist, wiewohl er viele andere interessante Anwendungen davon gemacht hat. Der Grund dieses verschiedenen Erfolgs ist wohl in den von mir

[1] [WILHELM WEBER's Werke, Bd. III, p. 255.]

gebrauchten feineren galvanometrischen Mitteln zu suchen; denn auch ich würde, wie Faraday, ohne die Anwendung eines Galvanometers, dessen Nadel nach Art des Gauss'schen Magnetometers mit Spiegel und Fernrohr beobachtet wird, gar keine Spur einer solchen diamagnetischen Induktion zu beobachten im Stande gewesen sein. Indessen können auch die von mir mit jenem Apparate gemachten Versuche nicht als genügend betrachtet werden, weil dabei die an sich schwachen Wirkungen mit anderen Wirkungen verbunden erscheinen, von denen sie schwer geschieden werden können. Auch gestatten dabei die Verhältnisse keine *quantitative Kontrole.* Der hier zu beschreibende Induktionsapparat unterscheidet sich von dem früheren wesentlich dadurch, dass

1. ein *Elektrodiamagnet*, statt eines gewöhnlichen, zur Induktion benutzt wird, dessen Moment durch die vorhergegangene Untersuchung seiner Grösse nach wenigstens näherungsweise bekannt ist, wonach das Verhältniss der inducirenden Wirkung des Apparats bei Anwendung eines Wismuthstabs im Vergleiche zu der bei Anwendung eines Eisenstabs vorausgesagt werden kann;

2. dadurch, dass die Induktion durch *blosse Bewegung* des diamagnetischen Körpers in einer ruhenden Drahtspirale hervorgebracht wird, indem der Diamagnetismus *unverändert* bleibt, wodurch vermieden wird, dass in dem Wismuth, als Leiter, galvanische Ströme inducirt werden, welche sonst leicht mit den diamagnetisch inducirten Strömen verwechselt werden könnten.

Der zur Induktion benutzte Elektrodiamagnet.

Der zur Induktion benutzte *Elektrodiamagnet* bestand aus einem Wismuthstabe in einer langen Drahtspirale, *cccc* Fig. 6 *A*, durch welche der Strom von acht Bunsen'schen Kohlenzinkbechern geleitet wurde. Der Wismuthstab war 186 Millimeter lang und wog 339 300 Milligramm. Die Drahtspirale bestand aus Kupferdraht, welcher mit Wolle übersponnen und ausserdem noch durch eine Guttaperchadecke isolirt war. Der reine Kupferdraht war 2,3 Millimeter dick, der aufgewundene Draht bildete acht Lagen über einander, jede zu 120 Umwindungen. Die ganze Spirale war 383 Millimeter lang und hatte 23,9 Millimeter inneren und 70 Millimeter äusseren Durchmesser.

Die Induktionsspirale.

Die Induktionsspirale *bbbb* Fig. 6 *A* ist diejenige Spirale, in welcher durch die Bewegung des *Elektrodiamagnets* ein Strom inducirt werden soll. Diese Spirale muss von der zum Elektrodiamagnet selbst gehörigen, durch welche der Strom der galvanischen Säule geht, sorg-

fältig isolirt und, zum Zwecke der Beobachtung des inducirten Stroms, mit dem Multiplikator eines Galvanometers verbunden werden. Diese Spirale bestand aus einem 1 Millimeter dicken, mit Seide übersponnenen Kupferdrahte, welcher drei Lagen übereinander, jede von 294 Umwindungen, bildete. Die Länge war 383 Millimeter, der innere Durch-

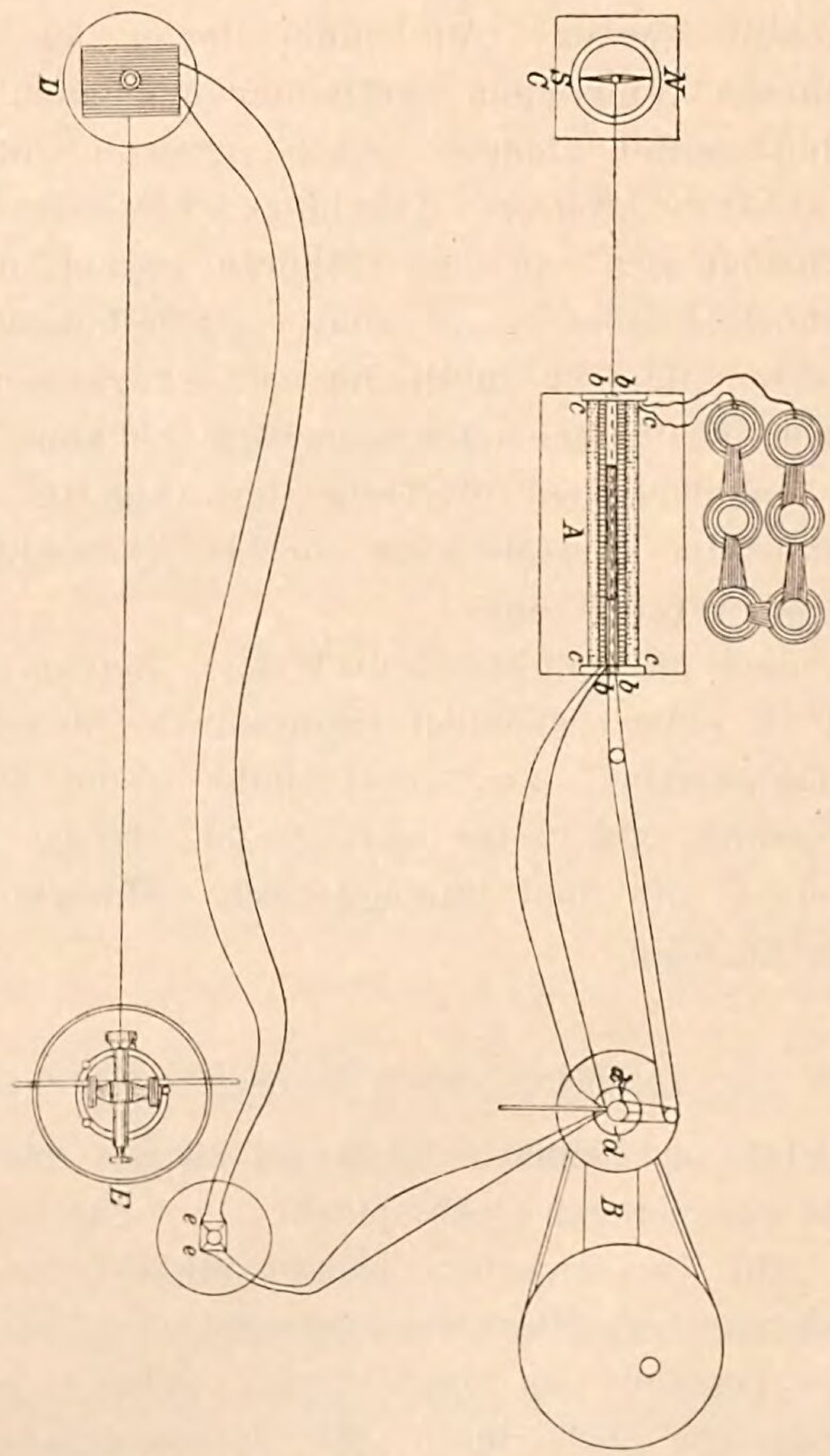


Fig. 6.

messer 19, der äussere 23 Millimeter. Nachdem sie, zur besseren Isolirung, noch mit dünnem Guttapercha umwickelt war, war sie fest in die weitere Röhre der zum Elektrodiamagnet gehörigen Spirale eingeschlossen, oder vielmehr die letztere Spirale wurde darum gewunden.

Der wesentlichste Punkt, der bei dieser Spirale in Betracht kommt, ist der, dass sie ihrer Länge nach in zwei ganz symmetrische und symmetrisch gewundene Hälften zerfällt. Das heisst, der Draht ist nicht der ganzen Länge nach gleichförmig in derselben Richtung fortgewunden, sondern die Spirale zerfällt ihrer Länge nach in zwei Hälften, in denen

der Draht entgegengesetzt gewunden ist. Es ist dieses nothwendig, wenn durch die Bewegung eines diamagnetischen Wismuth- oder eines magnetischen Eisenstabs in dieser Spirale ein Strom inducirt werden soll, welcher mit dem damit verbundenen Galvanometer beobachtet werden könne; denn wird dieser inducirende Stab in die Mitte der Spirale gelegt und darauf bewegt, so ist die von seinem nördlichen Ende in der einen Hälfte der Spirale ausgeübte Induktionskraft der von seinem südlichen Ende in der anderen Hälfte ausgeübten gerade entgegengesetzt, und die Wirkung beider würde sich aufheben, wenn beide Hälften der Spirale in gleichem Sinne gewunden wären. Durch ihre entgegengesetzte Windung wird bewirkt, dass die beiden Induktionskräfte einander nicht aufheben, sondern verdoppeln.

Diese zum Zwecke der Induktion nothwendige Einrichtung gewährt ausserdem zugleich noch einen für die praktische Ausführung der Versuche wichtigen Vortheil. Es leuchtet nämlich ein, dass der Strom der galvanischen Säule in der Spirale des Elektrodiamagnets zwar, so lange er *konstant* ist, keine inducirende Kraft auf die Induktionsspirale ausüben könne, gegen welche er eine feste, unveränderliche Lage hat; durch die geringste *Aenderung seiner Intensität* würde aber in der Induktionsspirale ein Strom hervorgebracht werden, welcher viel stärker wäre, als der diamagnetisch inducirte Strom, und die Beobachtung des letzteren stören würde. Nun leuchtet aber ein, dass dieselbe Einrichtung der Induktionsspirale, durch welche bewirkt wird, dass die diamagnetische Induktion in beiden Hälften dieser Spirale sich verdoppelt, zugleich eine Aufhebung der von dem Strome der galvanischen Säule in der äusseren Spirale auf beide Hälften der Induktionsspirale ausgeübten Induktionskräfte bewirkt, so dass, wenn nur die Symmetrie beider Hälften vollkommen ist, auch die grössten Intensitätsänderungen des Stroms der galvanischen Säule gar keinen Einfluss haben. Dazu kommt noch, 1. dass es sehr leicht zu prüfen ist, ob diese Aufhebung genau vorhanden ist, indem man, statt kleine Aenderungen hervorzubringen, den ganzen Strom löst oder kommutirt; 2. dass, wenn es sich findet, dass diese Aufhebung nicht vollkommen ist, es sehr leicht dahin gebracht werden kann, blos dadurch, dass das eine Drahtende der Induktionsspirale noch ein oder einige Male um die Spirale, durch die der Strom der galvanischen Säule geht, herumgewunden wird. Es ist auf diese Weise leicht, die Wirkungen der diamagnetischen Induktion von allen fremdartigen Einflüssen zu befreien.

Die übrigen Theile des Induktionsapparats.

Ueber die Einrichtung der übrigen Theile des Induktionsapparats, welche mehr oder weniger der Willkür des Beobachters überlassen

bleibt, füge ich nur folgende Bemerkungen bei. Um den Wismuthstab in der Induktionsspirale hin und her zu schieben, verbinde ich denselben mit der Kurbel eines Rads Fig. 6 *B*; damit ferner der in der Induktionsspirale bei der Zurückschiebung des Wismuthstabs inducirte Strom im Galvanometer dieselbe Richtung habe, wie bei der Hinschiebung, so ist am Rade ein *Kommutator dd* angebracht, *welcher sich mit dem Rade dreht*, und durch welchen bei jeder halben Umdrehung des Rads (in dem Augenblicke, wo der Wismuthstab den Anfangs- oder Endpunkt seiner Bahn erreicht) die Verbindung der Drahtenden der Induktionsspirale mit denen des Multiplikators des Galvanometers gewechselt wird. Die hiernach immer gleiche Richtung, in welcher alle inducirten Ströme durch den Multiplikator des Galvanometers gehen, würde die Nadel immer nach derselben Seite ablenken. Um nun den Beobachter in den Stand zu setzen, auch eine Ablenkung der Nadel nach der anderen Seite hervorzubringen, ist neben dem Beobachtungsfernrohre Fig. 6 *E* noch ein zweiter Kommutator *ee* aufgestellt, welcher nur von dem Beobachter selbst gewechselt wird. Dieser Kommutator heisse der *Hülfskommutator*; er verbindet die beiden Drahtenden des Multiplikators mit den Enden der beiden vom *rotirenden Kommutator* kommenden Leitungsdrähte. Uebrigens ist besondere Aufmerksamkeit noch auf folgende zwei Punkte zu wenden: 1. dass man die Induktion mehr durch die Beschleunigung der Drehung des Rads zu verstärken sucht, als durch die Grösse der Bahn, in welcher man den Wismuthstab hin und her schiebt. In den folgenden Versuchen wurde der Wismuthstab in einer nur 58,2 Millimeter langen Bahn hin und her geschoben, diese Bahn durchlief er aber in jeder Sekunde 10,58 Mal. Durch eine grössere Schiebung würde wenigstens ein Theil des Wismuthstabs sich dem Ende der Spirale, durch welche der Strom der galvanischen Säule ging, genähert haben, wo nicht allein die Stärke seines Diamagnetismus geändert, sondern auch in ihm, als Leiter, ein Strom inducirt worden sein würde, der einen sekundär inducirten Strom in der Induktionsspirale erzeugt hätte. Dieser muss vermieden werden, wenn man eine reine Wirkung der diamagnetischen Induktion erhalten will; — 2. ist besondere Aufmerksamkeit auf den rotirenden Kommutator zu verwenden, wo leicht ein thermomagnetischer Strom entsteht. Man muss daher diesen Kommutator so einrichten, dass sich gleiche Metalle (Messing an Messing) an einander reiben. Auch dadurch werden die thermomagnetischen Ströme nur geschwächt, nicht ganz vermieden. Nun heben sich zwar die an den verschiedenen Reibungsstellen erregten thermomagnetischen Ströme wechselseitig auf; da aber diese Aufhebung oft nicht vollständig Statt findet, so muss man den dadurch hervorgebrachten, wenn auch geringen, Einfluss unschädlich machen, indem man ihn in

Rechnung bringt, was leicht geschehen kann, wenn man den Beobachtungen, bei welchen der Wismuthstab hin und her geschoben wird, ganz gleiche Beobachtungen unmittelbar vorausschickt und nachfolgen lässt, wobei der rotirende Kommutator ohne den Wismuthstab bewegt wird. Uebrigens kann man die ersteren Beobachtungen selbst leicht auch so anordnen, dass die kleinen Wirkungen des thermomagnetischen Stroms abwechselnd die Wirkungen der diamagnetischen Induktion verstärken und schwächen, wodurch ein von dem Einflusse des thermomagnetischen Stroms unabhängiger Mittelwerth erhalten wird. Dies geschieht dadurch, dass man von Zeit zu Zeit durch Umkehrung des Stroms der galvanischen Säule den Diamagnetismus des Wismuthstabs umkehrt.

Zum *Galvanometer* Fig. 6 *D* gebrauchte ich, wie bei dem elektrodiamagnetischen Messapparate, ein kleines Magnetometer nach der Gauss'schen Einrichtung, welches mit einem sehr starken Multiplikator versehen war. Die Länge der Nadel war dabei auf 30 Millimeter reducirt. Die Richtkraft des Erdmagnetismus wurde, zur Vermehrung der Empfindlichkeit, hier ebenso wie früher vermindert. Die Nadel war ebenfalls mit einem dicken Kupferringe als *Dämpfer* umgeben. Dass der Induktionsapparat so weit von dem Galvanometer entfernt werden müsse, dass der Strom der dabei gebrauchten galvanischen Säule nicht unmittelbar auf die Nadel wirke, oder dass, wenn dies der Raum nicht gestattet, der Induktionsapparat durch besondere Orientirung in eine solche Lage gebracht werden müsse, wo seine ablenkende Kraft auf die Nadel Null oder wenigstens sehr klein ist, bedarf kaum der Erwähnung. Um endlich eine ungefähre Kenntniss von der Stärke des Stroms der galvanischen Säule selbst zu erhalten, wurde eine gewöhnliche Boussole Fig. 6 *C* in einer angemessenen Entfernung von der Spirale, durch welche der Strom ging, so aufgestellt, dass die durch den Strom hervorgebrachte Ablenkung der Boussole zur Bestimmung der Stromintensität benutzt werden konnte.

8.

Versuche.

Auch die folgenden Versuche sind nicht von mir allein ausgeführt worden, sondern es haben daran die Herren Professoren Listing und Sartorius von Waltershausen, Dr. von Quintus Icilius und Dr. Riemann, ebenso wie an den vorhergehenden elektrodiamagnetischen Theil genommen. Beispielshalber werde ich auch hier das Protokoll der von Herrn Professor Listing gemachten Versuche vollständig mittheilen, mit denen alle anderen nahe übereinstimmten.

Der Induktionsapparat war so aufgestellt worden, dass eine durch die Mitte des Galvanometers und durch die Mitte der Drahtspirale, durch welche der Strom der galvanischen Säule ging, gelegte Vertikalebene mit dem magnetischen Meridiane einen Winkel von 45° bildete; die Axe jener Drahtspirale lag senkrecht gegen den magnetischen Meridian. Aus den Gesetzen des Elektromagnetismus ergiebt sich, was die Erfahrung unmittelbar bestätigt, dass bei dieser Anordnung der Strom die Galvanometernadel nicht ablenkt. Unter diesen Umständen war es nun ferner am vortheilhaftesten, die Boussole, durch welche die Stromintensität bestimmt werden sollte, in der Richtung der verlängerten Axe der Drahtspirale, durch welche der Strom ging, aufzustellen. Es geschah dies in 708 Millimeter Abstand von der Mitte auf der westlichen Seite. Derjenige Strom, durch welchen diese Boussole mit ihrem Nordende *westlich* abgelenkt wurde, soll als der *normale Strom*, derjenige, durch welchen das Nordende *östlich* abgelenkt wurde, als *umgekehrter Strom* bezeichnet werden. Ferner heisse die Schiebung des Wismuthstabs im Induktionsapparate in der Richtung von Westen nach Osten die *normale Schiebung*, in der Richtung von Osten nach Westen die *umgekehrte Schiebung*. Endlich heisse diejenige Stellung, welche der *rotirende Kommutator* während der normalen Schiebung des Wismuthstabs hatte, seine *normale Stellung*, und die, welche er während der umgekehrten Schiebung des Wismuthstabs hatte, die *umgekehrte Stellung*. Die Drehung des Schwungrads geschah taktförmig nach dem Schlage einer Pendeluhr und es ergab sich, dass alsdann der Wismuthstab in jeder Sekunde seine Bahn 10,58 Mal durchlief. Der Horizontalabstand des Spiegels der Magnetnadel von der Skala des Galvanometers betrug 1400 Skalentheile. Die Schwingungsdauer der Galvanometernadel, welche für die ganze Richtkraft des Erdmagnetismus nahe 9 Sekunden war, wurde nach der schon oben beschriebenen Methode durch Aufhebung eines Theils der erdmagnetischen Kraft auf 20,437 Sekunden gebracht. Das logarithmische Dekrement für die Abnahme der Schwingungsbögen war dabei = 0,123 78.

Bei unveränderter Richtung des Stroms der galvanischen Säule in der Spirale des Elektrodiamagnets, und bei unveränderter Stellung des Hülfskommutators wurde die Galvanometernadel durch die diamagnetische Induktion des von Westen nach Osten bewegten Wismuthstabs in demselben Sinne abgelenkt, wie wenn der Wismuthstab umgekehrt von Osten nach Westen bewegt wurde, wegen des dazwischen Statt findenden Wechsels des *Rotationskommutators*; die Ablenkung erfolgt daher bei schneller Hin- und Herschiebung wie wenn ein konstanter Strom sie hervorbrächte. Wird aber die Stellung des *Hülfskommutators* gewechselt, so erfolgt eine Ablenkung der Nadel nach der entgegen-

gesetzten Seite, woraus sich ergiebt, dass man zum Zwecke schärferer Beobachtung die Ablenkung der Nadel durch Multiplikation verstärken kann, indem man die Stellung des Hülfskommutators immer in dem Augenblicke wechselt, wo die Nadel das Ende ihres Schwingungsbogens erreicht, so lange, bis endlich durch die Dämpfung der Nadel ihr Schwingungsbogen während jeder Schwingung um so viel verkleinert, wie durch den inducirten Strom vergrössert wird. Es wurde daher zwischen je zwei beobachteten Elongationen der Nadel die mit + oder — bezeichnete Stellung des Hülfskommutators bemerkt. War die Nadel zu Anfange der Beobachtungen schon in Schwingung, so wurde mit derjenigen Stellung des Hülfskommutators begonnen, bei welcher der inducirende Strom eine Abnahme des vorhandenen Schwingungsbogens hervorbrachte, welcher dann bei regelmässigem Wechsel bis Null abnahm und dann umgekehrt von Null an wuchs, bis er den Grenzwerth erreichte. Wenn die Nadel während der mit + bezeichneten Stellung des Hülfskommutators von kleineren auf grössere Skalentheile ging, ist in der folgenden Zusammenstellung das Vorzeichen + vor den Schwingungsbogen selbst gesetzt worden, im entgegengesetzten Falle das Vorzeichen —. Die Vorzeichen der Schwingungsbögen ergaben sich dann bei der *diamagnetischen* Induktion des Wismuths denen bei der *magnetischen* Induktion des Eisens *entgegengesetzt* und zugleich waren die letzteren Schwingungsbögen weit grösser, wiewohl der Eisenstab viel dünner als der Wismuthstab war. Der Eisenstab wog nämlich bei gleicher Länge 790,86 Milligramm, der Wismuthstab 339 300 Milligramm. Man brauchte daher, um die Wirkung der magnetelektrischen Induktion zu messen, den Eisenstab nicht so schnell wie den Wismuthstab hin und her zu schieben, sondern es genügte eine einzige Schiebung desselben während jeder Schwingung der Nadel, in demjenigen Augenblicke, wo die schwingende Nadel ihre Ruhelage passirte. Die beiden Kommutatoren blieben dabei in ihrer normalen Stellung und zwischen je zwei Elongationsbeobachtungen wurde allemal die Richtung bemerkt, nach welcher der Eisenstab verschoben wurde und zwar wurde die Richtung von Westen nach Osten mit +, die von Osten nach Westen mit — bezeichnet, wodurch die Vergleichung mit dem Wismuthstabe gegeben war. Die Beobachtungen ergeben dann für gleiche Schiebung des Eisen- und Wismuthstabs, wie schon erwähnt ist, *entgegengesetzte* Wirkungen.

Die Versuche wurden damit begonnen, dass 1. geprüft wurde, ob ein Einfluss des *thermomagnetischen* Stroms vorhanden, und wie gross derselbe war. Dazu wurde der Rotationskommutator in Bewegung gesetzt, ohne jedoch den Wismuthstab hin und her zu schieben. Die Wirkung wurde durch Wechsel des Hülfskommutators bei jeder Elon-

gation multiplicirt. Sodann wurde 2. der *Wismuthstab* zugleich in Bewegung gesetzt und eine Reihe Beobachtungen bei *normalem Strome* gemacht; 3. dieselbe Reihe bei *umgekehrtem Strome*; 4. dieselbe Reihe wieder bei *normalem Strome*; 5. bei *umgekehrtem Strome* und 6. endlich nochmals bei *normalem Strome.* Darauf wurde 7. die Prüfung, ob ein Einfluss des *thermomagnetischen* Stroms vorhanden sei, wiederholt, und 8. der Wismuthstab mit dem *Eisenstabe* vertauscht und die Induktionswirkung des letzteren gemessen.

Göttingen, 1851. Juli 13.

Beobachter: Herr Professor Listing.

Galvanischer Strom von acht Bunsen'schen Kohlen-Zinkbechern.

No. der Schwingung	1. Thermomagnetischer Strom.			
	Stellung des Hülfskommutators	Stand der Nadel am Anfange und Ende jeder Schwingung	Ruhestand der Nadel	Schwingungsbogen der Nadel
		497,0		
1.	+	496,2	496,45	— 0,5
2.	—	496,4	496,35	— 0,1
3.	+	496,4	496,30	+ 0,2
4.	—	496,0	496,15	+ 0,3
5.	+	496,2		

Hiernach war also fast gar kein Einfluss des thermomagnetischen Stroms vorhanden.

No. der Schwingung	2. Induktion des Wismuthstabs bei *normalem Strome.*				
	Stellung des Hülfskommutators	Stand der Nadel am Anfange und Ende jeder Schwingung	Ruhestand der Nadel	Schwingungsbogen der Nadel	Ablenkung der Boussole
		475,3			
1.	—	472,8	474,65	+ 3,70	32° 10′
2.	+	477,7	475,00	+ 5,40	westlich
3.	—	471,8	475,20	+ 6,80	
4.	+	479,5	475,32	+ 8,35	
5.	—	470,5	475,33	+ 9,65	
6.	+	480,8	475,52	+ 10,55	
7.	—	470,0	475,70	+ 11,40	
8.	+	482,0	475,87	+ 12,25	
9.	—	469,5	475,85	+ 12,70	
10.	+	482,4	475,90	+ 13,00	
11.	—	469,3			

No. der Schwingung	Stellung des Hülfskommutators	Stand der Nadel am Anfange und Ende jeder Schwingung	Ruhestand der Nadel	Schwingungsbogen der Nadel	Ablenkung der Boussole
		3. bei *umgekehrtem Strome.*			
		503,5			
1.	+	515,9	511,15	+ 9,50	31° 50′
2.	—	509,3	511,13	+ 3,65	östlich
3.	+	510,0	510,62	— 1,25	
4.	—	513,2	510,82	— 4,75	
5.	+	506,9	510,58	— 7,35	
6.	—	515,3	510,85	— 8,90	
7.	+	505,9	510,70	— 9,60	
8.	—	515,7	510,72	— 9,95	
9.	+	505,6	510,53	— 9,85	
10.	—	515,2			
		4. bei *normalem Strome.*			
		480,5			
1.	+	471,0	474,57	— 7,15	31° 48′
2.	—	475,8	474,40	— 2,80	westlich
3.	+	475,0	474,58	+ 0,85	
4.	—	472,5	474,40	+ 3,80	
5.	+	477,6	474,47	+ 6,25	
6.	—	470,2	474,23	+ 8,05	
7.	+	478,9	474,27	+ 9,25	
8.	—	469,1	474,10	+ 10,00	
9.	+	479,3	473,93	+ 10,75	
10.	—	468,0	473,65	+ 11,30	
11.	+	479,3	473,65	+ 11,30	
12.	—	468,0			
		5. bei *umgekehrtem Strome.*			
		501,5			
1.	+	515,0	509,93	+ 10,15	32° 13′
2.	—	508,2	510,35	+ 4,30	östlich
3.	+	510,0	510,02	— 0,05	
4.	—	511,9	510,20	— 3,40	
5.	+	507,0	509,80	— 5,60	
6.	—	513,3	509,68	— 7,25	
7.	+	505,1	509,42	— 8,65	
8.	—	514,2	509,38	— 9,65	
9.	+	504,0	509,05	— 10,10	
10.	—	514,0	508,72	— 10,55	
11.	+	502,9	508,40	— 11,00	
12.	—	513,8	508,15	— 11,30	
13.	+	502,1	507,83	— 11,45	
14.	—	513,3	567,67	— 11,25	
15.	+	502,0			

No. der Schwingung	Stellung des Hülfs-kommutators	Stand der Nadel am Anfange und Ende jeder Schwingung	Ruhestand der Nadel	Schwingungs-bogen der Nadel	Ablenkung der Boussole
		6. bei *normalem Strome*.			
1.	+	486,0			
2.	—	461,0	471,20	— 20,40	31° 39'
3.	+	476,8	470,60	— 12,40	westlich
4.	—	467,8	470,87	— 6,15	
5.	+	471,1	470,48	— 1,25	
6.	—	471,9	470,52	+ 2,75	
7.	+	467,2	470,08	+ 5,75	
8.	—	474,0	470,45	+ 7,10	
9.	+	466,6	470,25	+ 7,30	
10.	—	473,8	469,92	+ 7,75	
11.	+	465,5	469,83	+ 8,90	
12.	—	475,0	470,02	+ 9,70	
13.	+	465,1	470,13	+ 10,05	
14.	—	475,3	470,17	+ 10,25	
15.	+	465,0	470,08	+ 10,15	
16.	—	475,0	469,95	+ 10,10	
		464,8			
		7. *Thermomagnetischer Strom*.			
1.	+	486,1			
2.	—	486,5	486,30	+ 0,40	
3.	+	486,1	486,22	+ 0,25	
4.	—	486,2	486,25	— 0,10	
5.	+	486,5	486,35	— 0,30	
6.	—	486,2	486,20	0,00	
7.	+	485,9	486,25	+ 0,70	
8.	—	487,0	486,48	+ 1,05	
9.	+	486,0	486,72	+ 1,45	
10.	—	487,9	487,05	+ 1,70	
11.	+	486,4	487,35	+ 1,90	
		488,7			
		8. Induktion des Eisenstabs bei *normalem Strome*.			
1.	+	461,0			
2.	—	457,2	464,85	— 15,30	31° 48'
3.	+	484,0	467,17	— 33,65	westlich
4.	—	443,5	466,30	— 45,60	
5.	+	494,2	466,73	— 54,95	
6.	—	435,0	466,10	— 62,20	
7.	+	500,2	466,47	— 67,45	
8.	—	430,5	466,25	— 71,50	
9.	+	503,8	466,55	— 74,50	
10.	—	428,1	466,55	— 76,90	
11.	+	506,2	466,90	— 78,60	
12.	—	427,1	467,05	— 79,90	
13.	+	507,8	467,38	— 80,85	
14.	—	426,8	467,35	— 81,10	
15.	+	508,0	467,35	— 81,30	
16.	—	426,6	467,35	— 81,50	
17.	+	508,2	467,33	— 81,75	
		426,3			

9.

Berechnung der Versuche.

Zählt man die Schwingungsbögen von demjenigen an, welcher der Null am nächsten ist, so lassen sich die dem Grenzwerthe am nächsten kommenden, mit Hülfe des bekannten logarithmischen Dekrements der Abnahme der Schwingungsbögen = 0,123 78, auf den *Grenzwerth* reduciren durch Division des *n*ten Schwingungsbogens mit $(1—0,752^n)$. Hiernach ergeben sich für die mit Wismuth gemachten Versuche folgende reducirte Werthe:

.	Schwingungsbogen	beobachtet	reducirt	Mittel
2.	8.	+ 11,40	+ 13,20	+ 13,60
	9.	+ 12,25	+ 13,65	
	10.	+ 12,70	+ 13,75	
	11.	+ 13,00	+ 13,80	
3.	8.	— 9,60	— 14,12	— 13,08
	9.	— 9,95	— 13,10	
	10.	— 9,85	— 12,02	
4.	9.	+ 10,00	+ 13,17	+ 13,06
	10.	+ 10,75	+ 13,12	
	11.	+ 11,30	+ 13,08	
	12.	+ 11,30	+ 12,88	
5.	10.	— 10,10	— 12,33	— 12,16
	11.	— 10,55	— 12,21	
	12.	— 11,00	— 12,25	
	13.	— 11,30	— 12,24	
	14.	— 11,45	— 12,15	
	15.	— 11,25	— 11,76	
6.	11.	+ 8,90	+ 10,86	+ 10,95
	12.	+ 9,70	+ 11,23	
	13.	+ 10,05	+ 11,20	
	14.	+ 10,25	+ 11,10	
	15.	+ 10,15	+ 10,77	
	16.	+ 10,10	+ 10,56	

Bezeichnet man den geringen Einfluss, welchen der *thermomagnetische* Strom auf das Resultat dieser Messungen ausübte, mit x, so erhält man aus obigen Angaben den der diamagnetischen Induktion allein entsprechenden *Grenzwerth* auf *normalen Strom* reducirt:

aus 2.	$+ 13,60 + x$	+ 13,34
„ 3.	$+ 13,08 - x$	+ 13,07
„ 4.	$+ 13,06 + x$	+ 12,61
„ 5.	$+ 12,16 - x$	+ 11,555
„ 6.	$+ 10,95 + x$	

also im Mittel aus allen Beobachtungen

$$= + 12{,}644.$$

Aus diesem *Grenzwerthe* der Schwingungsbögen, welcher nach der Methode der Multiplikation gefunden worden ist, *bei gleichförmiger Vertheilung* der Induktionsstösse auf die ganze Schwingungsdauer der Nadel, lässt sich nun leicht auch derjenige Grenzwerth ableiten, welcher nach derselben Methode der Multiplikation erhalten worden wäre, wenn alle Induktionsstösse, statt gleichförmig auf die ganze Schwingungsdauer vertheilt, auf den *Augenblick*, wo die Nadel ihre Ruhelage passirte, koncentrirt gewesen wären, wodurch das für *Wismuth* erhaltene Resultat mit dem für *Eisen* vergleichbar gemacht wird. Setzt man nämlich das bekannte logarithmische Dekrement der Abnahme der Schwingungsbögen $0{,}123\,78 = \lambda \log e$, wo e die Grundzahl der natürlichen Logarithmen bezeichnet, so findet man aus obigem Grenzwerthe den gesuchten durch Multiplikation mit

$$\frac{\sqrt{\pi^2 + \lambda^2}}{1 + e^{-\lambda}} \cdot e^{-\frac{\lambda}{\pi} \operatorname{arc\,tang} \frac{\pi}{\lambda}} = 1{,}574\,235,$$

erhält also den gesuchten Grenzwerth

$$+ 1{,}574\,235 \,.\, 12{,}644 = + 19{,}905.$$ [1]

[1]) Sind die Induktionsstösse sehr zahlreich und gleichförmig auf die ganze Schwingungsdauer vertheilt, so wirken sie wie ein konstanter Strom auf die Nadel und es lässt sich dann auf den nach der Methode der Multiplikation erhaltenen *Grenzwerth* x die S. 440, 487 angeführte Regel anwenden, wonach $x = 2E \,.\, (1 + e^{-\lambda})/(1 - e^{-\lambda}$ ist, wenn E die dem Gleichgewichte der Nadel bei konstantem Strome entsprechende Ablenkung und $\lambda \log e$ das logarithmische Dekrement der Abnahme der Schwingungsbögen bezeichnet. Bei dieser Gleichgewichtslage der Nadel ist nun die ablenkende Kraft der aus der Direktionskraft der Nadel resultirenden Kraft gleich, welche bekanntlich durch $\pi^2/T^2 \,.\, E$ dargestellt wird, wenn T die Schwingungsdauer ohne Einfluss der Dämpfung bezeichnet. Ist nun τ die wirkliche Schwingungsdauer, unter dem Einflusse der Dämpfung, so ist die Geschwindigkeit, welche die auf die ganze Schwingungsdauer gleichförmig vertheilte Stromkraft, wenn sie auf einen Augenblick koncentrirt wirkte, der Nadel ertheilen würde $= \pi^2/T^2 \,.\, E\tau$. Aus dieser Geschwindigkeit lässt sich aber der *Grenzwerth* der Schwingungsbögen berechnen, dem man sich nach der Methode der Multiplikation nähern würde, wenn jene koncentrirte Kraft allemal in dem Augenblicke auf die Nadel wirkte, wo sie ihre Ruhelage passirt. Bezeichnet man nämlich diesen Grenzwerth mit y, so ist nach der in der vorigen Abhandlung S. 440f. gegebenen Regel, wenn man den angegebenen Werth der Geschwindigkeit $= \pi^2/T^2 \,.\, E\tau$ einsetzt:

$$\frac{\pi^2}{T^2} \cdot E\tau = \frac{y}{2} \cdot \frac{\pi}{T} (1 - e^{-\lambda})\, e^{\frac{\lambda}{\pi} \operatorname{arc\,tang} \frac{\pi}{\lambda}}.$$

Die Reduktion der mit *Eisen* gemachten Versuche auf ihren *Grenzwerth* giebt folgende Resultate:

Schwingungsbogen	beobachtet	reducirt	Mittel
8.	— 71,50	— 84,98	
9.	— 74,50	— 84,60	
10.	— 76,90	— 84,47	
11.	— 78,60	— 84,28	
12.	— 79,90	— 84,16	
13.	— 80,85	— 84,04	— 83,876
14.	— 81,10	— 83,50	
15.	— 81,30	— 83,10	
16.	— 81,50	— 82,85	
17.	— 81,75	— 82,78	

Es folgt hieraus das Verhältniss der beiden dem *Wismuthstabe* und dem *Eisenstabe* entsprechenden Grenzwerthe wie

$$+ 19{,}905 : - 83{,}876.$$

Aehnliche Versuchsreihen sind von mir, Herrn Dr. von Quintus Icilius und von Herrn Dr. Riemann ausgeführt und auf gleiche Weise berechnet worden, woraus statt des angegebenen Verhältnisses folgende gefunden worden waren:

$$+ 18{,}158 : - 83{,}82,$$
$$+ 15{,}357 : - 82{,}80,$$
$$+ 14{,}890 : - 83{,}45.$$

Im Mittel aus allen Reihen ergiebt sich hiernach das Verhältniss

$$+ 16{,}956 : - 83{,}49.$$

Nun verhält sich die Intensität der vom *Wismuthstabe* und *Eisenstabe* inducirten Ströme diesen Grenzwerthen direkt proportional, und umgekehrt proportional der *Zahl* der Induktionsstösse während einer Schwingung, für welche sie gelten, d. i. der Zahl $10{,}58 . 20{,}437 = 216{,}2$ für den *Wismuthstab* und der Zahl 1 für den *Eisenstab*. Die vom *diamagnetischen Wismuthstabe* inducirten elektrischen Ströme sind also ihrer Richtung nach den vom *magnetischen Eisenstabe* inducirten elektrischen Strömen *entgegengesetzt* und verhalten sich ihrer *Intensität* nach wie

$$16{,}956 : 83{,}49 . 216{,}2 = 1 : 1064{,}5,$$

Die Vergleichung des hieraus sich ergebenden Werths von y mit dem oben angegebenen von x führt zu der Proportion:

$$y : x = \frac{\pi\tau}{T} e^{-\frac{\lambda}{\pi} \text{arc tang} \frac{\pi}{\lambda}} : (1 + e^{-\lambda}),$$

worin nach der Theorie der *Dämpfung* für den Quotienten τ/T auch $\sqrt{1 + \lambda^2/\pi^2}$ gesetzt werden kann.

ungeachtet der Wismuthstab 339 300 Milligramm und der Eisenstab blos 790,86 Milligramm wog. Hiernach kann man rechnen, dass wenn der Wismuthstab auch ein so geringes Gewicht wie der Eisenstab gehabt hätte, die Stärke des von ihm *diamagnetisch* inducirten Stroms 456 700 Mal geringer gewesen sein würde, als die des vom Eisenstabe *magnetisch* inducirten Stroms.

10.

Vergleichung der beiden Bestimmungen der Stärke eines Elektrodiamagnets aus seiner magnetischen und magnetelektrischen Wirkung.

Nachdem in den beiden vorhergehenden Abschnitten die *magnetische* und die *magnetelektrische* Wirkung eines *Elektrodiamagnets* einzeln betrachtet worden sind, gehen wir endlich zur *quantitativen* Vergleichung beider Arten von Wirkungen unter einander über. Es könnte scheinen, dass sich diese Vergleichung ganz einfach ausführen liesse, indem man blos 1. die beobachtete *magnetische* Wirkung des Elektrodiamagnets in Theilen der ebenfalls beobachteten *magnetischen* Wirkung des Elektromagnets, 2. die beobachtete *magnetelektrische* Wirkung des Elektrodiamagnets in Theilen der ebenfalls beobachteten *magnetelektrischen* Wirkung des Elektromagnets ausdrückte, wie dies schon oben geschehen ist und zu folgenden Resultaten geführt hat:

$$1.\quad \frac{\text{Magnetische Wirkung des Elektrodiamagnets}}{\text{Magnetische Wirkung des Elektromagnets}} = \frac{1\,470\,000}{1},$$

$$2.\quad \frac{\text{Magnetelektrische Wirkung des Elektrodiamagnets}}{\text{Magnetelektrische Wirkung des Elektromagnets}} = \frac{1}{456\,700}.$$

Diese einfache Vergleichung würde aber nur dann richtig sein, wenn 1. *derselbe Elektrodiamagnet*, welcher zur Darstellung der magnetischen Wirkungen gebraucht wurde, auch zur Darstellung der magnetelektrischen Wirkungen gedient hätte, und wenn ebenso 2. *derselbe Elektromagnet* zur Darstellung beider Arten von Wirkungen angewendet worden wäre, und wenn endlich 3. sowohl jener Elektrodiamagnet als auch dieser Elektromagnet dabei aus grösserer *Entfernung* gewirkt hätte, im Vergleiche zu ihren eigenen Dimensionen und zu denen des Körpers, auf welchen gewirkt wurde. Diese Bedingungen sind aber bei obigen Versuchen nicht erfüllt worden, und es war auch nicht möglich sie zu erfüllen, weil die Darstellung der magnetelektrischen Wirkungen die Anwendung ganz anderer Apparate als die der magnetischen Wirkungen und möglichste Verkleinerung der Entfernungen der auf einander wirkenden Körper nothwendig machte.

Werden aber, wie dies geschehen ist, zur Darstellung der magnetischen und magnetelektrischen Wirkungen *verschiedene Elektrodiamagnete* und *verschiedene Elektromagnete* gebraucht, so lässt sich, auch wenn sie

aus grösseren Entfernungen wirkten, keine Gleichheit in den angegebenen Verhältnissen erwarten, und die darin sich zeigende Ungleichheit (dass nämlich das eine Verhältniss etwa 3 Mal grösser als das andere war) würde noch weit grösser ausgefallen sein, wenn nicht schon bei der Bestimmung dieser Verhältnisse auf die Verschiedenheit der *Massen* Wismuth und Eisen, welche zu den verschiedenen Elektrodiamagneten und Elektromagneten gebraucht wurden, Rücksicht genommen worden wäre. Durch diese Berücksichtigung der Ungleichheit der Massen wurde die gröbste Statt findende Verschiedenheit ausgeglichen und es ist interessant zu bemerken, dass durch diese Berücksichtigung die oben angeführten Verhältnisse einander schon wirklich so nahe gebracht worden sind, dass sie als *Grössen derselben Ordnung* betrachtet werden können.

Es kommt daher darauf an, auch noch die anderen Verschiedenheiten aufzusuchen und zu bestimmen, welche nächst der Massenverschiedenheit den grössten Einfluss haben, um zu prüfen, wie dadurch die oben angeführten Verhältnisse geändert und ob sie der Gleichheit dadurch noch *näher* gebracht werden.

Diese Untersuchung ist darum von Wichtigkeit, weil, wenn gar keine Verschiedenheit der gebrauchten Elektrodiamagnete und Elektromagnete Statt gefunden und beide aus grösserer Entfernung gewirkt hätten, *nach den in der Einleitung aufgestellten Gesetzen der diamagnetischen Polarität* die beiden obigen Verhältnisse sich *ganz gleich* ergeben müssten. Da sich nun aber diese Gleichheit praktisch nicht unmittelbar prüfen lässt, so ist es wichtig, dass man wenigstens prüft, ob man sich dieser Gleichheit desto mehr *nähere*, je genauer man die faktische Verschiedenheit der gebrauchten Elektrodiamagnete und Elektromagnete und den verschiedenen Einfluss, welchen die geringe Entfernung, aus der sie wirken, auf das *Verhältniss* ihrer Wirkungen ausübt, bestimmt und berücksichtigt, wodurch man *näherungsweise* dasselbe erreicht, wie wenn man die behauptete Gleichheit unmittelbar zu prüfen im Stande wäre.

Zu diesem Zwecke dient nun die folgende Uebersicht und Erörterung aller hierbei in Betracht kommenden Differenzen.

Erstens müsste eigentlich bei der geringen Entfernung, auf welche sich die beobachteten Wirkungen beziehen, zum Zwecke einer genauen Vergleichung *die ideale Vertheilungsweise der magnetischen Fluida*, wie sie an der Oberfläche des Wismuthstabs anzunehmen sei, im Vergleiche zu der bei dem Eisenstabe anzunehmenden, näher bekannt sein. Da dies nicht der Fall ist, so leuchtet ein, dass eine solche Vergleichung, auch wenn die Genauigkeit der Beobachtungen nichts zu wünschen liesse, doch nur einen ungefähren Ueberschlag geben kann, weil dabei die in geringen Entfernungen ausgeübten Wirkungen den *Momenten*

proportional gesetzt werden müssen, was genau nur von den Wirkungen in grösseren Entfernungen gilt.

Zweitens sind bei obigen Versuchen *zwei verschiedene Eisenstäbchen* gebraucht worden, von denen das eine blos 5, 8, das andere 790,86 Milligramm wog. Wir dürfen nicht voraussetzen, dass das Eisen beider Stäbchen in magnetischer Beziehung sich ganz gleich verhalte. Es wurde daher der Magnetismus beider Stäbchen unter Einwirkung desselben galvanischen Stroms verglichen, und in der That ergab sich bei geringerer Intensität dieses Stroms, dass das Verhältniss des magnetischen Moments von dem Verhältnisse ihrer Massen sehr abwich; bei wachsender Intensität des Stroms verschwand aber diese Ungleichheit und der Magnetismus beider Stäbchen ergab sich bald ihren Massen fast genau proportional, woraus folgt, dass bei unseren Versuchen, wo noch stärkere Ströme gebraucht wurden, eine Reduktion wegen Verschiedenartigkeit des Eisens nicht nöthig ist.

Drittens sind bei obigen Versuchen *verschiedene Wismuthstäbe* gebraucht worden, nämlich zwei kleinere zur Beobachtung der magnetischen, und ein grösserer zur Beobachtung der magnetelektrischen Wirkung, von denen auch nicht vorausgesetzt werden kann, dass sie sich in diamagnetischer Beziehung ganz gleich verhielten. Es wurde daher der letztere in zwei Hälften getheilt, die den beiden ersteren an Länge und Dicke nahe gleich waren und darauf mit beiden Paaren abwechselnd einige Versuche zur Vergleichung ihres Diamagnetismus gemacht, aus denen sich allerdings eine nicht ganz unerhebliche Verschiedenheit herausstellte; es verhielt sich nämlich die Wirkung des ersten Paares zu der des zweiten etwa wie 1266 : 1000. Wenn sich also aus den Induktionswirkungen des grösseren Stabs Art. 8, 9 das diamagnetische Moment des Wismuths im Vergleiche zum magnetischen Momente des Eisens = 1/456 700 ergiebt, so würde es für das Wismuth des anderen Stabs = 1/360 740 erhalten werden, wodurch die Differenz dieses Verhältnisses von dem aus den magnetischen Wirkungen abgeleiteten nicht verkleinert, sondern sogar noch vergrössert wird.

Viertens kommt aber auch noch *die Verschiedenheit der elektromagnetischen Scheidungskraft* der beiden gebrauchten Apparate in Betracht. Diese Verschiedenheit lässt sich mit hinreichender Genauigkeit aus den für diese Apparate gegebenen Bestimmungen ableiten und es ergiebt sich daraus, dass die elektromagnetische Scheidungskraft des Induktionsapparats 4,8 Mal grösser als die des elektrodiamagnetischen Messapparats war.[1]) Zugleich ergiebt sich, dass in beiden Apparaten die elektro-

[1]) Die Drahtspirale des elektrodiamagnetischen Messapparats hatte nach Art. 2 vier Lagen, jede von 146 Windungen und war 190 Millimeter lang; ihr innerer Durch-

magnetische Scheidungskraft eine solche *Stärke* besass, dass nach MÜLLER's interessanten Versuchen das magnetische Moment der *Eisenstäbchen* nicht merklich von seinem Maximumwerthe verschieden sein konnte,[1]) dass also die 4,8 Mal stärkere Scheidungskraft des Induktions-

messer war 17, der äussere 26 Millimeter, und die Intensität des durchgehenden Stroms war nach Art. 3 $= 16{,}31$. Hieraus ergiebt sich die elektromagnetische Scheidungskraft in ihrer Mitte sehr nahe

$$= \frac{4 \,.\, 146 \,.\, 2\pi \,.\, 16{,}31}{\frac{1}{2} \,.\, 190} = 629{,}9.$$

Die Drahtspirale des Induktionsapparats dagegen hatte nach Art. 7 acht Lagen, jede von 120 Windungen und war 383 Millimeter lang; ihr innerer Durchmesser war 23,9, der äussere 70 Millimeter und die Ablenkung einer in 708 Millimeter westlichen Abstand befindlichen Boussole war nach den Versuchen Art. 7 etwa 32°, wobei die Intensität des horizontalen Theils des Erdmagnetismus $= 1{,}8$ zu setzen ist. Hieraus lässt sich zunächst die Intensität des Stroms i berechnen und ergiebt sich sehr nahe

$$i = \frac{383}{S} \,.\, \frac{1{,}8 \,.\, \operatorname{tang} 32^0}{\frac{1}{(708 - \frac{1}{2}\, 383)^2} - \frac{1}{(708 + \frac{1}{2}\, 383)^2}},$$

wo S den von der Spirale umwundenen Flächenraum, welcher $= 1\,793\,200$ Quadratmillimeter gefunden wird, also $i = 95{,}6$. Die gesuchte Scheidungskraft der Spirale folgt hieraus sehr nahe $= \frac{8 \,.\, 120 \,.\, 2\pi \,.\, 95{,}6}{\frac{1}{2} \,.\, 383} = 3012$. Es verhält sich aber $3012 : 629{,}9$ sehr nahe wie $4{,}8 : 1$.

[1]) Ein weicher Eisenstab nimmt bald einen schwächeren bald einen stärkeren Magnetismus an, je nachdem die magnetische oder elektromagnetische Scheidungskraft, die auf ihn wirkt, kleiner oder grösser ist. Herr Professor JOH. MÜLLER in Freiburg hat nun in seinem „Berichte über die neuesten Fortschritte der Physik", Braunschweig 1850, S. 494 ff. eine interessante Untersuchung über die Abhängigkeit des Magnetismus solcher Eisenstäbe von der Stärke der auf sie wirkenden Scheidungskräfte mitgetheilt, welche sich dadurch auszeichnet, dass der Magnetismus der Eisenstäbe für sehr verschiedene, auch sehr grosse, Scheidungskräfte bestimmt worden ist. Es hat sich daraus das merkwürdige Resultat ergeben, dass der Magnetismus des Eisenstabs der Scheidungskraft, welche auf das Eisen wirkt, keineswegs immer proportional bleibt, sondern dass er sich bei grösseren Scheidungskräften einem *Grenzwerthe* nähert. MÜLLER hat die Resultate seiner mit einer elektromagnetischen Spirale gemachten Messungen in folgender Formel zusammengefasst:

$$s = 0{,}016 \,.\, d^{\frac{3}{2}} \,.\, \operatorname{tang} \frac{m}{0{,}00108 \,.\, d^2},$$

worin, wenn i die Stromstärke der elektromagnetischen Spirale nach absolutem Maasse bezeichnet (nach S. 252 a. a. O.)

$$i = 66{,}813 \,.\, s,$$

und (nach S. 511) wenn M den Magnetismus des Eisenstabs in der elektromagnetischen Spirale nach absolutem Maasse bezeichnet,

$$M = 5\,426\,021 \,.\, m$$

zu setzen ist. Die von MÜLLER gebrauchten Eisenstäbe waren (nach S. 502) 330 Millimeter lang und lagen in einer Drahtspirale, welche 300 Millimeter lang war, aus der

apparats dem Eisenstäbchen keinen stärkeren Magnetismus ertheilte, als er durch die einfache Kraft erhalten haben würde. Anders verhält es sich mit den *Wismuthstäben,* deren diamagnetisches Moment auch

sie auf beiden Seiten 15 Millimeter hervorragten. d bezeichnet die Dicke des Eisenstabs. Die Drahtspirale bestand aus fünf Lagen übereinander, jede zu 76 Windungen; ihr innerer Durchmesser war 49 Millimeter und die Dicke des Drahts 2,8 Millimeter. Hiernach wird die Stärke der *Scheidungskraft,* welche der Strom einer Lage von Windungen, deren Halbmesser $= r$ ist, auf einen Punkt des Eisenstabs ausübt, welcher in der Entfernung $= a$ von der Mitte der Spirale liegt, durch folgenden Ausdruck dargestellt:

$$\frac{2 \, . \, 76}{300} \pi r^2 i \int_{a-150}^{a+150} \frac{dx}{(r^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{152}{300} \, . \, \pi i \left\{ \frac{a+150}{\sqrt{(a+150)^2+r^2}} - \frac{a-150}{\sqrt{(a-150)^2+r^2}} \right\}.$$

Im Mittel für den ganzen Eisenstab folgt hieraus die Stärke dieser Kraft

$$\frac{152 \, . \, \pi i}{300 \, . \, 330} \int_{-165}^{+165} \left[\frac{a+150}{\sqrt{(a+150)^2+r^2}} - \frac{a-150}{\sqrt{(a-150)^2+r^2}} \right] da$$

$$= \frac{304 \, . \, \pi i}{99\,000} \left\{ \sqrt{315^2+r^2} - \sqrt{15^2+r^2} \right\}.$$

Endlich für alle fünf Lagen:

$$\frac{304 \, . \, \pi i}{99\,000} \, . \, \frac{5}{14} \int_{24,5}^{38,5} \left[\sqrt{315^2+r^2} - \sqrt{15^2+r^2} \right] dr = 13{,}562 \, . \, i.$$

Diese Kraft unterscheidet sich von der *erdmagnetischen* Kraft nur durch ihre Stärke und kann daher nach demselben *absoluten Maasse* bestimmt werden, was hier auch geschehen ist. Wir wollen die Stärke dieser Kraft mit X bezeichnen, so ist also

$$X = 13{,}562 \, i.$$

Setzt man nun diese Werthe in die Müller'sche Gleichung, so erhält man

$$X = 14{,}498 \, . \, d^{\frac{3}{2}} \, . \, \text{tang} \, \frac{M}{5860 \, . \, d^2}.$$

Diese Formel gilt zunächst für Eisenstäbe von 330 Millimeter Länge; um sie auf andere Stablängen anwendbar zu machen, muss der Bogen $M/(5860 \, . \, d^2)$ mit 330 multiplicirt und mit der Stablänge l dividirt werden, also

$$X = 14{,}498 \, . \, d^{\frac{3}{2}} \, . \, \text{tang} \, \frac{M}{17{,}76 \, . \, d^2 l},$$

jedoch hat Müller selbst bemerkt, dass der so in Rechnung gebrachte Einfluss der Länge mit der Erfahrung nicht genau übereinstimme und daher noch einer genaueren Prüfung bedürfe. Wendet man nun diese aus den Müller'schen Versuchen abgeleitete Regel an, um den Magnetismus der beiden Eisenstäbchen zu bestimmen, welche sich in den beiden oben beschriebenen Spiralen des *elektrodiamagnetischen Messapparats* und des *Induktionsapparats* befanden, so hat man für das *erste* Stäbchen $l = 92$ und ausserdem sein absolutes Gewicht $= 5{,}8$ Milligramm und sein specifisches Gewicht

noch mit den grössten darstellbaren Scheidungskräften proportional wachsend anzunehmen ist.[1]) Reducirt man hiernach das aus den Induktionswirkungen erhaltene Resultat auf eine 4,8 Mal schwächere Scheidungskraft, um es mit dem aus der magnetischen Wirkung erhaltenen Resultate vergleichbar zu machen, so muss das diamagnetische Moment des Wismuths 4,8 Mal kleiner genommen werden, während das magnetische Moment des Eisens unverändert bleibt. Man erhält dann

= 7,78, woraus seine Dicke $d = 0,1016$ folgt. Der Werth von X für dieses Stäbchen ist in der vorigen Note bestimmt $X = 629,9$; man erhält also für dieses Stäbchen

$$\frac{M}{d^2 l} = 17,75 \text{ arc tang } 89^0\, 57'\, 23'' = 27,886.$$

Für das *zweite* Stäbchen ist $l' = 186$, ausserdem ist sein absolutes Gewicht = 790,86 Milligramm und sein specifisches Gewicht = 7,78, woraus seine Dicke $d' = 0,8342$ gefunden wird. Der Werth von X' ist für dieses Stäbchen in der vorigen Note bestimmt $X' = 3012$; man erhält daher

$$\frac{M'}{d'^2 l'} = 17,76 \text{ arc tang } 89^0\, 47'\, 23'' = 27,834.$$

Bemerkt man, dass hierin $d^2 l$ und $d'^2 l'$ den Massen der beiden Eisenstäbchen proportional sind, so ergiebt sich hieraus ein ganz nahe gleiches Verhältniss des Magnetismus zur Masse für beide Stäbchen, ungeachtet auf das letztere Stäbchen eine 4,8 Mal grössere Scheidungskraft wirkte. Eine genauere Bestimmung hierüber findet man Art. 24 bis 26, wo auch die von Buff und Zamminer gegen die Müller'schen Versuche erhobenen Bedenken erörtert werden.

[1]) Aus keiner bisher bekannten Thatsache lässt sich eine Abweichung von dem Gesetze der Proportionalität des Diamagnetismus mit der magnetischen Scheidungskraft entnehmen, vielmehr lassen sich, wenn es auch an Messungen fehlt, verschiedene für dieses Gesetz sprechende Thatsachen anführen. Die wichtigste und auch in anderen Beziehungen interessanteste ist die von Plücker entdeckte und näher untersuchte Thatsache, wonach *derselbe Magnetpol je nach der verschiedenen Entfernung in derselben Masse*, z. B. in Holzkohle, *Diamagnetismus oder Magnetismus hervorruft.* Die nähere Untersuchung, welche Plücker hierüber in Poggendorff's Annalen 1848, Bd. 73, S. 616ff. mitgetheilt hat, beweist, dass hierbei *die verschiedene Entfernung des Magnetpols unmittelbar als solche nicht in Betracht kommt*, sondern nur *indirekt, insofern einer grösseren Entfernung eine Abnahme der Kraft entspricht;* Plücker hat nämlich bewiesen, dass *der Magnetismus der Holzkohle in Diamagnetismus verwandelt werde durch die blosse Zunahme der auf die Holzkohle wirkenden magnetischen Kraft.* Diese interessante Thatsache findet nämlich ihre einfachste Erklärung nach obigem Gesetze der Proportionalität des Diamagnetismus mit der magnetischen Scheidungskraft, sobald man dabei nur das von Müller für den Magnetismus des Eisens bewiesene Gesetz auch für den Magnetismus der Holzkohle gelten lässt; denn nähert sich der Magnetismus der Holzkohle bei zunehmender Scheidungskraft einem *Grenzwerthe,* während der Diamagnetismus der Holzkohle gleichmässig fortwächst, so leuchtet von selbst ein, dass der Diamagnetismus endlich den Magnetismus übertreffen muss, was so viel heisst, als dass der Magnetismus der Holzkohle in Diamagnetismus verwandelt werde.

für das erstere Moment im Vergleiche zu dem letzteren, statt 1/360 740, blos 1/4,8 . 360 740 = 1/1 731 560.

Dieses aus der *magnetelektrischen* Wirkung abgeleitete Resultat lässt sich nun mit dem aus der *magnetischen* Wirkung Art. 4 gefundenen direkt vergleichen, wonach nämlich das diamagnetische Moment des Wismuths im Vergleiche zum magnetischen Momente des Eisens = 1/1 470 000 erhalten wurde.

Die Differenz der beiden betrachteten Verhältnisse, welche vorher 200 Procent betrug, ist durch Berücksichtigung der angegebenen Verschiedenheit auf etwa 17 bis 18 Procent reducirt worden und diese Annäherung an die Gleichheit muss um so befriedigender erscheinen, als dabei, weil der zuerst angeführte Grund jener Differenz unberücksichtigt bleiben musste, nur von einer ungefähren Vergleichung die Rede sein konnte. Auch ist zu bemerken, dass der zuletzt angegebene, bei weitem einflussreichste Grund jener Differenz noch einer genaueren Berücksichtigung fähig ist, wenn dabei statt der oben angeführten Müller'schen Versuche die genaueren darüber gewonnenen Resultate zum Grunde gelegt werden, die man Art. 24 bis 26 zusammengestellt findet, wodurch, wie in der Note Art. 27 angegeben ist, das Verhältniss 1/1 470 000 auf 1/1 593 000 vermindert wird, so dass nur noch eine Differenz von etwa 8 Procent im Vergleiche mit dem anderen Verhältnisse übrig bleibt.

Nach dieser Vergleichung des Verhältnisses der magnetischen und magnetelektrischen Wirkungen eines *Elektrodiamagnets* mit dem Verhältnisse der magnetischen und magnetelektrischen Wirkungen eines *Elektromagnets* findet sich also das Resultat bestätigt, dass in der Natur des Diamagnetismus die *elektrodiamagnetische* und die *diamagnetelektrische* Wirksamkeit wirklich ebenso begründet ist, wie in der Natur des Magnetismus die *elektromagnetische* und die *magnetelektrische*, und zwar stehen auch jene Wirkungen ihrer Grösse nach in demselben Verhältnisse zu einander, wie diese, so weit sich dies prüfen lässt, zum Beweise, dass zwischen *diamagnetischer und magnetischer Wirksamkeit* in den verschiedenartigsten Beziehungen *gar kein Unterschied* Statt findet, wodurch das in der Einleitung aufgestellte Gesetz der *diamagnetischen Polarität* bewiesen ist.

Es bliebe hiernach nur noch übrig, die aus den obigen Versuchen gefundenen Resultate zu benutzen, um das Verhältniss zu bestimmen, in welchem die *Stärke* des Wismuthdiamagnetismus zur Stärke des Eisenmagnetismus steht. Es leuchtet aber aus den vorhergegangenen Erörterungen ein, dass von einem *bestimmten* Verhältnisse des Diamagnetismus des Wismuths zum Magnetismus des Eisens im Allgemeinen nicht die Rede sein könne, weil, wenn man auch Wismuth- und Eisenstäbe von gleicher Grösse und Gestalt dabei voraussetzt, jenes Verhält-

niss doch bei verschiedener Stärke der magnetischen *Scheidungskraft* sehr verschieden erhalten wird, indem der Diamagnetismus bei zunehmender Scheidungskraft gleichmässig wächst, während der Magnetismus sich einem Grenzwerthe nähert. Ein solches Verhältniss lässt sich daher nur unter der Beschränkung bestimmen, dass die magnetischen Scheidungskräfte so *klein* sind, dass die Abweichung des Eisenmagnetismus von der Proportionalität mit diesen Kräften dabei noch nicht merklich sei. Unter dieser Beschränkung liesse sich nun zwar nach obigen Resultaten, mit Hülfe des in der Note S. 509 angeführten MÜLLER'schen Gesetzes, das Verhältniss des *Wismuthdiamagnetismus* zum *Eisenmagnetismus* bestimmen; es ist aber zweckmässiger, diese Bestimmung zu verschieben, um dabei für den Eisenmagnetismus auch diejenigen Versuche zu benutzen, die wir im letzten Abschnitte Art. 25, 26 kennen lernen werden, wo dann die Bestimmung jenes Verhältnisses beigefügt werden soll.

11.

FARADAY'S *Versuche.*

Es soll hier nicht von FARADAY's früheren Versuchen gehandelt werden, durch die er zuerst zu der Annahme geführt worden war, welche PLÜCKER am kürzesten in den Worten ausspricht: „Im Wismuth inducirt jeder Nordpol eines Magneten einen Nordpol, jeder Südpol einen Südpol". PLÜCKER sagt von dieser Annahme, dass jeder Physiker darauf verfallen musste, und dass *diamagnetische Polarität* eine nothwendige Folge derselben sei. Wir beschränken uns hier auf diejenigen Versuche, welche von FARADAY neuerlich zur Widerlegung dieser von ihm zuerst vermutheten *diamagnetischen Polarität* gemacht worden sind.

In der That waren bald, nachdem die Wichtigkeit eingeleuchtet hatte, welche die wirkliche Nachweisung der *diamagnetischen Polarität* besitzt, so viele und verschiedene Thatsachen dafür gefunden und mitgetheilt worden, dass diese Polarität fast ausser allem Zweifel gesetzt zu sein schien. Ich habe in meinem ersten Aufsatze (Berichte der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften 1847, S. 346 und POGGENDORFF's Annalen 1848, Bd. 73, S. 242[1]) besonders die Beweiskraft hervorgehoben, welche in dieser Beziehung der von REICH angestellte Versuch besitzt, wonach Nordpol und Südpol, wenn sie von derselben Seite her auf ein Stück Wismuth wirken, keineswegs dasselbe mit der Summe der Kräfte abstossen, welche sie einzeln ausüben würden, sondern vielmehr nur mit der Differenz dieser Kräfte — und habe andere

[1]) [WILHELM WEBER's Werke, Bd. III, p. 255.]

Versuche beigefügt, welche die *beiden Pole* eines in diamagnetischem Zustande erhaltenen Wismuthstabs durch den Gegensatz von *Anziehung* und *Abstossung* unmittelbar erkennen liessen. Endlich fügte ich auch die mit dem in Art. 7 erwähnten Apparate gemachten Versuche bei, welche gleiche von *Diamagnetpolen* wie von *Magnetpolen* ausgeübte *elektromotorische Kräfte* nachzuweisen schienen. Hieran schlossen sich unmittelbar einige Versuche von POGGENDORFF an (Annalen 1848, Bd. 73, S. 475 f.), welche theils zur Bestätigung, theils zur Ergänzung dienten, indem sie besonders die Nachweisung der beiden *Diamagnetpole* durch den Gegensatz der Wirkung gaben, welche der *galvanische Strom* auf sie ausübt, und geradezu bewiesen, dass ein Wismuthstab in der äquatorialen Lage ein wirklicher *Transversalmagnet* wäre, der die Linie seiner Nordpole dem Nordpole und die Linie seiner Südpole dem Südpole des Magnets zukehrte, was ausserdem PLÜCKER (Annalen 1848, Bd. 73, S. 613 f.) durch eine sehr sinnreiche darauf gegründete Anwendung bestätigt fand, welche ein einfaches und praktisch wichtiges Mittel an die Hand gab, den Diamagnetismus schwingender Körper bedeutend zu verstärken. PLÜCKER erklärte es dabei selbst für unwidersprechlich, dass der *Diamagnetismus* in einer *polaren Erregung* bestehe, eine Theorie, die er zuvor nur wegen der grossen Schwierigkeiten ihrer allgemeinen Begründung fallen gelassen habe und erst dann wieder aufgenommen, als die Polarität so entschieden nachgewiesen worden. Endlich hat PLÜCKER an diesem Orte selbst noch eine der hauptsächlichsten der von ihm erwähnten Schwierigkeiten, nämlich die, welche aus dem bei manchen Körpern beobachteten *magnetischen* Verhalten in *grösserer*, und dem *diamagnetischen* Verhalten in *kleinerer* Entfernung vom Magnetpole entsprang (siehe die Note S. 511), durch die nähere Untersuchung in solcher Weise erledigt, dass, wie er selbst sagt, „das von ihm nicht vermuthete, aber von rein theoretischem Gesichtspunkte aus zu erwartende Resultat statt der früheren Schwierigkeit eine merkwürdige Bestätigung der von FARADAY, REICH, WEBER und POGGENDORFF adoptirten Theorie des Diamagnetismus gebe, zu der auch er sich jetzt entschieden bekenne".

Allen diesen schnell auf einander gefolgten, in demselben 73. Bande von POGGENDORFF's Annalen enthaltenen Nachweisungen der von FARADAY zuerst vermutheten *diamagnetischen Polarität* widerspricht nun FARADAY durch seine 23. Versuchsreihe, deren nähere Betrachtung auch für die hier beschriebenen Versuche von Wichtigkeit ist.

Bei der Autorität, welche dieser grosse Naturforscher mit so vollem Rechte geniesst, und dem Interesse, welches seine Arbeiten überall erregen, dürfen die von ihm angeführten Versuche zur Widerlegung der *diamagnetischen Polarität* als bekannt vorausgesetzt werden. Auch kann

es sich nicht um die Richtigkeit dieser Versuche handeln, an der bei Faraday's anerkannter Meisterschaft nicht zu zweifeln ist. Es handelt sich hier wesentlich nur darum, ob und in wie weit diese Versuche gegen *diamagnetische Polarität*, wie sie hier gleich zu Anfang definirt worden ist, wirklich zeugen und beweisen. Dabei kommt nun hauptsächlich dreierlei in Betracht: *erstens*, dass Faraday nicht alle Versuche, welche zur Nachweisung der diamagnetischen Polarität gemacht worden sind, wiederholt hat; *zweitens*, dass Faraday, bei aller Meisterschaft im Gebrauche seiner Hülfsmittel, in der Feinheit der Versuche durch die Instrumente, deren er sich bediente, beschränkt war. *Drittens* endlich hat Faraday nach seinen Ansichten manche Erscheinungen, die von anderen Physikern auf *diamagnetische Polarität* zurückgeführt werden, auf andere Weise zu erklären gesucht. Es erscheint daher sogar zweifelhaft, ob Faraday die *diamagnetische Polarität* in dem Sinne, in welchem sie hier zu Anfang definirt worden ist, wirklich bestreitet.

Was die von Faraday nicht wiederholten und unberücksichtigt gelassenen Versuche betrifft, so bemerke ich zunächst, dass in Art. 2689 seiner Abhandlung ein von mir mit einem von Reich gemachten Versuche verwechselt zu sein scheint, wodurch es geschehen ist, dass Faraday den von Reich gemachten Versuch, dessen Beweiskraft für *diamagnetische Polarität* von mir besonders hervorgehoben worden war, ganz übersehen hat, wonach nämlich Nordpol und Südpol, wenn sie zugleich von derselben Seite her auf ein Stück Wismuth wirken, keineswegs dasselbe mit der Summe der Kräfte abstossen, welche sie einzeln ausüben würden, sondern nur mit der Differenz dieser Kräfte. Dieser Versuch ist von Reich mit dem feinsten Instrumente gemacht worden, was dazu gebraucht werden kann, nämlich mit der feinen Torsionswaage, womit er die klassische Wiederholung der Cavendish'schen Versuche ausgeführt hatte. Ich kann hier nur wiederholen, was ich über diesen Versuch in meinem ersten Aufsatze gesagt habe, dass daraus allein schon mit grösster Wahrscheinlichkeit geschlossen werden kann, dass der Grund der diamagnetischen Kraft in einem in Wismuth vorhandenen beweglichen imponderablen Bestandtheile zu suchen sei, welcher bei Annäherung eines Magnetpols verschieden bewegt oder vertheilt werde. Die gleichzeitige Annäherung zweier entgegengesetzter Pole von derselben Seite her bewirkt dann nämlich, dass der imponderable Bestandtheil weder die eine noch die andere Bewegung oder Vertheilung annehmen kann, an welche das Hervortreten der diamagnetischen Kraft geknüpft ist, woraus sich das Verschwinden dieser Kraft in diesem Falle ergiebt. — Ferner gehören hierher die von Poggendorff angestellten und in demselben 73. Bande der Annalen (S. 475—479) be-

schriebenen Versuche, durch welche er ohne Hülfe so feiner Messungsmittel, wie ich gebraucht habe, dasselbe Resultat durch einen einfachen, augenfällig überzeugenden Versuch sogar auf zweifache Weise erlangt hat. Die Wiederholung dieser POGGENDORFF'schen Versuche findet keine Schwierigkeit und ist von verschiedenen Beobachtern ausgeführt worden.

Unter den Instrumenten, welche eine noch grössere Feinheit und Genauigkeit gestatten, als diejenigen, deren sich FARADAY bedient hat, kommen hauptsächlich die nach den GAUSS'schen Vorschriften eingerichteten *Magnetometer* und *Galvanometer* in Betracht. Auch ich würde ohne diese Instrumente meine Versuche gar nicht auszuführen im Stande gewesen sein. Wenn nun FARADAY diese Versuche, aber ohne diese Instrumente anzuwenden, wiederholt hat, so ist es wohl erklärlich, dass er mit seinen wenn auch sonst feinen Hülfsmitteln die von mir beobachteten sehr schwachen Wirkungen nicht wahrnehmen konnte. FARADAY's hauptsächlichstes Bedenken gegen meine im 73. Bande von POGGENDORFF's Annalen mitgetheilten Beobachtungen beruht übrigens darauf, dass ich daselbst die von ihm sehr sorgfältig beachteten Erscheinungen der *sekundären Volta-Induktion* gar nicht erwähnt hätte, welche desto deutlicher hätten hervortreten müssen, je feiner meine Instrumente gewesen wären. Ich bemerke hier deshalb, dass obiger aus den „Berichten der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften" entlehnte Artikel in POGGENDORFF's Annalen nur eine vorläufige Notiz meiner Arbeit geben sollte, wobei die speciellere Erörterung für eine spätere Abhandlung vorbehalten wurde. Es wird genügen, hier noch anzuführen, dass ich bei jenen Versuchen den Einfluss der sekundären Volta-Induktion zwar durch angemessene Kombination der Versuche möglichst zu eliminiren gesucht habe, dass es aber jedenfalls weit vorzuziehen ist, diesen Einfluss, wie es bei den in dieser Abhandlung beschriebenen Versuchen geschehen ist, ganz zu beseitigen.

Fassen wir kurz zusammen, welchen Einfluss hiernach diese FARADAY'sche Untersuchung auf die Frage der *diamagnetischen Polarität* habe, in dem Sinne, wie sie hier gleich zu Anfang definirt worden ist, so dürfte derselbe von geringer Bedeutung erscheinen. FARADAY hat nämlich mehrere Versuche von REICH und POGGENDORFF übersehen, bei anderen Versuchen, namentlich bei den von PLÜCKER gemachten, hat er blos eine auf anderen Ansichten beruhende Erklärung gegeben, wobei es ungewiss erscheint, ob diese Ansichten mit demjenigen Sinne der *diamagnetischen Polarität*, welcher in der hier gleich zu Anfang gegebenen Definition aufgestellt worden ist, in wirklichem Widerspruche stehen. Was endlich noch besonders den Zweifel betrifft, welchen FARADAY an der Richtigkeit der Resultate meiner Versuche äussert, so dürfte *erstens* dieser Zweifel durch die obige Bemerkung gehoben sein,

zweitens findet derselbe auf die in dieser Abhandlung beschriebenen Versuche gar keine Anwendung.

12.

Feilitzsch's *Versuche und Theorie.*

In Art. 3 und 4 ist bewiesen worden, dass ein Wismuthstab in einer galvanischen Spirale als *Elektrodiamagnet* auf eine Magnetnadel ein Drehungsmoment gerade *in entgegengesetzter Richtung* wie ein Eisenstab in derselben Spirale als *Elektromagnet* ausübt. Hiermit steht nun aber das Resultat in Widerspruch, zu welchem Feilitzsch gelangt ist, indem er, geleitet durch eine andere theoretische Ansicht, ein anderes Resultat erwartete und durch Versuche zu bestätigen suchte (siehe Poggendorff's Annalen 1851, Bd. 82, S. 90—110), nämlich folgendes: „Wismuth erhält innerhalb der elektrischen Spirale eine zwar schwächere, aber eine gleichgerichtete Polarität, wie das weiche Eisen".

Der Grund dieses Widerspruchs liegt, wie ich glaube, in einer sehr wesentlichen Verschiedenheit der von mir und Feilitzsch gebrauchten Einrichtung. Feilitzsch sagt: „Die Spirale wurde etwa 200 Millimeter entfernt auf der Westseite einer kleinen, an einem Kokonfaden aufgehangenen Boussole aufgestellt, und *durch einen auf der Ostseite befindlichen Nebenmagnet* die Nadel wieder in ihre ursprüngliche Lage zurückgebracht". Von mir waren dagegen zwei Spiralen gebraucht und diese in Beziehung auf die Boussole so symmetrisch aufgestellt worden, dass es gar keines solchen *Nebenmagnets* bedurfte, um die Nadel in ihre ursprüngliche Lage zurückzubringen. Der wesentliche Unterschied beider Einrichtungen ist der, dass bei Feilitzsch die Nadel nur bei einer *bestimmten Stromintensität* im magnetischen Meridiane sich befindet, durch jede *Variation* der Stromintensität aber bald nach der einen bald nach der anderen Seite abgelenkt wird; bei mir dagegen haben die Aenderungen der Stromintensität auf den Ruhestand der Nadel gar keinen Einfluss. Diese *Unabhängigkeit des Ruhestands der Nadel von den Schwankungen der Stromintensität in der Spirale* ist aber nothwendig, wenn die bei Einlegung des Wismuthstabs in die Spirale beobachtete Ablenkung der Nadel *der unmittelbaren Wirkung des Wismuthstabs auf die Nadel* zugeschrieben werden soll; denn die Einlegung des Wismuthstabs in die Spirale bringt eine kleine Intensitätsänderung des Stroms hervor und darin kann bei Feilitzsch die Ursache der Ablenkung der Nadel gelegen haben. Es bringt nämlich die Einlegung des *kalten* Wismuthstabs in die durch den Strom *erwärmte* Spirale eine *Abkühlung* der Spirale und dadurch eine *Verstärkung* der Stromintensität hervor, welche eine *Ablenkung der Nadel in der von* Feilitzsch *beobachteten Richtung*

zur Folge haben muss. Ich habe vor längerer Zeit zahlreiche Versuche nach derselben Methode wie FEILITZSCH ausgeführt und dabei ähnliche Resultate gefunden; es zeigte sich aber bei genauerer Prüfung, dass die beobachtete Kraft *nicht momentan* in dem Augenblicke der Einlegung des Wismuthstabs eintrat, sondern *allmählig*, und ebenso beim Herausziehen nicht sogleich, sondern *allmählig* wieder verschwand, was ein genügender Beweis ist, dass es sich um keine *unmittelbare* Wirkung des Wismuthstabs handelte. Diese Einwirkungen liessen sich auch vermehren, vermindern oder umkehren durch blosse Abkühlung oder Erwärmung des Wismuthstabs. Es ist wahrscheinlich, dass auch die von FEILITZSCH beobachteten Ablenkungen der Nadel von diesen *Temperatureinflüssen* auf die Stromintensität hergerührt haben.

Ueber die *Theorie des Diamagnetismus*, welche FEILITZSCH dabei zu geben versucht hat, möge hier nur Folgendes bemerkt werden. FEILITZSCH will die diamagnetischen Erscheinungen ebenfalls aus einer bestimmten Vertheilung der magnetischen Fluida erklären; nimmt aber an, dass diese Vertheilung *von einer Scheidung der magnetischen Fluida nach gleicher Richtung wie im Eisen* herrühre, und dass der Unterschied nur darin bestehe, dass diese Scheidung im Eisenstabe von der Mitte nach den Enden zu *abnehme*, im Wismuthstabe dagegen *zunehme*. Aus dieser *Zunahme* ergiebt sich zwischen der Mitte und dem Ende des Stabs eine Ausscheidung von entgegengesetztem freien Magnetismus wie am Ende, und wenn dieser entgegengesetzte, zwischen der Mitte und dem Ende ausgeschiedene freie Magnetismus *stärker sein könnte*, als der am Ende, so würden sich daraus die diamagnetischen Erscheinungen wohl erklären lassen. Hätte aber FEILITZSCH die Bedingungen näher geprüft, unter welchen nach seiner eigenen Darstellung dieser von ihm zur Erklärung der diamagnetischen Erscheinungen vorausgesetzte Fall möglich wäre, so würde er gefunden haben, dass dieser Fall nur dann möglich ist, wenn die magnetischen Fluida in der Mitte des Stabs nicht nach gleicher, sondern nach entgegengesetzter Richtung geschieden sind wie an seinen Enden, was aber seiner Voraussetzung widerspricht. Man sieht überhaupt leicht ein, dass eine Erklärung der diamagnetischen Erscheinungen aus einer Vertheilung der magnetischen Fluida, welche von einer *der Richtung nach gleichen Scheidung wie im Eisen* herrührt, unmöglich ist.

Ueber den Zusammenhang der Lehre vom Diamagnetismus mit der Lehre von dem Magnetismus und der Elektricität.

13.

In den beiden ersten Abschnitten dieser Abhandlung ist versucht worden, das Gesetz der *diamagnetischen Polarität* in einer grösseren Allgemeinheit zu begründen, hauptsächlich dadurch, dass seine Gültigkeit auch auf die *elektrodiamagnetische* und *diamagnetelektrische* Wirkung ausgedehnt wurde. Durch dieses Gesetz allein wird aber, auch wenn es allgemein ist, noch keine *Theorie des Diamagnetismus* begründet; denn der Diamagnetismus wird dadurch nur aus seinen *Wirkungen* definirt: es gehört aber zur Begründung einer Theorie des Diamagnetismus, dass derselbe nicht blos aus seinen Wirkungen, sondern auch aus seinen *Ursachen* definirt werde. Ich werde daher in diesem Abschnitte die hiernach nothwendige Ergänzung der Theorie erörtern und dasjenige, was ich über die *Ursachen* des Diamagnetismus schon in meinem ersten Aufsatze (in den Berichten 1847 und in Poggendorff's Annalen 1848, Bd. 73[1]) gesagt habe, ausführlicher und vollständiger zu entwickeln versuchen.

14.

Ueber den Weg zur Erforschung der Ursachen des Diamagnetismus.

Man unterscheidet in der Lehre vom Magnetismus zwei Arten von Magneten, nämlich *beharrliche* und *veränderliche*. Ein Magnet von glashartem Stahle ist z. B. ein beharrlicher, ein Magnet von weichem Eisen ein veränderlicher. Genau genommen findet nun zwar in der Wirklichkeit kein strenger Gegensatz zwischen beharrlichen und veränderlichen Magneten Statt, denn alle Magnete, auch die beharrlichsten, zeigen sich unter der Einwirkung sehr grosser Kräfte veränderlich, und ebenso zeigen sich alle Magnete, auch vom weichsten Eisen, unter der Einwirkung sehr kleiner Kräfte beharrlich. Da man aber in der Regel zu physikalischen Versuchen Magnete wählt und unter Verhältnissen betrachtet, wo entweder der beharrliche oder der veränderliche Theil ihres Magnetismus nicht hervortritt, so kann jene einfache Unterscheidung in den meisten Fällen ohne Nachtheil für die Sache beibehalten werden. Bei der Betrachtung dieser beiden Arten von Magneten soll hier nun hauptsächlich folgender Unterschied, der sich zwischen ihnen machen lässt, hervorgehoben werden, dass nämlich der Magnetismus der beharrlichen Magnete, insofern sie wirklich als beharrlich betrachtet werden, nur aus seinen *Wirkungen* erforscht werden kann; der Magnetismus der

[1]) [Wilhelm Weber's Werke, Bd. III, p. 255.]

veränderlichen Magnete dagegen auf doppelte Weise, nämlich sowohl aus seinen *Wirkungen*, als auch aus seinen *Ursachen*.

Versucht man diese zunächst für Magnete aufgestellte Unterscheidung auch auf Diamagnete anzuwenden, so ergiebt sich, dass es keine *beharrlichen Diamagnete* giebt, oder vielmehr, dass beharrliche Diamagnete von beharrlichen Magneten nicht unterschieden werden können. Es kommen also nur *veränderliche Diamagnete* in Betracht, und diese lassen sich gerade so wie veränderliche Magnete auf doppelte Weise erforschen, theils aus ihren *Wirkungen*, theils aus ihren *Ursachen*.

Nun ist bekannt, dass man durch Erforschung des Magnetismus eines Magnets aus seinen (auf andere Körper ausgeübten) Wirkungen zur Kenntniss der *idealen Vertheilung* der magnetischen Fluida an der Oberfläche des Magnets gelangen kann, von welcher Gauss bewiesen hat, dass sie die Kenntniss des wahren inneren Zustands bei der Betrachtung aller *Wirkungen* vollkommen vertritt, und es ist ein grosser Gewinn für viele Forschungen, dass durch die Betrachtung der *idealen Vertheilung* ein Weg gegeben ist, alle Wirkungen einfach und vollständig, ohne Hülfe einer Hypothese über das Innere des Körpers, zusammen zu fassen, besonders dann, wenn die Ursachen jener Wirkungen unbekannt sind und erst erforscht werden sollen. Gerade daraus aber, dass diese Kenntniss von der idealen Vertheilung, welche man aus den beobachteten Wirkungen erwerben kann, zur Uebersicht aller Wirkungen so ganz Genüge leistet, leuchtet von selbst ein, dass man auf dem Grunde der beobachteten Wirkungen allein auch nicht weiter gelangen könne, als zur Kenntniss dieser idealen Vertheilung, welche doch noch von der Kenntniss der wahren inneren Natur des Magnets nothwendig unterschieden werden muss: dass man also auf dem blossen Grunde der beobachteten Wirkungen z. B. nicht im Stande ist, die wirkliche Vertheilung der im Magnete enthaltenen magnetischen Fluida, oder die wirkliche Zahl, Stärke und Anordnung der in ihm enthaltenen elektrischen Ströme zu erfahren.

Dasselbe gilt nun auch von den Wirkungen eines Diamagnets, und man könnte also zwar zur Kenntniss einer solchen *idealen Vertheilung* magnetischer Fluida an der Oberfläche eines Diamagnets gelangen und diese würde die Kenntniss seines wahren inneren Zustands in der Betrachtung aller seiner Wirkungen vollständig ersetzen, aber man würde dadurch allein weder einen Aufschluss über den wirklichen inneren Zustand des Diamagnets, noch über das eigentliche Wesen des Diamagnetismus, noch über seine Entstehung und Veränderung erhalten. Um ihnen auf die Spur zu kommen, darf man sich daher auf die Betrachtung der *Wirkungen* und der davon abhängigen *idealen Vertheilung* nicht beschränken, sondern es ist nothwendig, eine andere Betrachtung zu

Hülfe zu nehmen, welche auf einem von diesen Wirkungen unabhängigen Fundamente beruht.

Alle möglichen *Ursachen* des *Diamagnetismus*, ebenso wie des Magnetismus, lassen sich im Allgemeinen in *innere* und *äussere* scheiden. Die *äussere* Ursache ist (gleich den Wirkungen) durch die Beobachtung gegeben: sie ist für Magnetismus und Diamagnetismus dieselbe, nämlich *eine ihrer Grösse und Richtung nach bestimmte magnetische oder elektromagnetische Scheidungskraft.* Wäre ausser dieser äusseren Ursache die innere, im Körper selbst liegende, bekannt, so würde durch beide der Diamagnetismus bestimmt sein, und umgekehrt öffnet sich ein Weg, die unbekannte innere Ursache zu bestimmen, wenn ausser der bekannten äusseren Ursache der aus beiden resultirende Diamagnetismus (aus den Wirkungen) schon bekannt ist. Folgt man dem hier angedeuteten Wege und stellt die bekannten magnetischen Scheidungskräfte mit der aus den Wirkungen erforschten idealen Vertheilung sowohl für Eisen als auch für Wismuth zusammen, so ergiebt sich, dass gleiche Scheidungskraft entgegengesetzte ideale Vertheilungen beim Eisen und beim Wismuth hervorbringt, oder umgekehrt, dass eine gleiche ideale Vertheilung bei Eisen und Wismuth entgegengesetzt gerichteten Scheidungskräften entspricht. Der Grund davon, dass entgegengesetzte äussere Ursachen im Eisen und Wismuth gleiche Wirkungen hervorbringen, muss nun in der Verschiedenheit der *inneren*, im Eisen und Wismuth selbst gelegenen, Ursachen enthalten sein. Um nun die hierdurch gegebene *Verschiedenheit der inneren Ursachen* im Eisen und Wismuth näher zu bestimmen, ist es nothwendig, alle möglichen inneren Ursachen, welche solche Wirkungen, die aus einer idealen Vertheilung erklärbar sind, haben können, zu klassificiren und dann zu prüfen, ob unter allen, die wir aufzählen können, solche enthalten sind, welche von dem soeben erwähnten bei magnetischen und diamagnetischen Körpern thatsächlich vorhandenen Gegensatze Rechenschaft geben können.

15.

Klassifikation der inneren Ursachen, welche den durch eine ideale Vertheilung gegebenen Wirkungen zum Grunde liegen können.

Man kann *vier* wesentlich verschiedene Arten von *inneren*, in den Körpern gelegenen, Ursachen angeben, welche solche, aus einer idealen Vertheilung magnetischer Fluida erklärbare, Wirkungen hervorbringen können:

1. die innere Ursache solcher Wirkungen kann in der Existenz zweier *magnetischen* Fluida, welche (mehr oder weniger) *unabhängig von ihrem ponderablen Träger beweglich* sind, enthalten sein;

2. sie kann in der Existenz zweier *magnetischen* Fluida enthalten sein, welche nur *mit den Molekulen ihres ponderablen Trägers beweglich* sind (drehbare Molekularmagnete);

3. sie kann in der Existenz *beharrlicher, von den zwei elektrischen Fluidis gebildeter Molekularströme* enthalten sein, welche *mit den Molekulen* drehbar sind;

4. sie kann in der Existenz zweier *beweglicher elektrischer Fluida* enthalten sein, welche in Molekularströmung versetzt werden können.

Diese vier hier angeführten möglichen inneren Ursachen der durch eine ideale Vertheilung an der Oberfläche erklärbaren Wirkungen sind die einzigen, die man kennt und der Prüfung unterwerfen kann. Der *erste* Fall liegt der von Coulomb und Poisson entwickelten Theorie des Magnetismus zum Grunde; — der *dritte* Fall liegt dem von Ampère entwickelten Zusammenhange der Lehre vom Magnetismus mit der Elektrodynamik zum Grunde; — der *zweite* Fall lässt sich auf den dritten reduciren, indem man nach dem von Ampère bewiesenen Theoreme, dass Molekularmagnete und Molekularströme in allen ihren Wirkungen gleich sind, die ersteren für die letzteren substituirt. — Es bleibt also nur noch der *vierte* Fall übrig, der bisher unbeachtet und unerörtert geblieben ist.

16.

Abhängigkeit der idealen Vertheilung von der magnetischen Scheidungskraft, nach Verschiedenheit der aufgeführten vier möglichen inneren Ursachen.

Für jeden dieser vier Fälle ergiebt sich nun leicht ein bestimmter Zusammenhang zwischen der Art der *idealen Vertheilung* und der *Richtung der magnetischen Scheidungskraft*, der sie entspricht. Für den *ersten* Fall ergiebt sich nach Poisson's Theorie, dass, wenn man in der Richtungslinie der magnetischen Scheidungskraft diejenige Richtung als die *positive* bezeichnet, nach welcher der Nordpol einer Magnetnadel getrieben wird, und wenn man für die dieser Scheidungskraft entsprechende ideale Vertheilung die Schwerpunkte des nördlichen und südlichen Fluidums bestimmt, der erstere von diesen beiden Schwerpunkten gegen den letzteren in *positiver* Richtung verschoben ist. — Für den *dritten* Fall ist dieser Zusammenhang von Ampère entwickelt worden und es hat sich ergeben, dass hier dieselbe Abhängigkeit der idealen Vertheilung von der magnetischen Scheidungskraft Statt findet. Und aus der schon erwähnten Zurückführung des *zweiten* Falls auf den dritten leuchtet von selbst ein, dass dieselbe Abhängigkeit auch für den zweiten Fall gilt. — Es bleibt also in Beziehung auf diese Abhängigkeit nur noch der *vierte* Fall zu erörtern übrig.

Dieser *vierte* Fall setzt *elektrische Fluida* voraus, welche in Molekularströmung versetzt werden können; die Möglichkeit aber, in eine solche Molekularströmung versetzt zu werden, beruht darauf, dass in den einzelnen Molekulen, oder um sie herum, *in sich zurücklaufende Bahnen* vorhanden sind, in denen jene Fluida *ohne Widerstand* beweglich sind, woraus folgt, dass es dann nur einer *stromerregenden Kraft* (d. i. einer Kraft, welche auf das positive und negative Fluidum nach entgegengesetzten Richtungen wirkt) nach der Richtung dieser Bahn bedarf, um die Fluida in dieser Bahn wirklich zu bewegen. Nun beweist die Lehre von der Magnetelektricität, dass durch *die zunehmende oder abnehmende Intensität* einer magnetischen Scheidungskraft wirklich eine *elektromotorische Kraft* gegeben sei, welche auf die beiden beweglichen elektrischen Fluida nach entgegengesetzten Richtungen wirkt und sie also in Strombewegung setzen muss. Die *Richtung dieser Molekularströmung* ist durch das Grundgesetz der magnetischen Induktion in ihrer Abhängigkeit von der *Zunahme oder Abnahme der magnetischen Scheidungskraft* gegeben, und die *ideale Vertheilung* ist wiederum in ihrer Abhängigkeit von diesen *Molekularströmen* durch den von Ampère für den dritten Fall entwickelten Zusammenhang der Elektrodynamik mit der Lehre vom Magnetismus gegeben. Es ergiebt sich hieraus also mittelbar auch der Zusammenhang zwischen der *idealen Vertheilung* und der *Zunahme oder Abnahme der magnetischen Scheidungskraft*, der sie entspricht.

Es leuchtet aber ferner daraus ein, dass *in jedem Augenblicke*, wo eine Zunahme oder Abnahme der magnetischen Scheidungskraft Statt findet, eine solche Molekularströmung hervorgebracht werden muss, und dass sich diese nach einander hervorgebrachten Strömungen, wenn sie nicht von selbst wieder verschwinden, *summiren* müssen. Diese Strömungen verschwinden aber nicht von selbst; denn Ampère hat bewiesen, dass den elektrischen Molekularströmen *Beharrlichkeit* zugeschrieben werden muss, d. h. dass die elektrischen Fluida bei ihren Kreisbewegungen um die ponderablen Molekule keinen solchen *Widerstand* erleiden, wie die elektrischen Fluida, welche einen ponderablen Leiter durchströmen, aus dem sich das schnelle Verschwinden der elektrischen Ströme in diesen Leitern erklärt. (Auf dieser von Ampère bewiesenen *Beharrlichkeit* der Molekularströme beruht auch der oben angeführte Satz, dass die *Möglichkeit*, die elektrischen Fluida in Molekularströmung zu versetzen, voraussetze, dass in den einzelnen Molekulen, oder um sie herum, *in sich zurücklaufende Bahnen* vorhanden seien, in denen jene Fluida *ohne Widerstand* beweglich wären.) Hieraus folgt nun, dass mit *fortgesetzter* Zunahme der magnetischen Scheidungskraft auch *in der idealen Vertheilung* eine *fortgesetzte* Anhäufung

der magnetischen Fluida eintreten müsse, woraus sich ergiebt, dass *jeder gegebenen Stärke der magnetischen Scheidungskraft ein bestimmtes Moment ideal vertheilter magnetischer Fluida entspricht.* Es findet aber diese Summation nur bei *Molekularströmen* Statt, weil nur bei ihnen die Bewegung der elektrischen Fluida *keinen Widerstand* findet. Die anderen Ströme, die von der nämlichen Scheidungskraft in weiteren Bahnen hervorgebracht werden, die aber durch den *Widerstand*, den sie in diesen Bahnen finden, schnell wieder verschwinden, bringen nur *im Augenblicke ihrer Erregung* magnetische Wirkungen auf andere Körper hervor, welche mit ihnen sogleich verschwinden, sobald die Scheidungskraft, deren *Aenderung* sie hervorbrachte, *konstant* geworden ist, und die daher in keinem bestimmten Verhältnisse zur *vorhandenen* Scheidungskraft stehen, was doch nothwendig wäre, wenn sie von den beobachteten magnetischen Wirkungen Rechenschaft geben sollten, wozu daher nur *Molekularströme* brauchbar sind. Entwickelt man nun in Beziehung auf die *Molekularströme* diese Abhängigkeit genauer nach den Gesetzen der *magnetischen Induktion*, so findet man, dass, wenn in der Richtungslinie der magnetischen Scheidungskraft diejenige Richtung als die *positive* bezeichnet wird, nach welcher der Nordpol einer Magnetnadel getrieben wird, und wenn man für die von dieser Scheidungskraft abhängige ideale Vertheilung die Schwerpunkte des nördlichen und südlichen Fluidums bestimmt, der erstere von diesen beiden Schwerpunkten gegen den letzteren in *negativer* Richtung verschoben ist, d. i. *gerade umgekehrt wie für die drei anderen Fälle.*

17.

Innere Ursache des Diamagnetismus.

Dieses merkwürdige Resultat findet nun seine Anwendung auf die Begründung einer Theorie der diamagnetischen Erscheinungen, welche von dem inneren Zustande des diamagnetischen Körpers und von den Kräften, die ihn hervorbringen, Rechenschaft giebt, an der es bisher gefehlt hatte. Zu einer solchen Theorie genügt es nämlich, wie schon oben auseinander gesetzt worden ist, nicht, dass man den diamagnetischen Zustand eines Körpers in Beziehung auf alle seine Wirkungen durch eine *ideale Vertheilung* magnetischer Fluida an seiner Oberfläche zweckmässig repräsentiren kann, sondern es ist dazu wesentlich erforderlich, dass auch von denjenigen *Kräften* Rechenschaft gegeben werde, durch welche jener Zustand hervorgebracht wird, ferner davon, *worauf* diese Kräfte wirken und *nach welchen Gesetzen* sie wirken.

Aus der obigen Zusammenstellung und Betrachtung der verschiedenen möglichen Fälle, in welchen der durch eine *ideale Vertheilung*

magnetischer Fluida repräsentirbare Zustand eines Körpers zu Stande kommen könne, hat sich nur *ein einziger* ergeben, in welchem für die Abhängigkeit dieses Zustands von den äusseren Verhältnissen solche Bestimmungen resultiren, die mit den *Fundamentalerscheinungen* bei der *Entstehung* des Diamagnetismus vereinbar sind. Daraus folgt, dass von der Entstehung des diamagnetischen Zustands der Körper nur dann Rechenschaft gegeben werden kann, wenn man diesen einzigen Fall als *wirklich vorhanden* annimmt, wonach der diamagnetische Zustand aus den inducirenden Kräften, welche auf den Körper gewirkt haben, und *aus den inducirten im Körper befindlichen elektrischen Fluidis, welche ohne Widerstand in Kreisbahnen um die einzelnen Molekule beweglich sind*, hervorgeht. Es wird hiernach also angenommen, dass ein Wismuthstab aus Molekulen besteht, welche *in sich zurücklaufende Bahnen* (oder Kanäle) *enthalten, in denen die elektrischen Fluida ohne Widerstand beweglich sind*, während sie in allen anderen Bahnen nur mit Ueberwindung eines ihrer Geschwindigkeit proportionalen Widerstands beweglich sind. Die Entstehung eines *reinen*, mit Magnetismus nicht vermischten *Diamagnetismus* setzt ausserdem voraus, dass die Molekule mit jenen Bahnen oder Kanälen *nicht drehbar* sind; denn sonst würden *drehbare Molekularströme* entstehen, die, wie Ampère bewiesen hat, einen *magnetischen Zustand* zur Folge haben, wenn sich bei der Drehung ihre Intensität nicht ändert.

18.

Bestimmung der elektromagnetischen Scheidungskraft in einer galvanischen Spirale.

Nach der gegebenen Darstellung ist es nicht *die magnetische oder elektromagnetische Scheidungskraft* an und für sich selbst, welche den diamagnetischen Zustand eines Körpers hervorbringt, sondern es kommt diese Scheidungskraft bei der Bestimmung des Diamagnetismus nur mittelbar in Betracht, in sofern als dadurch die *Summe der elektromotorischen Kräfte* bestimmt wird, welche bisher auf den diamagnetischen Körper gewirkt und die elektrischen Fluida in Strombewegung um die einzelnen Molekule gesetzt haben. Von der *Summe* der elektromotorischen Kräfte, welche bisher auf den diamagnetischen Körper gewirkt haben, hängt aber *die Stärke der jetzt vorhandenen (inducirten) Molekularströme* ab, in denen das Wesen des *Diamagnetismus* besteht. Auf diese Weise dient die Bestimmung der *Intensität* der *vorhandenen* magnetischen oder elektromagnetischen Scheidungskraft nur *mittelbar* zur Bestimmung des *Diamagnetismus*, weil sie den *Integralwerth aller Aenderungen* giebt, welche die magnetische oder elektromagnetische Schei-

dungskraft erlitten hat, womit die Summe der elektromotorischen Kräfte und folglich die Stärke der jetzt vorhandenen (inducirten) Molekularströme proportional ist.

Ist nun der Leitungsdraht eines galvanischen Stroms gleichförmig um eine cylindrische Röhre gewunden, so ergiebt sich nach den bekannten elektromagnetischen Gesetzen für den Mittelpunkt der Röhre die von dem Strome nach der Richtung der Axe ausgeübte *elektromagnetische Scheidungskraft*, welche mit X bezeichnet werden soll:

$$X = \frac{2\pi n i}{d},$$ [1]

wo n die Zahl der Windungen, i die Stromintensität und $2d$ die Diagonale der Röhre (d. i. wenn $2a$ die Länge der Röhre und $2r$ der Durchmesser ist, $d = \sqrt{a^2 + r^2}$) bezeichnet. Ist hierin die Stromintensität i nach dem in der vorigen Abhandlung über elektrodynamische Maassbestimmungen (S. 321 dieses Bandes) festgesetzten absoluten Maasse ausgedrückt, so ist durch obigen Ausdruck die *elektromagnetische Scheidungskraft* nach demselben Maasse gegeben, welches Gauss zur Bestimmung der *Intensität des Erdmagnetismus* festgestellt hat.

Der angegebene Werth der *elektromagnetischen Scheidungskraft* gilt nun zwar genau genommen nur für den Mittelpunkt der Spirale; in den meisten Fällen aber kann derselbe mit hinreichender Näherung für einen sehr grossen Theil des ganzen von der Spirale eingeschlossenen Raums genommen werden, zumal wenn der Durchmesser der Spirale gegen ihre Länge sehr klein ist. Betrachtet man z. B. einen Punkt der Axe, welcher in der Entfernung b von der Mitte der Spirale liegt, so findet man für diesen Punkt

$$X = \frac{\pi n i}{a}\left[\left(1 + \frac{r^2}{(a-b)^2}\right)^{-\frac{1}{2}} + \left(1 + \frac{r^2}{(a+b)^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\right],$$

[1]) Denn bezeichnet r den Halbmesser einer Windung, x den Abstand ihres Mittelpunkts von der Mitte der Spirale, $r\,d\varphi$ die Länge eines Stromelements und i die Stromintensität, so ist bekanntlich $i r^2 d\varphi / (r^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}$ der Ausdruck der von diesem Stromelemente im Mittelpunkte der Spirale nach der Richtung ihrer Axe ausgeübten Kraft. Hieraus folgt der Ausdruck der von der ganzen Windung ausgeübten Kraft $= 2\pi r^2 i / (r^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}$, und der Ausdruck für n Windungen der Spirale, deren Länge $= 2a$ ist,

$$= 2\pi r^2 i \cdot \frac{n}{2a}\int_{-a}^{+a} \frac{dx}{(r^2 + x^2)}, \text{ d. i. wenn } \sqrt{a^2 + r^2} = d \text{ gesetzt wird, } = \frac{2\pi n i}{d}.$$

oder, wenn man $\sqrt{d^2 - r^2}$ für a, und ϱ für r/d setzt,

$$X = \frac{2\pi n i}{d}\left[1 - \frac{3\,d^2 - b^2}{2\,(d^2 - b^2)^2} \cdot \varrho^2 b^2 + \ldots\right].$$

Soll also die Differenz der elektromagnetischen Scheidungskraft, in Theilen ihres für den Mittelpunkt gültigen Maximumwerthes, den kleinen Bruch m nicht übersteigen, so setze man

$$\frac{3\,d^2 - b^2}{2\,(d^2 - b^2)^2} \cdot \varrho^2 b^2 = m$$

oder

$$\frac{b^2}{d^2} = 1 + \frac{\varrho^2}{4m + 2\varrho^2}\left(1 \pm \sqrt{\frac{16m}{\varrho^2} + 9}\right).$$

Beträgt also der Durchmesser z. B. den 40. Theil der Länge, so ist in mehr als $\frac{7}{8}$ des ganzen von der Spirale umschlossenen Raums die elektromagnetische Scheidungskraft bis auf 1 Procent konstant, und in fast $\frac{2}{3}$ dieses Raums ist sie bis auf $\frac{1}{10}$ Procent konstant.

Solche Spiralen können also dazu dienen, auf eine bequeme Weise einen seiner Länge nach beliebig ausgedehnten Raum darzustellen, für welchen die elektromagnetische Scheidungskraft eine genau bekannte, beliebig grosse und überall als gleich zu betrachtende Stärke besitzt. Die Darstellung eines solchen Raums ist aber für viele Untersuchungen von grosser Wichtigkeit und es können die in den beiden vorhergehenden Abschnitten dieser Abhandlung beschriebenen Versuche als Beispiele dafür dienen; denn diese Versuche würden ohne die Anwendung solcher Spiralen ganz unausführbar gewesen sein.

Die vorhergehende Darstellung bezieht sich eigentlich zunächst nur auf die in der Axe der Spirale gelegenen Punkte; das gefundene Resultat lässt sich aber mit Hülfe des von Gauss in der „Allgemeinen Theorie des Erdmagnetismus“ (Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins im Jahre 1838) Art. 38 [1]) gegebenen allgemeinen Lehrsatzes leicht auch auf den übrigen von der Spirale umschlossenen Raum ausdehnen.

19.

Bestimmung des Elektrodiamagnetismus aus der elektromagnetischen Scheidungskraft.

Die durch $X = 2\pi n i/d$ ausgedrückte elektromagnetische Scheidungskraft bringt nun nach der in der vorigen Abhandlung über elektrodynamische Maassbestimmungen (S. 323 dieses Bandes) gegebenen Bestimmung auf einen Kreis vom Halbmesser r während der Zeit, in

[1]) [Gauss' Werke, Bd. V, p. 170.]

welcher derselbe aus der gegen die Richtung der Scheidungskraft senkrechten Stellung in die damit parallele übergeführt wird, eine Summe oder einen Integralwerth von elektromotorischer Kraft hervor:

$$= \pi r^2 X.$$

Dieser Integralwerth ist die *Summe der Produkte* aus der nach dem a. a. O. S. 321 festgestellten absoluten Maasse ausgedrückten *Intensität* in das *Zeitelement*, in welchem die Kraft mit dieser Intensität wirkt.

Der Ausdruck dieser *Summe* bleibt unverändert, wenn, statt den Kreis um 90^0 zu drehen, die elektromagnetische Scheidungskraft $X = 2\pi n i/d$ *verschwindet*. Wächst umgekehrt diese Scheidungskraft von $X = 0$ bis $X = 2\pi n i/d$ (beim Schliessen des Stroms), so ist der Ausdruck für jene Summe:

$$-\pi r^2 X = -\frac{2\pi^2 n r^2 i}{d}.$$

Das *negative* Vorzeichen bedeutet, dass der inducirte Kreisstrom eine solche *Richtung* hat, dass die Pole eines ihm *äquivalenten* Molekularmagnets nach entgegengesetzten Seiten gerichtet sind, als die, nach welchen die Pole einer Boussole unter dem Einflusse derselben Kraft X getrieben werden.

Dieser Bestimmung des *Integralwerths* der elektromotorischen Kraft liegt das aus dem absoluten Maasse des *Magnetismus* abgeleitete Maass elektromotorischer Kräfte, wie es in der schon angeführten Abhandlung S. 321 festgestellt ist, zum Grunde, und der gegebene Ausdruck muss mit $\sqrt{\frac{1}{2}}$ multiplicirt werden, wenn er für das a. a. O. S. 361 angegebene rein *elektrodynamische* Maass gelten soll, also:

$$-\frac{\pi}{\sqrt{2}} \cdot r^2 X = -\frac{\pi^2 \sqrt{2} \,.\, n r^2 i}{d}.$$

Und dieser Ausdruck muss nach S. 367 mit $4/c$ multiplicirt werden (wo c denjenigen konstanten Werth der relativen Geschwindigkeit bezeichnet, bei welcher zwei elektrische Massen gar keine Wirkung auf einander ausüben), wenn man die elektromotorische Kraft in Theilen *des allgemeinen in der Mechanik für Kräfte festgestellten absoluten Maasses* ausdrücken will, also:

$$-\frac{2\sqrt{2}}{c} \cdot \pi r^2 X = -\frac{4\sqrt{2} \,.\, \pi^2 n r^2 i}{cd}.$$

Dieser Ausdruck giebt *die elektromotorische Kraft für die Länge der Kreisbahn*, vorausgesetzt, dass in jeder Längeneinheit dieser Bahn die Einheit des elektrischen Fluidums sich befindet; man erhält daraus *die*

elektromotorische Kraft, welche auf jede Masseneinheit des elektrischen Fluidums wirkt, durch Division mit der Kreisperipherie $2\pi r$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{c} \cdot rX = -\frac{2\sqrt{2} \, . \, \pi n r i}{c d} ;$$

d. i. der *Integralwerth der Beschleunigung* für den Zeitraum, in welchem die elektromagnetische Scheidungskraft von $X = 0$ bis $X = 2\pi n i / d$ wuchs, wenn an jede Einheit des elektrischen Fluidums eine ponderable Masseneinheit geknüpft wäre. Bezeichnet ε den unbekannten kleinen Bruch, welcher die der Einheit des elektrischen Fluidums zugehörige Masse in Theilen des ponderablen Massenmaasses ausdrückt, so giebt obiger Ausdruck, mit ε dividirt, die *Stromgeschwindigkeit u*, welche durch das angegebene *Wachsthum der elektromagnetischen Scheidungskraft* hervorgebracht worden ist. Multiplicirt man diesen Ausdruck der *Stromgeschwindigkeit u* mit $ae = 4e/c$ (siehe a. a. O. S. 367), wo e die Menge des elektrischen Fluidums nach elektrischem Maasse ausdrückt, welche in jeder Längeneinheit der Kreisbahn sich befindet, so erhält man die *Intensität* des *inducirten* Kreisstroms nach dem a. a. O. S. 359 nach rein *elektrodynamischen* Principien aufgestellten Maasse ausgedrückt; multiplicirt man ferner noch mit $\sqrt{2}$, so erhält man diese Intensität nach demjenigen Maasse bestimmt, nach welchem ein Strom von der Intensität $= 1$, wenn er die Flächeneinheit umläuft, mit der *Einheit des Magnetismus* nach absolutem Maasse identisch wirkt, nämlich:

$$-\frac{8e}{c^2\varepsilon} \cdot rX = -\frac{16\pi n r e i}{c^2 d \varepsilon} .$$

i bezeichnet die Intensität des *inducirenden* Stroms nach demselben Maasse.

Das *elektromagnetische Moment* dieses inducirten Kreisstroms (Molekularstroms) findet man durch Multiplikation der angegebenen *Stromintensität* mit dem von der Kreisbahn umschlossenen *Flächenraume* πr^2

$$= -\frac{8e}{c^2\varepsilon} \cdot \pi r^3 X = -\frac{16\pi^2 n r^3 e i}{c^2 d \varepsilon} .$$

Hierbei ist angenommen, dass die *Normale* der Kreisbahnebene mit der *Richtung* der elektromagnetischen Scheidungskraft parallel sei, was für *alle* Kreisbahnen nur bei einer *bestimmten* Anordnung der Molekule Statt finden kann. Beim *Wismuth* setzen wir keine solche Anordnung voraus, sondern nehmen vielmehr nach dem Begriffe der *Homogeneität* an, dass die Normalen der Kreisbahnen keine vorherrschende Richtung haben. Darnach muss die Zahl der Kreisbahnen, deren Normalen den Winkel φ mit der Richtung der elektromagnetischen Scheidungskraft

machen, mit $\sin\varphi$ proportional gesetzt werden. Die *Stromintensität* ergiebt sich dann mit $\cos\varphi$ proportional, und die *der Scheidungskraft parallele Komponente* des Moments mit $\cos\varphi^2$. Multiplicirt man daher obigen Ausdruck mit $\sin\varphi\cos\varphi^2$, so erhält man einen Ausdruck, welcher dem Antheile aller Kreisströme (Molekularströme), deren Normalen mit der Richtung der Scheidungskraft den Winkel φ machen, an dem *elektrodiamagnetischen Momente* des Wismuths proportional ist, nämlich:

$$-\frac{8e}{c^2\varepsilon}\cdot\pi r^3 X\,.\,\sin\varphi\cos\varphi^2 = -\frac{16\pi^2 n r^3 ei}{c^2 d\varepsilon}\cdot\sin\varphi\cos\varphi^2.$$

Multiplicirt man diesen Ausdruck mit $d\varphi$ und dann ferner den zwischen den Grenzen $\varphi = 0$ bis $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ genommenen *Integralwerth* mit der Zahl der Molekularströme m, so erhält man das ganze *elektrodiamagnetische Moment* des Wismuths ausgedrückt durch

$$= \frac{8e}{3c^2\varepsilon}\cdot\pi m r^3 X = -\frac{16\pi^2 m n r^3 ei}{3c^2 d\varepsilon}.$$

Bezeichnet v das *Volumen* des Wismuths und a den *Abstand* der Mittelpunkte seiner Molekularströme, deren Halbmesser $= r$ ist, so ist die Zahl der Molekularströme $m = v/a^3$. Vorausgesetzt nun, dass die Grösse der Molekularströme den Molekularbeständen proportional ist, also $a/r = \varkappa$ konstant, so ist die Summe der von allen Molekularströmen umlaufenen Flächen $m\pi r^2 = \pi v/\varkappa^3 r$. Substituirt man diesen Werth in dem obigen Ausdrucke des elektrodiamagnetischen Moments, so erhält man

$$-\frac{8\pi}{3c^2\varepsilon}\cdot\frac{e}{\varkappa^3}\cdot vX = -\frac{16\pi^2 ni}{3c^2 d\varepsilon}\cdot\frac{e}{\varkappa^3}\cdot v.$$

Das *elektrodiamagnetische Moment* einer Wismuthmasse ist also dem *elektromagnetischen Scheidungsmomente* X und dem Volumen der Wismuthmasse v proportional und wird daraus durch Multiplikation mit einem aus der *allgemeinen Elektricitätslehre* zu entnehmenden konstanten Faktor $8\pi/3c^2\varepsilon$, und einem von der *Beschaffenheit des Wismuths* abhängigen konstanten Faktor $-e/\varkappa^3$ gefunden. Diesen letzteren Faktor kann man die *diamagnetische Konstante* des Wismuths nennen.

20.

Vergleichung der Wechselwirkung diamagnetischer Molekule mit der Wechselwirkung magnetischer Molekule.

In der im vorigen Artikel gegebenen Bestimmung des *elektrodiamagnetischen Moments* ist die Induktion von Molekularströmen in den Kreisbahnen der Molekule *einzeln* betrachtet worden, wie wenn auf

jedes Molekule blos die aus der vorhandenen *elektromagnetischen Scheidungskraft* bestimmten elektromotorischen Kräfte gewirkt hätten. Dies ist genau genommen nicht der Fall, sondern es haben in jeder Kreisbahn ausserdem noch diejenigen elektromotorischen Kräfte mitgewirkt, welche von der *Wechselwirkung* der diamagnetischen Molekule herrührten, gerade so, wie auf ein Theilchen eines Eisenstabs nicht blos die äussere, z. B. vom Erdmagnetismus ausgeübte, Scheidungskraft wirkt, sondern auch diejenigen Scheidungskräfte, welche von der Wechselwirkung der Theilchen des Stabs unter einander herrühren.

Soll nun diese *Wechselwirkung* der diamagnetischen Molekule in Rechnung gebracht werden, wiewohl sie so klein ist, dass sie einen kaum merklichen Einfluss hat, so verdient dabei zunächst ein merkwürdiger Gegensatz hervorgehoben zu werden, welcher zwischen der Wechselwirkung *diamagnetischer* und *magnetischer* Molekule Statt findet. Befinden sich nämlich zwei *Eisentheilchen* in einer, der Richtung der auf sie wirkenden magnetischen Scheidungskraft X *parallelen*, Geraden, und bezeichnet man mit m das *magnetische Moment*, welches diese Scheidungskraft in jedem von diesen beiden Eisentheilchen, *einzeln* betrachtet, hervorbringen würde, so resultirt für jedes Theilchen aus der Wirkung des anderen eine neue Scheidungskraft, welche das Moment m *vergrössert*. Diese neue, aus der *Wechselwirkung* beider Theilchen entspringende, Scheidungskraft wird nach bekannten Gesetzen durch $2m/r^3$ ausgedrückt, wenn r den Abstand der Theilchen bezeichnet, und die *gesammte* Scheidungskraft $(X + 2m/r^3)$ bringt nun in dem betrachteten Theilchen ein *grösseres* Moment $= (1 + 2m/Xr^3)\,m$ hervor. — Befinden sich dagegen zwei *Wismuththeilchen* in einer, der Richtung der auf sie wirkenden elektromagnetischen Scheidungskraft X *parallelen*, Geraden, und wird das *diamagnetische Moment*, welches dieser Scheidungskraft entspricht, mit $-\mu$ bezeichnet (das negative Vorzeichen bedeutet, dass für gleichgerichtete Scheidungskräfte das diamagnetische Moment dem magnetischen entgegengesetzt ist), so resultirt für jedes Theilchen aus der Wirkung des anderen eine neue Scheidungskraft $= -2\mu/r^3$, wenn r der Abstand der beiden Theilchen ist, und der *gesammten* Scheidungskraft $= (X - 2\mu/r^3)$ entspricht dann das *verkleinerte* Moment $-(1 - 2\mu/Xr^3)\,\mu$. Es findet also der *Gegensatz* Statt, dass der Magnetismus der *in der Richtung der Scheidungskraft* liegenden Eisentheilchen durch Wechselwirkung *verstärkt*, der Diamagnetismus der in dieser Richtung liegenden Wismuththeilchen dagegen durch Wechselwirkung *geschwächt* wird.

Umgekehrt verhält es sich, wenn die Eisen- und Wismuththeilchen in einer gegen die Richtung der Scheidungskraft *senkrechten* Geraden liegen, wo der Magnetismus der Eisentheilchen durch Wechselwirkung

geschwächt, der Diamagnetismus der Wismuththeilchen dagegen durch Wechselwirkung *verstärkt* wird. Es ergiebt sich nämlich dann, wenn man dieselben Zeichen gebraucht, der *geschwächte Magnetismus* des Eisentheilchens $= + (1 - m/Xr^3)\, m$, der *verstärkte Diamagnetismus* des Wismuththeilchens $= - (1 + \mu/Xr^3)\, \mu$.

Hieraus folgt, dass, während man eine gegebene Masse Eisen, um ihr durch eine gegebene Scheidungskraft den stärksten *Magnetismus* zu ertheilen, in die Form eines langen und dünnen Stabs oder in die eines lang *gestreckten* Ellipsoids bringt, dessen *grosse* Axe der Richtung der Scheidungskraft *parallel* ist, so muss man dagegen eine Wismuthmasse, um ihr den stärksten *Diamagnetismus* zu ertheilen, in die möglichst dünnste Plattenform oder in die Form eines möglichst *abgeplatteten* Ellipsoids bringen, dessen *kleine* Axe der Richtung der Scheidungskraft *parallel* ist. Diese Folgerung würde sich an der Erfahrung prüfen lassen, doch ist dabei zu beachten, dass beim Wismuth der Einfluss der Wechselwirkung der Theilchen, wegen der Schwäche des einer gegebenen Scheidungskraft entsprechenden Diamagnetismus, sehr gering sein muss. Wendet man aber das gefundene Resultat auf die Prüfung des zuerst von Faraday ausgesprochenen Satzes an, dass sich nämlich Wismuth unter dem Einflusse magnetischer Scheidungskräfte ganz wie Eisen mit dem einzigen Unterschiede verhalte, dass die beiden magnetischen Fluida mit einander vertauscht erschienen, so stellt sich heraus, dass dieser Satz nicht streng richtig ist, denn darnach müsste die gestreckte ellipsoidische Form für Wismuth ebenso wie für Eisen die günstigste sein, dort den stärksten Diamagnetismus wie hier den stärksten Magnetismus darzustellen, was nicht der Fall ist. — Die Entwickelung dieser Gesetze der Wechselwirkung diamagnetischer Molekule im Vergleiche mit der Wechselwirkung magnetischer Molekule führt zu einer einfachen Unterscheidung magnetischer und diamagnetischer Stoffe, die in dem folgenden Artikel näher betrachtet werden soll.

21.

Unterscheidung magnetischer und diamagnetischer Körper durch positive und negative Werthe einer Konstanten.

Statt der nicht ganz richtigen Unterscheidung magnetischer und diamagnetischer Körper, wonach bei gleichgerichteter Scheidungskraft die beiden magnetischen Fluida nur mit einander vertauscht wären, lässt sich eine andere genau richtige und ebenso einfache Unterscheidung geben, die blos auf der Verschiedenheit der Werthe einer aus der Natur jedes Körpers zu bestimmenden *Konstante* beruht.

Beschränkt man sich nämlich der Einfachheit wegen auf die Be-

trachtung eines *Rotations-Ellipsoids* von Eisen oder Wismuth, dessen Hauptaxe der Richtung der Scheidungskraft parallel ist, so hat NEUMANN in CRELLE's „Journal für die reine und angewandte Mathematik", Bd. 37, bewiesen, dass *für Eisen* bei der Scheidungskraft X das magnetische Moment des Ellipsoids durch den Ausdruck

$$\frac{kvX}{1+4\pi kS}$$

dargestellt werde, wo v das Volumen des Ellipsoids und S eine durch das Verhältniss der Axen gegebene Grösse bezeichnet. Es ist nämlich

$$S = \sigma(\sigma^2 - 1)\left\{\frac{1}{2}\log\frac{\sigma+1}{\sigma-1} - \frac{1}{\sigma}\right\}$$

und

$$\sigma = \sqrt{1 - \frac{r^2}{\lambda^2}}.$$

r und $\sqrt{r^2 - \lambda^2}$ sind die Axen des Ellipsoids. k endlich soll darin für Eisen einen konstanten, von seiner Natur abhängigen Werth haben, welchen NEUMANN mit dem Namen der *magnetischen Konstante* des Eisens bezeichnet, und zwar ist dieser Werth bei Eisen und *allen magnetischen* Körpern nothwendig *positiv.*

Der Werth von S ergiebt sich für *ein unendlich gestrecktes Ellipsoid* $S = 0$; folglich das magnetische Moment

$$= kvX,$$

also ist für $v = 1$ und $X = 1$ das magnetische Moment $= k$. Die *magnetische Konstante* k lässt sich hiernach als der *Grenzwerth* definiren, dem sich das magnetische Moment der Volumeneinheit unter dem Einflusse der Einheit der magnetischen Scheidungskraft desto mehr nähert, ein je gestreckteres Ellipsoid aus der Volumeneinheit gebildet wird. Da die Konstante k bei allen magnetischen Körpern einen positiven Werth hat, so ist das magnetische Moment positiv oder negativ, je nachdem die Scheidungskraft positiv oder negativ ist.

Für eine *Kugel* ergiebt sich der Werth von $S = \frac{1}{3}$, folglich das magnetische Moment

$$= \frac{kvX}{1+\frac{4}{3}\pi k}.$$

Man sieht hieraus, dass bei der Kugelform des Eisens, weil k einen positiven Werth hat, auf die Volumeneinheit weniger Magnetismus kommt, als bei gestreckter Ellipsoidenform.

Der Werth von S ergiebt sich endlich für ein zu einer unendlich

dünnen Kreisscheibe abgeplattetes Ellipsoid $S = 1$, folglich das magnetische Moment

$$= \frac{kvX}{1 + 4\pi k}.$$

Die Grösse k dient nun als Unterscheidungsmerkmal verschiedener *magnetischer* Stoffe, indem ihr Werth nach Verschiedenheit der Stoffe bis Null abnehmen kann, nur aber *der Natur des Magnetismus* gemäss stets *positiv* sein muss. Man kann aber den Gebrauch der Grösse k als Unterscheidungsmerkmal verallgemeinern und ihn, statt auf magnetische Körper zu beschränken, auf alle Körper ausdehnen, indem man *negative Werthe* von k zulässt und die physische Bedeutung daran knüpft, dass ein Körper, dem ein solcher *negativer* Werth von k zugehöre, kein magnetischer, sondern ein *diamagnetischer* sei. Statt negative Werthe von k einzuführen, wollen wir bei *diamagnetischen* Körpern $-k$ schreiben. Das diamagnetische Moment eines Wismuthellipsoids, dessen Volumen $= v$ ist, und auf welches die elektromagnetische Scheidungskraft X der Hauptaxe parallel wirkt, wird alsdann ausgedrückt durch

$$- \frac{kvX}{1 - 4\pi k S},$$

wo S dieselbe Bedeutung wie oben hat. Für unendlich gestreckte Ellipsoide, wo $S = 0$, ist also das diamagnetische Moment

$$= - kvX;$$

für eine Kugel, wo $S = \frac{1}{3}$, ist dasselbe

$$= - \frac{kvX}{1 - \frac{4}{3}\pi k};$$

für ein unendlich abgeplattetes Ellipsoid, wo $S = 1$, ist es

$$= - \frac{kvX}{1 - 4\pi k}.$$

Bei der *gestrecktesten* Form kommt also auf die Volumeneinheit am *wenigsten*, bei der *abgeplattetsten* Form am *meisten* Diamagnetismus, gerade umgekehrt, als es mit dem Magnetismus der Fall war, wie schon im vorigen Artikel bewiesen worden ist.

Da aber $-k$ einen sehr *kleinen* negativen Werth auch beim Wismuth hat, welches am stärksten diamagnetisch wird, so ergiebt sich, dass der Diamagnetismus des Wismuths immer sehr nahe dem Produkte des Volumens und der Scheidungskraft proportional ist und von der Form als fast unabhängig betrachtet werden kann. Es kann daher die Bedeutung von $-k$ unmittelbar mit derjenigen *diamagnetischen Konstante* verglichen werden, von welcher am Ende des 19. Artikels die

Rede war. Auch dort wurde das diamagnetische Moment dargestellt durch das Produkt des Volumens in die Scheidungskraft multiplicirt mit einem *konstanten Koefficienten*, welcher in zwei Faktoren zerfiel, nämlich in einen aus der *allgemeinen Elektricitätslehre* zu entnehmenden $8\pi/3c^2\varepsilon$, und in einen von der *Beschaffenheit des Wismuths* abhängigen Faktor $-e/\varkappa^3$, welcher dort die *diamagnetische Konstante* des Wismuths genannt worden ist. Man sieht leicht, dass diese beiden Faktoren hier in $-k$ nicht geschieden sind und dass $-k$ also keine andere Bedeutung hat als die des Produkts jener beiden konstanten Faktoren.[1])

22.

Ueber die Existenz magnetischer Fluida.

Wenn eine gewisse Klasse von Wirkungen eines Körpers auf andere Körper so beschaffen ist, dass sie aus einer *idealen Vertheilung* magnetischer Fluida auf seiner Oberfläche erklärt werden kann, so lassen sich für die wahren Ursachen aller jener Wirkungen, welche im *Innern* des Körpers liegen, verschiedene Möglichkeiten denken und darnach vier verschiedene Fälle unterscheiden, welche Art. 14 angegeben und in den darauf folgenden Artikeln näher erörtert worden sind. Zwei dieser Fälle beruhten auf der Voraussetzung, dass *zwei magnetische Fluida* existiren, denen in den Molekulen des Körpers entweder eine *konstante* oder eine *variable* Scheidung zugeschrieben wird; die beiden anderen Fälle beruhten auf der Voraussetzung, dass die beiden nach der Elektricitätslehre vorhandenen *elektrischen Fluida* in einer bestimmten Kreisbahn um jedes Molekule des Körpers entweder in einer *konstanten* oder in einer *variablen* Strombewegung sich befänden. Diese vier verschiedenen Fälle schliessen nun, wie man leicht einsieht, keineswegs einander wechselseitig aus; denn es kann ein Theil der magnetischen Fluida in den Molekulen konstant geschieden bleiben, während die Scheidung eines anderen Theils variabel ist; und ebenso kann ein Theil der elektrischen Strömung in der für jedes Molekule gegebenen Kreis-

[1]) Es möge hierbei noch bemerkt werden, dass der *magnetische* Koefficient k sich nur nach der Theorie *scheidbarer magnetischer Fluida* (Art. 15, No. 1) *konstant* ergiebt; dass er aber nach der Theorie *drehbarer Molekularmagnete* (Art. 15, No. 2) eine Funktion der Scheidungskraft X sein muss. Der *diamagnetische* Koefficient $-k$ ist dagegen nach der Theorie der diamagnetelektrischen Induktion (Art. 15, No. 4) seiner Natur nach *konstant*, wie Art. 19 gezeigt worden ist. Es wird in den folgenden Art. 23—26 bewiesen werden, dass in Beziehung auf den *Magnetismus* die Erfahrung mit der Theorie *scheidbarer magnetischer Fluida* in Widerspruch steht und zu Gunsten *drehbarer Molekularmagnete* (oder Molekularströme Art. 15, No. 3) entscheidet, weil nämlich der Werth von k beim Eisen wirklich *nicht konstant*, sondern mit der Grösse der Scheidungskraft X veränderlich ist.

bahn konstant sein, während ein anderer Theil seiner Intensität nach variirt. In letzterer Beziehung liesse sich sogar die Existenz von *konstanten* Strömungen ohne das Hinzukommen eines *variablen Theils* bei den vielen vorhandenen elektromotorischen Kräften gar nicht begreifen, weil die elektrischen Fluida, wenn sie wirklich in bestimmten Kreisbahnen um die Molekule frei beweglich sind, wie die Existenz beharrlicher Strömungen beweist, dem Antriebe jener nach der Richtung der Kreisbahnen zerlegten elektromotorischen Kräfte nothwendig folgen müssen. Der erste und zweite Fall können daher entweder einzeln oder zugleich Statt finden; der dritte und vierte stehen aber unter einander in einem nothwendigen Zusammenhange, so dass entweder keiner von beiden oder beide zusammen Statt finden müssen. Jene vier Fälle lassen sich hiernach paarweise verbunden unter zwei Hauptfälle bringen, nämlich 1. dass zwei geschiedene oder scheidbare *magnetische Fluida* in den Molekulen des Körpers existiren, 2. dass die nach der Elektricitätslehre überall vorhandenen *elektrischen Fluida* in bestimmten Kreisbahnen um die Molekule des Körpers *frei beweglich* sind. Diese beiden Hauptfälle können aber als einander wechselseitig ausschliessend in sofern betrachtet werden, als *die wirkliche Nachweisung* eines von beiden den anderen als *überflüssige* Hypothese erscheinen lassen würde.

Nun lässt sich für jeden von diesen beiden Hauptfällen eine *Theorie* entwickeln, und jede von diesen Theorien *in zwei Theile* theilen, nämlich in einen solchen, worin beide Theorien in ihren Resultaten übereinstimmen, und in einen solchen, wo sie in ihren Resultaten einander widersprechen. Denn es verhält sich hier gerade so wie in der Optik mit der Emissionstheorie und Wellentheorie, die in ihren Resultaten ebenfalls in sehr vielen Beziehungen mit einander *übereinstimmten*, bis die Entdeckung der *Interferenzerscheinungen* zu einer näheren Erörterung desjenigen Theils führte, in welchem beide Theorien in ihren Resultaten einander *widersprechen.* Haben nun auch bis jetzt die beiden auf der Existenz *magnetischer Fluida* und auf der Existenz *elektrischer Molekularströme* beruhenden Theorien in sehr vielen Beziehungen eine bewundernswürdige Uebereinstimmung in den Resultaten ergeben, so durfte man doch auch hier, wie in der Optik, erwarten, dass endlich die Entdeckung irgend einer neuen Klasse von Erscheinungen ebenfalls zu einer näheren Erörterung desjenigen Theils führen würde, wo beide Theorien in ihren Resultaten einander widersprächen, und dass alsdann die neuentdeckten Erscheinungen die bisherige Alternative zwischen beiden Theorien entscheiden würden.[1])

[1]) Ich habe früher in den „Resultaten aus den Beob. d. magn. V. im Jahre 1839“ [Wilhelm Weber's Werke, Bd. II, p. 171] die Vermuthung zu begründen gesucht, dass die daselbst unter dem Namen der „Unipolaren Polarität“ beschriebenen Erschei-

Die beiden optischen Theorien trennten sich in den Folgerungen, welche sich aus ihnen für das *Zusammentreffen* zweier homogenen Lichtstrahlen ergaben; denn nach der einen sollte immer Verstärkung, nach der anderen bald Verstärkung bald Aufhebung Statt finden: die *Interferenzerscheinungen* bestätigten die Resultate der *Wellentheorie.* Auf ähnliche Weise kann auch der Scheideweg unserer Theorien bestimmt werden. Beide stimmen zwar 1. in allen, die Erscheinungen *beharrlicher* Magnete betreffenden Resultaten überein; 2. auch in Betreff der veränderlichen Magnete, darin, dass jede eine Eintheilung derselben *in zwei Klassen* gestattet, nämlich in solche, die ihren Magnetismus *der blossen Orientirung fertig vorhandener drehbarer Molekule* (Molekularmagnete oder Molekularströme) verdanken, und in solche, die ihren Magnetismus *der Scheidung oder Bewegung imponderabler Fluida in ruhenden Molekulen* (der Scheidung magnetischer Fluida in den Molekulen, oder der Erregung elektrischer Ströme in bestimmten Kreisbahnen um die Molekule) verdanken; 3. endlich stimmen beide Theorien auch noch in ihren Resultaten über die *erste* Klasse der veränderlichen Magnete mit einander überein; aber *sie widersprechen einander in ihren Resultaten über die zweite Klasse*; denn für diese *zweite* Klasse ergiebt sich aus den beiden Theorien *eine entgegengesetzte Lage der Pole*: nach der *einen* soll die Lage der Pole für die zweite Klasse *gleich* der für die erste Klasse sein; nach der *anderen* soll die Lage der Pole für die zweite Klasse *entgegengesetzt* der für die erste Klasse sein.

So lange man also nur solche veränderliche Magnete kannte, wo die Lage der Pole (für gleichgerichtete Scheidungskräfte) *gleich* war, so liessen sie sich nach beiden Theorien erklären, und es bedurfte nur nach der zweiten Theorie der Annahme, dass Magnete der zweiten Klasse entweder gar nicht vorkämen oder nur mit Magneten der ersteren Klasse so verbunden, dass die Wirkung der letzteren immer vorherrsche. Weil die erste Theorie einer solchen Annahme nicht bedurfte, konnte sie sogar den Vorzug zu verdienen scheinen, so lange man nur Magnete mit *gleicher* Lage der Pole für gleichgerichtete Scheidungskräfte kannte. Sobald man aber veränderliche Magnete (Diamagnete) entdeckte, wo die

nungen zu einer solchen Entscheidung führen könnten. Dies ist aber nicht der Fall, weil eine andere Erklärung von den dort beschriebenen Erscheinungen sich geben lässt, sobald zwischen den im Innern der Konduktoren sich bewegenden elektrischen Fluidis und den ponderablen Theilen der Konduktoren eine solche Verbindung Statt findet, dass jede auf die elektrischen Fluida wirkende Kraft ganz oder fast ganz auf die ponderablen Theile übertragen wird, wie ich dies in den „Elektrodynamischen Maassbestimmungen" (Abhandl. bei Begründung der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften herausgeg. v. d. F. Jabl. Ges. Art. 19, p. 309) [Wilhelm Weber's Werke, Bd. III, p. 134] näher erörtert habe.

Lage der Pole (bei gleichgerichteten Scheidungskräften) *entgegengesetzt* war, so blieb keine Wahl mehr zwischen beiden Theorien, denn es konnte dann nur die zweite Theorie gebraucht werden, weil sie allein von der Entstehung zweier Klassen von Magneten mit *entgegengesetzter* Lage der Pole bei gleichgerichteten Scheidungskräften Rechenschaft giebt.

Die von Faraday entdeckten *diamagnetischen* Erscheinungen dienen daher zur Entscheidung der Alternative zwischen diesen beiden Theorien, gerade so, wie die Interferenzerscheinungen zur Entscheidung der Alternative zwischen Emissions- und Wellentheorie in der Optik gedient haben, und dies ist die wesentlichste und wichtigste Bedeutung, welche dieser Entdeckung gegeben werden kann. Durch die Entdeckung des Diamagnetismus wird also die Hypothese *der elektrischen Molekularströme im Innern der Körper* bestätigt; die Hypothese *der magnetischen Fluida im Innern der Körper* widerlegt.

Alle unsere Hypothesen oder Vorstellungen von den Körpern finden immer nur innerhalb eines begrenzten Bereichs von Erscheinungen Geltung, und unterscheiden sich von einander durch die grössere Beschränkung oder Ausdehnung dieses Bereichs. Wir schreiben ihnen *Realität* zu, so lange wir keine Erscheinungen kennen, die ausserhalb des Bereichs, für welches sie gelten, lägen; im entgegengesetzten Falle bezeichnen wir sie als *ideal.* Wenn nun auch *die magnetischen Fluida* künftig in die Reihe der *idealen* Vorstellungen gesetzt werden müssen, so behalten sie doch die nämliche Wichtigkeit und Bedeutung, die sie bisher besassen, so oft man Betrachtungen auf denjenigen Kreis beschränkt, für welchen sie gelten. — Und wenn wir auch für jetzt *den elektrischen Molekularströmen* im Innern der Körper *Realität* zuschreiben, gleichwie dem Wellen fortpflanzenden Lichtäther in der Optik, so kann es doch geschehen, dass auch sie künftig, bei weiterer Ausbildung der Wissenschaft, in die Reiheder *idealen* Vorstellungen versetzt werden müssen.

Ueber die Abhängigkeit des magnetischen und diamagnetischen Moments von der Grösse der Scheidungskraft.

23.

Die Richtigkeit des gewonnenen Resultats, dass keine magnetischen, sondern nur elektrische Fluida wirklich existiren, für welche aber in den ponderablen Körpern zwei verschiedene Arten von Bahnen vorhanden sind, in denen sie sich bewegen können, nämlich theils solche, in welchen ihre Bewegung einen mit ihrer Geschwindigkeit proportionalen Widerstand findet, theils solche, in welchen ihre Bewegung gar keinen Widerstand findet (Molekularbahnen), beruht, den vorhergehenden Er-

örterungen gemäss, hauptsächlich auf der Betrachtung der entgegengesetzten *Lage der Pole* oder der entgegengesetzten *Richtung*, nach welcher bei gleicher magnetischer oder elektromagnetischer Scheidungskraft *die ideale Scheidung der magnetischen Fluida* in magnetischen und diamagnetischen Körpern erfolgt; es kann aber die Richtigkeit dieses Resultats noch einer weiteren Prüfung unterworfen werden, wenn man ausser der *Richtung*, nach welcher bei einer gegebenen magnetischen oder elektromagnetischen Scheidungskraft die *ideale Scheidung* der magnetischen Fluida erfolgt, ferner die *Stärke* dieser Scheidung genauer erforscht. Es findet nämlich zwar in Beziehung auf die *Stärke* dieser Scheidung kein solcher Gegensatz zwischen beiden Theorien Statt, wie in Beziehung auf die *Richtung*; doch ergiebt sich auch in ersterer Beziehung keine volle Uebereinstimmung. Eine vollständige Entscheidung der Alternative fordert daher noch die Entwickelung derjenigen Differenzen, welche zwischen beiden Theorien in Beziehung auf die *Stärke* jener idealen Scheidung Statt finden, und deren Prüfung an der Erfahrung.

Ergäbe sich von der einen Seite, wie in der Note am Ende des 21. Artikels bemerkt worden ist, dass nach der Theorie *wirklich existirender magnetischer Fluida Proportionalität* der magnetischen Momente mit den Scheidungskräften Statt finden sollte, dass aber diese Proportionalität (nach den Müller'schen Versuchen) der Erfahrung widerspreche, und liesse sich von der anderen Seite nachweisen, dass die Theorie der *Molekularströme* in keinem solchen Widerspruche mit der Erfahrung stände, so könnte die Richtigkeit der letzteren Theorie auf diesem Wege bewiesen werden, ohne dass es dazu nöthig wäre, die *diamagnetischen* Erscheinungen und die *verkehrte Lage der Pole*, welche sich dabei zeigt, zu Hülfe zu nehmen, wie es in den vorhergehenden Artikeln geschehen ist. Indessen kommt dabei ein wesentlicher Umstand in Betracht, welcher macht, dass dieser blos auf *magnetische* Versuche gegründete Beweis, wozu die *diamagnetischen* Versuche gar nicht zu Hülfe genommen zu werden brauchten, für sich allein betrachtet, nicht völlig entscheidend ist. Es giebt nämlich, wie schon Art. 14 auseinander gesetzt worden ist, unter der Voraussetzung von der *wirklichen Existenz magnetischer Fluida, zwei Arten der Entstehung* von Magneten, nämlich entweder durch *Scheidung* der magnetischen Fluida in *ruhenden* Molekulen, oder durch *Drehung* der Molekule, in denen die magnetischen Fluida *beharrlich* geschieden sind. Die schon erwähnte von Poisson und Neumann entwickelte Theorie, nach welcher *Proportionalität* der magnetischen Momente mit den Scheidungskräften Statt finden soll, betrifft aber nur die Gesetze zur Bestimmung des Magnetismus der auf die *erste* Art entstandenen Magnete, und es bedarf einer näheren Prüfung,

ob dieselben Gesetze ganz unverändert auch auf die Bestimmung des Magnetismus der auf die *zweite* Art entstandenen Magnete Anwendung finden können. Dies ist nicht der Fall, sondern es gelten für die auf die *zweite* Art entstandenen Magnete andere Gesetze, und zwar *die nämlichen,* wie für Magnete, die ihren Magnetismus der Existenz *drehbarer Molekularströme* verdanken. Wenn also die Gesetze dieser letzten Magnete mit der Erfahrung übereinstimmen, so folgt daraus von selbst, dass die Erfahrung auch mit den Gesetzen der Magnete, deren Magnetismus von *drehbaren Molekulen mit beharrlich geschiedenen magnetischen Fluidis* herrührt, übereinstimmen müsse. Folglich kann auf diese Gesetze allein keine *allgemeine* Widerlegung von der wirklichen Existenz der magnetischen Fluida gegründet werden, sondern nur eine Widerlegung der Entstehung der Magnete durch *Scheidung* der magnetischen Fluida, wie sie in der von Poisson und Neumann entwickelten Theorie angenommen wird.

Aber auch diese *partielle* Widerlegung gewinnt eine allgemeinere Bedeutung, wenn man die Gründe beachtet, durch die Poisson und Neumann sich berechtigt halten durften, eine *Scheidung* der magnetischen Fluida in ruhenden Molekulen und *keine Drehung* der Molekule mit beharrlich geschiedenen magnetischen Fluidis anzunehmen. Betrachtet man nämlich näher, wie man zur Aufstellung der Hypothese von der Existenz *magnetischer* Fluida überhaupt gekommen ist, so wird man sich leicht überzeugen, dass sie hauptsächlich auf der Analogie mit der *statischen Elektricitätslehre* beruht, und dass diese Analogie im Wesentlichen darin besteht, dass bei der Magnetisirung des Eisens eine ähnliche Scheidung der magnetischen Fluida in den Eisenmolekulen Statt finde, wie die der elektrischen Fluida bei der Elektrisirung eines Systems kleiner Konduktoren. Diese Analogie würde aber ganz verloren gehen, wenn die Magnetisirung des Eisens auf keiner *Scheidung* der magnetischen Fluida in den Eisenmolekulen, sondern auf einer *Drehung* der Eisenmolekule selbst beruhte. Es geht hieraus hervor, dass die Hypothese von der Existenz zweier magnetischen Fluida ihr ursprüngliches, auf der *Analogie mit der Elektricitätslehre* beruhendes, Fundament durch Widerlegung der von Poisson und Neumann entwickelten Theorie verlieren und fast wie eine ganz neue Hypothese zu betrachten sein würde. Es leuchtet dies auch daraus ein, dass alsdann selbst der Name der magnetischen *Fluida* gar nicht mehr passen würde, weil, wenn diese Stoffe in den Eisenmolekulen *beharrlich* geschieden und stets auf gleiche Weise fest mit den Eisentheilchen verbunden wären und nur *mit* den Eisentheilchen sich bewegen könnten, von einem *flüssigen* Aggregatzustande dieser Stoffe gar nicht die Rede sein könnte. Es würde alsdann sogar das Recht bezweifelt werden müssen, diese

Stoffe als gesondert vom Eisen zu betrachten, wenn sie in der Wirklichkeit immer und in unveränderter Weise mit den Eisentheilchen verbunden blieben; denn es würde alsdann genügen, blos *zwei Arten von Eisentheilchen* zu unterscheiden.

Die erwähnte *partielle* Widerlegung gewinnt also dadurch eine allgemeinere Bedeutung, dass sie alle *Analogie* zerstört, welche man früher zwischen den Hypothesen von den *magnetischen* und *elektrischen* Fluidis herzustellen gesucht hatte. Eine solche Analogie gab der Hypothese eine gewisse Wahrscheinlichkeit, deren wahrer Werth sich nicht genau bestimmen liess, und daher leicht zu hoch angeschlagen werden konnte, nun aber durch die oben erwähnte *Widerlegung der Scheidungstheorie* ganz wegfällt.

In demselben Verhältnisse aber, in welchem die eine Theorie, nämlich die auf der *wirklichen Existenz magnetischer Fluida* gebaute, an Wahrscheinlichkeit verliert, gewinnt die andere, nämlich die auf der *Existenz von Molekularströmen* begründete Theorie, zumal wenn sich beweisen lässt, dass die *Stärke* der magnetischen Momente für verschiedene Scheidungskräfte sich genau dieser Theorie gemäss verhalte. Die bisher blos an der beobachteten *Richtung* der Scheidung geprüfte Theorie würde dann auch durch die beobachtete *Stärke* der Scheidung geprüft und bestätigt werden. Es ergiebt sich hieraus, dass diese zweite Prüfung eine wesentliche Ergänzung und Vervollständigung der ersteren bildet, welche daher in den folgenden Artikeln ausführlich gegeben werden soll.

24.

Zusammenhang des Vorhandenseins eines Maximumwerths des magnetischen Moments mit der Annahme von der Drehbarkeit der Molekule.

Die Annahme von *drehbaren Molekularmagneten* stimmt zwar, wie schon Art. 16 angeführt worden ist, in der Bestimmung der *Lage der Pole* mit der Annahme von *scheidbaren magnetischen Fluidis* in unbeweglichen Molekulen überein; beide aber unterscheiden sich nach dem vorigen Artikel wesentlich von einander in Beziehung auf das Gesetz, nach welchem *die Stärke des Magnetismus eines Eisenstabs sich mit der Grösse der magnetischen Kraft*, welche auf das Eisen wirkt, ändern soll. Es leuchtet nämlich ein, dass, nach der *ersteren* Annahme, der Stärke des Magnetismus eine *Grenze* gesetzt ist, die sie nicht überschreiten kann, welche nämlich dem Falle entspricht, wo die Axen aller Molekularmagnete durch Drehung eine *parallele Lage* angenommen haben. Eine solche *Grenze* ist für die Stärke des Magnetismus nach der *zweiten* Annahme, so wie sie nach Coulomb, Poisson und Neumann der Theorie

zum Grunde gelegt zu werden pflegt, *nicht vorhanden*, weil nämlich darnach in den Molekulen eine *unerschöpfliche* Menge von scheidbarem neutralen magnetischen Fluidum (nach Analogie mit der Elektricitätslehre) vorausgesetzt wird.[1]) Aber wenn man auch diese letztere Annahme etwas modificiren und voraussetzen wollte, dass durch Verstärkung der auf das Eisen wirkenden Kraft nach und nach das *ganze* in den Molekulen vorhandene neutrale magnetische Fluidum geschieden werde, so ergäbe sich doch auch dann noch eine wesentliche Verschiedenheit zwischen beiden Annahmen, welche darin besteht, dass das Wachsthum des Magnetismus bei immer zunehmender Kraft, welche auf das Eisen wirkt, nach der letzteren Annahme einem ganz anderen Gesetze *vor* der Erschöpfung des neutralen magnetischen Fluidums unterworfen sein muss, wie *nachher*, dass nämlich bis zu dem Augenblicke, wo der letzte Rest von neutralem Fluidum geschieden wäre, das Verhältniss der Stärke des Eisenmagnetismus zu der Grösse der Kraft, welche auf das Eisen wirkt, *konstant* bleiben müsse (weshalb auch dieses Verhältniss mit dem Namen der *magnetischen Konstante* des Eisens bezeichnet zu werden pflegt), dass aber von jenem Augenblicke an dieses Verhältniss schnell abnehmen müsse. Nach der ersteren Annahme ergiebt sich dagegen, dass jenes Verhältniss *stets veränderlich* sei und von Anfang bis zu Ende nach einem und demselben Gesetze *stetig* abnehmen müsse.

Hierdurch wird die Möglichkeit gegeben, unmittelbar aus den *Erscheinungen des Eisenmagnetismus* zu entscheiden, ob die Magnetisirung des Eisens, *nach der Hypothese wirklich existirender magnetischer Fluida*, entweder einer *Drehung* seiner Molekule oder der *Scheidung* der magnetischen Fluida in seinen Molekulen zugeschrieben werden müsse. Im ersteren Falle können aber die drehbaren Molekule ebensowohl Träger von *Molekularströmen* wie von beharrlich geschiedenen *magnetischen Fluidis* sein, während in dem letzteren Falle die Existenz der magnetischen Fluida als erwiesen angesehen werden müsste, weil nur bei der *Drehung* der Molekule, aber nicht bei der *Scheidung* der magnetischen Fluida in den Molekulen (durch eine gegebene magnetische oder elektromagnetische Scheidungskraft) eine Stellvertretung für die magnetischen Fluida durch elektrische Ströme möglich ist.

Durch die schon angeführten MÜLLER'schen Versuche müsste nun

[1]) Nach dieser Annahme wird nämlich der magnetische Gleichgewichtszustand dadurch definirt, dass an der Oberfläche aller Molekularkonduktoren eine Vertheilung der beiden magnetischen Fluida Statt findet, welche auf alle Punkte im Innern der Molekule solche Kräfte ausüben, dass dadurch die Wirkung aller äusseren Scheidungskräfte aufgehoben wird. Hieraus folgt leicht, dass bei Verdoppelung der äusseren Scheidungskräfte auch die Menge des magnetischen Fluidums an der Oberfläche aller Molekule verdoppelt werden müsse u. s. w.

die *letztere* Annahme von *scheidbaren magnetischen Fluidis* in undrehbaren Molekulen als widerlegt angesehen werden, und es bliebe nur noch zu prüfen übrig, ob die *stetige Abnahme* des Verhältnisses der Stärke des Eisenmagnetismus zur Grösse der auf das Eisen wirkenden Scheidungskraft, wie sie MÜLLER durch seine Versuche bestimmt hat, mit dem nach der *ersteren* Annahme aus einer bestimmten *Drehbarkeit* der Molekule abzuleitenden Gesetze übereinstimme oder nicht, wobei es unbestimmt gelassen werden kann, ob diese Molekule die Träger von geschiedenen magnetischen Fluidis oder von Molekularströmen sind. Indessen sind die MÜLLER'schen Versuche von BUFF und ZAMMINER (Annalen der Chemie und Pharmacie von LIEBIG, WÖHLER und KOPP Bd. 75, S. 83) wiederholt und die von MÜLLER gefundenen Resultate dadurch nicht bestätigt worden. Vielmehr glauben BUFF und ZAMMINER durch ihre Versuche bewiesen zu haben, dass das Verhältniss der Stärke des Eisenmagnetismus zu der Grösse der auf das Eisen wirkenden Kraft (abgesehen von dem Einflusse der Koercitivkraft, wenn das Eisen nicht vollkommen weich ist) wirklich *konstant* sei, so weit als es mit den jetzt vorhandenen Hülfsmitteln geprüft werden könne, was nur nach der Annahme *scheidbarer* magnetischer Fluida in undrehbaren Molekulen möglich sein würde. Die Annahme *drehbarer Molekularmagnete*, und folglich auch die *drehbarer Molekularströme*, müsste hiernach verworfen werden und die *wirkliche Existenz der magnetischen Fluida* würde also dadurch als wirklich begründet erscheinen.

Es schien hiernach vor Allem nöthig, dieselben Versuche nochmals zu dem Zwecke zu wiederholen, um den vorliegenden Widerspruch zu entscheiden. Ich werde daher im folgenden Artikel die von mir gemachten Versuche und die besonderen Einrichtungen, welche ich getroffen habe, um ein sicheres Resultat zu gewinnen, beschreiben, woraus sich eine Bestätigung des MÜLLER'schen Resultats ergeben hat, ein Resultat, was auch nach einigen, schon vor MÜLLER, von JOULE angestellten und in *The Annals of Electricity etc. by W. Sturgeon* Vol. V, p. 472 mitgetheilten Versuchen erwartet werden konnte.

25.

Versuche zum Beweise des Vorhandenseins eines Maximumwerths des magnetischen Moments.

Aus den von MÜLLER gemachten Versuchen hatte sich ergeben, dass bei gleichen Kräften, welche auf das Eisen wirken, die Abnahme des Verhältnisses der Stärke des Eisenmagnetismus zur Grösse der auf das Eisen wirkenden Kraft bei *dünnen* Eisenstäben leichter als bei dicken wahrgenommen werden könnte. Es kommt daher bei der Ver-

gleichung der von Müller mit den von Buff und Zamminer gemachten Versuchen wesentlich in Betracht, dass der dünnste von Müller gebrauchte Stab nur 6, der dünnste von Buff und Zamminer gebrauchte Stab aber 9 Millimeter dick war, und diese Verschiedenheit der Dicke wird durch ihr Verhältniss zur Länge noch einflussreicher, indem der dünnere Stab von Müller 330, der dickere von Buff und Zamminer nur 200 Millimeter lang war. Ich habe mich zu den folgenden Versuchen eines noch dünneren Stabs als Müller bedient, nämlich von 3,6 Millimeter Dicke bei 100,2 Millimeter Länge und 8190 Milligramm Masse. Es ergab sich, dass sich der Magnetismus eines solchen dünnen Stabs durch die aus der Ferne hervorgebrachte Ablenkung eines kleinen Spiegelmagnetometers noch mit grosser Genauigkeit messen liess. Die einzige Schwierigkeit, welche die Anwendung eines so dünnen Stabs bietet, besteht in der genauen Scheidung der vom Eisenmagnetismus und der vom galvanischen Strome herrührenden Wirkungen auf das Magnetometer. Es leuchtet nämlich ein, dass, wenn man dieselbe galvanische Spirale zur Magnetisirung sowohl dicker als auch dünner Stäbe gebraucht, wie es von Müller, Buff und Zamminer geschehen ist, diese Scheidung bei den dünnen Stäben weniger Genauigkeit gestattet, weil die Wirkung der Spirale dieselbe bleibt und daher für dünnere Stäbe verhältnissmässig grösser als für dickere ist. Zu den folgenden Versuchen wurde daher eine Spirale gebraucht, welche nicht weiter war, als zum Hineinlegen des dünnen Stabs nöthig war. Auch hiermit habe ich mich noch nicht begnügt, sondern habe das Ende des Spiraldrahts noch zweimal *in umgekehrter Richtung* um die Mitte der Spirale in einem viel weiteren Kreise herumgewunden, so dass der von diesen beiden Windungen begrenzte Flächenraum dem von allen Windungen der engen Spirale begrenzten Flächenraume gleich war. Dadurch wird nach den bekannten Gesetzen des *Elektromagnetismus* bewirkt, dass der Strom unmittelbar gar keine Wirkung auf das entfernte Magnetometer ausübt, was sich leicht durch Versuche prüfen und bestätigen lässt. Die ganze am Magnetometer beobachtete Wirkung rührt dann blos von dem *Eisenmagnetismus* her, der sich dann mit gleicher Schärfe und Genauigkeit wie der Magnetismus harter Stahlmagnete nach der von Gauss in der Intensitas etc. gegebenen Anleitung durch Ablenkungsversuche aus der bekannten Intensität des Erdmagnetismus nach *absolutem Maasse* bestimmen lässt.

Als ein wesentlicher Umstand ist noch hervorzuheben, dass die von Müller, Buff und Zamminer gebrauchten Spiralen kürzer als die dadurch magnetisirten Eisenstäbe waren. Bei Müller war dieser Unterschied nur gering, indem die Eisenstäbe nur 15 Millimeter zu beiden Seiten aus der Spirale hervorragten; bei Buff und Zamminer war er

aber viel grösser, indem die Enden des längsten und dünnsten Stabs 45 Millimeter zu beiden Seiten aus der Spirale hervorragten. Ausserdem wurde der davon herrührende Einfluss bei BUFF's und ZAMMINER's Versuchen verhältnissmässig dadurch noch verstärkt, dass die Länge des in der Spirale eingeschlossenen Theils nur 110 Millimeter betrug, bei MÜLLER dagegen 300 Millimeter. Dieser Umstand dürfte der Hauptgrund von der scheinbaren Differenz der Resultate sein, zu denen diese Beobachter gelangt sind; denn es leuchtet ein, dass die Wirkung der Spirale auf das Eisen in der Mitte der Spirale am stärksten ist, nach den Enden aber abnimmt, und dass diese Abnahme ausserhalb der Spirale ausserordentlich gross ist. Daraus folgt, dass wenn auch bei wachsender Stromstärke die in dem mittleren Theile des Stabs hervorgebrachte Wirkung einem Grenzwerthe sich näherte, eine solche Annäherung bei den ausserhalb der Spirale befindlichen Theilen noch keineswegs merklich sein konnte. Bei den folgenden Versuchen wurde eine Spirale gebraucht, welche bedeutend länger als der Eisenstab war, so dass nach den Art. 18 entwickelten Gesetzen die von der Spirale auf die Enden des Stabs ausgeübte Kraft von der auf die Mitte nicht merklich verschieden war, wodurch allein ein sicheres Resultat erhalten werden konnte.

Ich begnüge mich hier, ohne auf eine Beschreibung der Versuche im Einzelnen einzugehen, welche nicht nöthig erscheint, weil sie bis auf die eben angegebenen Verschiedenheiten mit der von MÜLLER, BUFF und ZAMMINER gegebenen Beschreibung nahe übereinstimmen würde, die auf diese Weise gewonnenen Resultate in der folgenden Tafel kurz zusammen zu stellen. Ich bemerke nur, dass jede einzelne Bestimmung auf viermaligem Wechsel der Stromrichtung beruht, wobei sich stets die grösste Uebereinstimmung ergab, zum Beweise, dass die Koercitivkraft des Eisens der Genauigkeit der Resultate keinen Eintrag that. Ferner wäre es leicht gewesen, den Einfluss der Temperatur des Eisenstabs zu berücksichtigen, indem diese Temperatur durch einen Wasserstrom konstant erhalten worden wäre; doch ergab sich, dass der Einfluss mässiger Temperaturänderungen so gering war, dass zu seiner genaueren Bestimmung die Messungen mit einer noch viel grösseren Feinheit hätten ausgeführt werden müssen, wozu besondere neue Einrichtungen hätten getroffen werden müssen, welche sogleich zu beschaffen nicht möglich war. Die nach bekannten Regeln in der Tafel gemachte Zurückführung des Eisenmagnetismus auf *absolutes* Maass bedarf hier keiner weiteren Erläuterung. Auch die Stromstärke ist mit Hülfe einer Tangentenboussole nach *absolutem* Maasse bestimmt worden und es ist dabei die von MÜLLER schon erwähnte, zu grösserer Genauigkeit nothwendige Korrektion, welche von dem Verhältnisse der Nadellänge zum

Durchmesser des galvanischen Rings abhängt, da sie leicht auszuführen war, genau ermittelt und berücksichtigt worden. Diese Kenntniss der Stromstärke nach *absolutem* Maasse ist aber ferner dazu benutzt worden, um mit Hülfe der *Zahl* der Windungen der Spirale, durch welche der Strom ging, und ihrer *Dimensionen*, die Grösse der auf das Eisen wirkenden Kraft nach demselben *absoluten* Maasse zu bestimmen, nach welchem der *Erdmagnetismus* ausgedrückt wird, um dadurch jene Kraft mit der bekannten *Intensität der erdmagnetischen Kraft* vergleichbar zu machen. In der folgenden Tafel ist in der Kolumnenüberschrift diese Kraft mit X bezeichnet. Der gefundene Eisenmagnetismus M ist mit der in Milligrammen ausgedrückten Masse des Eisens $p = 8190$ dividirt, und der so auf die Masseneinheit reducirte Magnetismus ist in der Kolumnenüberschrift mit m bezeichnet worden.

No.	X	m
1.	658,9	911,1
2.	1381,5	1424,0
3.	1792,0	1547,9
4.	2151,0	1627,3
5.	2432,8	1680,7
6.	2757,0	1722,7
7.	3090,6	1767,3
8.	3186,0	1787,7
9.	2645,6	1707,9
10.	2232,1	1654,0
11.	1918,7	1584,1
12.	1551,2	1488,9
13.	1133,1	1327,9
14.	670,3	952,0

Diese Tafel zerfällt, wie man sieht, in zwei Abtheilungen, nämlich in eine, wo die Grösse der Kraft, welche auf das Eisen wirkt, zunimmt, und in eine andere, wo sie abnimmt. Man sieht aber aus der Fig. 7 gegebenen graphischen Darstellung, dass die Versuche der letzteren Abtheilung, welche darin mit No. 8 bis 14 bezeichnet sind, sehr gut zu den Versuchen der ersten, welche mit No. 1 bis 7 bezeichnet sind, passen. Bei dem letzten Versuche der ersten Abtheilung hatte der Eisenstab eine höhere Temperatur erreicht und es wurde vor dem Beginne der folgenden Versuche so lange gewartet, bis er wieder abgekühlt war. Dessenungeachtet sieht man, dass beide Versuche den übrigen sich gleich gut anreihen, ein Beweis also, dass der Einfluss dieser Temperaturdifferenz sehr gering gewesen sein müsse.

Es geht also aus diesen Versuchen offenbar das Resultat hervor, dass das Verhältniss der Stärke des Eisenmagnetismus zur Grösse der

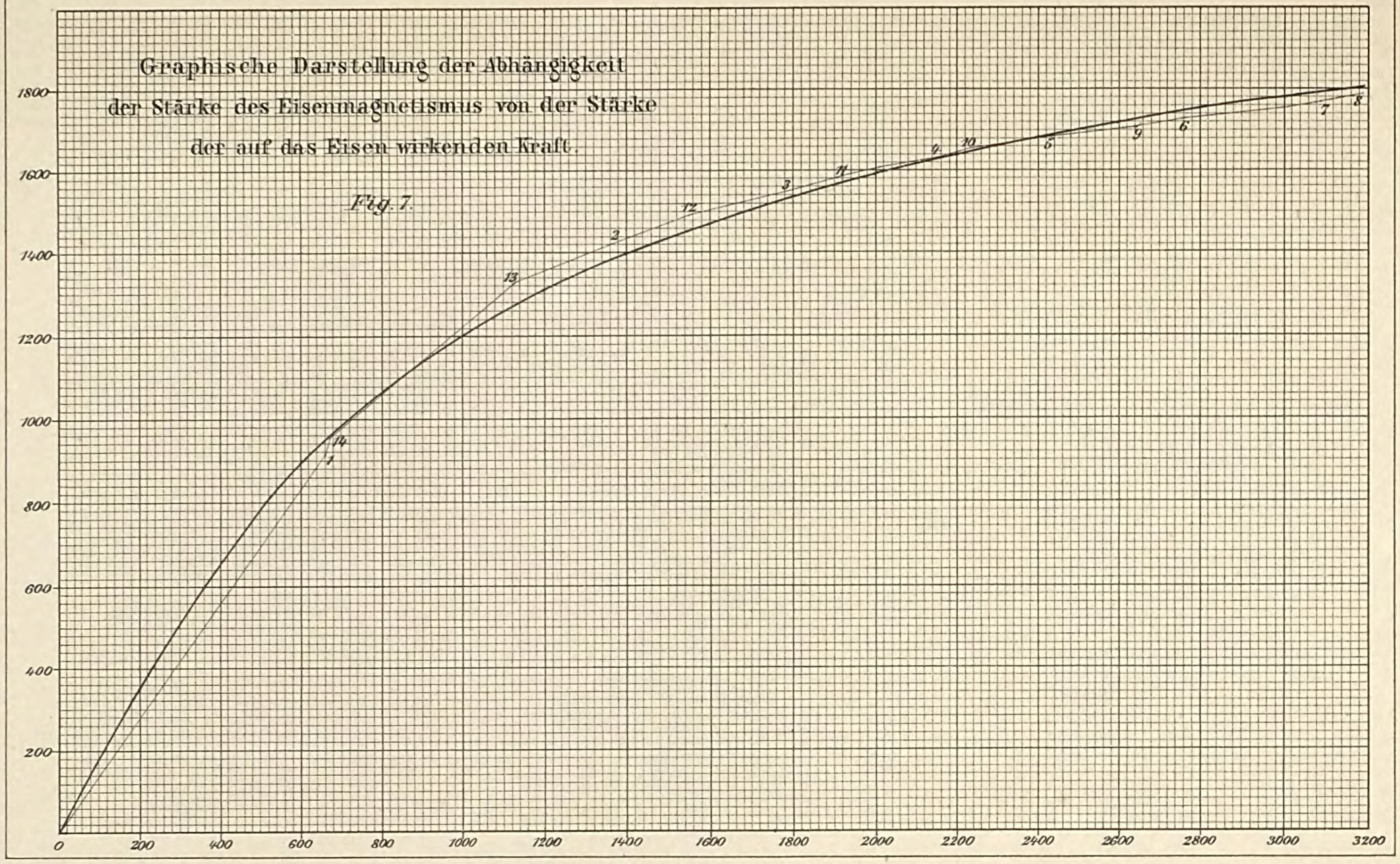

Graphische Darstellung der Abhängigkeit
der Stärke des Eisenmagnetismus von der Stärke
der auf das Eisen wirkenden Kraft.
1800
1600
1400
1200
1000
800
600
400
200
0
200
400
600
800
1000
1200
1400
1600
1800
2000
2200
2400
2600
2800
3000
3200

Fig. 7.

auf das Eisen wirkenden Kraft *veränderlich* ist, und es ist darnach höchst wahrscheinlich, dass der Eisenmagnetismus sich einem *Grenzwerthe* nähert, den er nie überschreiten kann. Es leuchtet ein, dass es unmöglich ist, die Versuche so weit fortzusetzen, dass dieser Grenzwerth unmittelbar durch die Beobachtungen erhalten und bestimmt würde. Eine solche unmittelbare Bestimmung des Grenzwerths ist aber nicht nothwendig, weil es im Grunde genügt, dass die *stetige Veränderung* jenes Verhältnisses bewiesen ist. Dieselben Versuche sind noch von anderen Beobachtern mit ganz gleichem Erfolge wiederholt worden und ich glaube, dass die daraus gezogenen Resultate keinem Zweifel unterliegen. Es wird dadurch also das von Müller gefundene Resultat im Wesentlichen bestätigt.

26.

Das Gesetz der Abhängigkeit des magnetischen Moments von der Grösse der Scheidungskraft nach der Annahme von der Drehbarkeit der Molekule, und Vergleichung mit den Versuchen.

Es bleibt nun näher zu erörtern übrig, ob die durch obige Versuche gefundene Veränderlichkeit der Stärke des Eisenmagnetismus bei verschiedener Grösse der auf das Eisen wirkenden Kräfte mit demjenigen Gesetze übereinstimme, welches sich aus der Annahme einer bestimmten *Drehbarkeit* der Molekule folgern lässt. Findet dieses Statt, so leuchtet von selbst ein, dass man mit Ampère auch annehmen kann, dass diese Molekule die Träger von *Molekularströmen* sind, wodurch die Erklärung der *Entstehung* und der *Veränderungen* des Eisenmagnetismus, ebenso wie die seiner *Wirkungen*, von der Annahme *magnetischer Fluida* ganz unabhängig gemacht und blos auf die Annahme *elektrischer Fluida* zurückgeführt werden könnte.

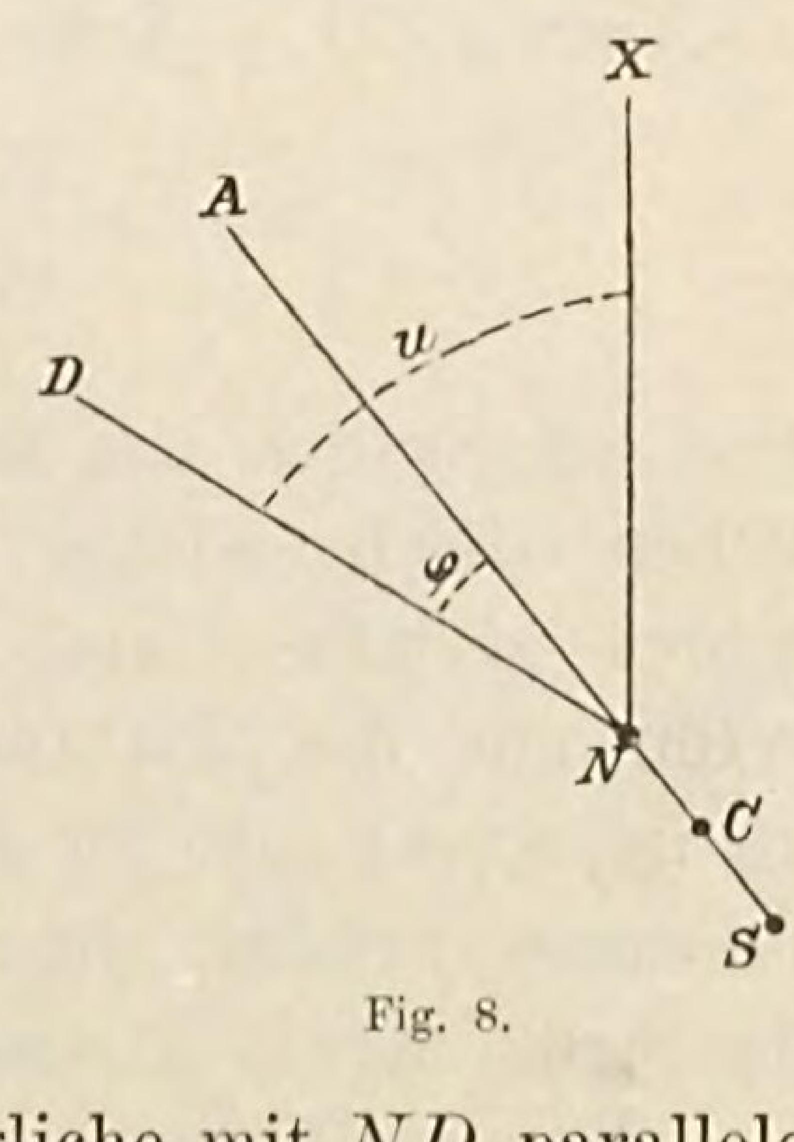


Fig. 8.

Es sei Fig. 8 NS ein Molekularmagnet, welcher sich um seinen Mittelpunkt C drehen kann; ND sei die Richtung, mit welcher seine magnetische Axe beim Gleichgewicht parallel ist, wenn die äussere Kraft $X = 0$ ist. Die Thatsache, dass beim weichen Eisen der durch eine äussere auf das Eisen wirkende Kraft hervorgebrachte Magnetismus von selbst wieder verschwindet, sobald die äussere Kraft zu wirken aufhört, beweist, dass der Molekularmagnet, auf dessen Drehung der hervorgebrachte Magnetismus beruhte, von selbst wieder in seine ursprüngliche mit ND parallele Lage zurückgetrieben werde. Diese in der Wechselwirkung der Molekule

begründete zurücktreibende Kraft muss aber mit der Grösse der Ablenkung $AND = \varphi$ wachsen und kann durch

$$D \sin \varphi$$

dargestellt werden, wo D eine konstante Grösse bezeichnet, welche man die *molekulare Direktionskraft* nennen kann. Wirkt nun ausser dieser molekularen Direktionskraft auf den Molekularmagnet nach der Richtung NX die äussere Kraft X, welche mit der Richtung der Direktionskraft den Winkel $XND = u$ einschliesst, so wird der Molekularmagnet dadurch um den Winkel $AND = \varphi$ gedreht oder abgelenkt, und man hat dann zur Bestimmung der neuen Gleichgewichtslage folgende Gleichung:

$$X \sin u \cos \varphi = (D + X \cos u) \sin \varphi$$

oder

$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{X \sin u}{D + X \cos u}.$$

Aus dieser Ablenkung φ lässt sich nun die *Zunahme* des nach der Richtung der Kraft X zerlegten *magnetischen Moments* des Molekuls bestimmen. Wird nämlich das ganze magnetische Moment des Molekuls mit μ bezeichnet, so war das nach der Richtung der Kraft X zerlegte vor der Ablenkung

$$= \mu \cos u,$$

nach der Ablenkung

$$= \mu \cos (u - \varphi),$$

folglich die gesuchte Zunahme x

$$x = \mu (\cos (u - \varphi) - \cos u).$$

Substituirt man hierin für φ den durch obige Gleichung $\operatorname{tang} \varphi = X \sin u / (D + X \cos u)$ gegebenen Werth, so erhält man

$$x = \mu \left\{ \frac{X + D \cos u}{\sqrt{X^2 + D^2 + 2XD \cos u}} - \cos u \right\}.$$

Für ein System von Molekulen, deren magnetische Axen beim ursprünglichen Gleichgewichte nach allen Richtungen des Raums ohne Unterschied gerichtet sind, ist die Zahl der Molekule, deren magnetische Axen mit der Richtung NX der Kraft X den Winkel u bilden, mit $\sin u$ proportional zu setzen. Es soll nun das magnetische Moment y bestimmt werden, welches aus der Drehung *aller* Molekule des Systems durch die Kraft X resultirt.

Man multiplicire zu diesem Zwecke den oben gefundenen Werth von x mit $\sin u \, du$ und nehme dann den Integralwerth von $u = 0$ bis

$u = \pi$. Dieser Integralwerth, mit der Anzahl der Molekule n multiplicirt und mit $\int_0^\pi \sin u \, du = 2$ dividirt, giebt das gesuchte *Moment* y

$$y = \frac{n}{2} \int_0^\pi x \sin u \, du.$$

Durch Ausführung der Integration erhält man hiernach für y folgenden Ausdruck:

$$y = n\mu \frac{X}{\sqrt{X^2 + D^2}} \cdot \frac{X^4 + \frac{7}{6} X^2 D^2 + \frac{2}{3} D^4}{X^4 + X^2 D^2 + D^4}.\text{[1]}$$

Die Kraft, welche auf das Eisen wirkte, und durch welche dieses Moment hervorgebracht wurde, war $= X$. Bezeichnet n die Zahl der Molekule *in der Volumeneinheit*, so hat das Verhältniss des Moments y zu der Kraft X, durch die es hervorgebracht wird, in der *Drehungstheorie* dieselbe Bedeutung, welche in der *Scheidungstheorie* die Grösse hat, welche NEUMANN, in CRELLE's Journal für die reine und angewandte Mathematik Bd. 37, bei der Bestimmung des magnetischen Zustands eines Rotationsellipsoids, welcher durch vertheilende Kräfte erregt ist, mit k bezeichnet. Substituirt man daher in NEUMANN's Rechnung für den von ihm als konstant betrachteten Werth von k den eben gefundenen variablen Werth y/X, so ergiebt sich, wenn n die Zahl der Molekule in der Volumen- oder Masseneinheit angiebt, *der auf die Volumen- oder Masseneinheit reducirte Magnetismus* des Eisens m durch folgende Gleichung:

[1] [Dieser Werth von y ist ein Näherungswerth, der strenge Ausdruck lautet

$$\text{für } X < D \quad y = \tfrac{2}{3} n\mu \frac{X}{D}, \qquad \text{für } X > D \quad y = n\mu \left(1 - \frac{1}{3} \frac{D^2}{X^2}\right).$$

WILHELM WEBER hat die Verbesserung mit folgenden Worten angezeigt:]

(Aus den Berichten der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, mathematisch-physische Klasse 1852.)

WILHELM WEBER, *Verbesserung einer Formel in den elektrodynamischen Maassbestimmungen.*

S. 572, Zeile 22 der letzten Abhandlung über elektrodynamische Maassbestimmungen im ersten Bande der Abhandlungen der mathematisch-physischen Klasse der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften ist für y statt des strengen Ausdrucks ein Näherungswerth gesetzt worden. Ich verbessere dieses Versehen, indem ich bemerke, dass dasselbe keinen merklichen Einfluss auf die daraus abgeleiteten numerischen Angaben hat. Es ergiebt sich nämlich der genaue Integralwerth von y für alle Werthe von X, welche kleiner als D sind, $y = \frac{2}{3} n\mu X/D$; für alle Werthe von X, welche grösser als D sind, $y = n\mu (1 - \frac{1}{3} D^2/X^2)$.

$$m = \frac{y}{1 + 4\pi S \frac{y}{X}} \text{ für die Volumeneinheit,}$$

$$m = \frac{y}{1 + 4\pi S \varrho \frac{y}{X}} \text{ für die Masseneinheit,}$$

wo ϱ die Dichtigkeit des Eisens und S einen von der Gestalt abhängigen Faktor bezeichnet (siehe Art. 21).

Hiernach lässt sich nun die Stärke des Eisenmagnetismus m aus der Grösse der auf das Eisen wirkenden Kraft X berechnen, wenn die Werthe der beiden dem Eisen eigenthümlichen Konstanten $n\mu$ und D, und, zur Reduktion auf die *Masseneinheit*, seine Dichtigkeit ϱ gegeben sind. Setzt man

$$n\mu = 2324{,}68,$$
$$D = 276{,}39,$$

so erhält man, da die Dichtigkeit des Eisens $\varrho = 7{,}78$ ist, folgende Vergleichung der Rechnung mit der Beobachtung, wobei jedoch bemerkt werden muss, dass zur Bestimmung des Zahlenfaktors S statt der cylindrischen Form des Eisens eine ihr möglich nahe kommende ellipsoidische Form substituirt werden musste, wonach $S = 1/249$ erhalten wurde.

No.	X	m beobachtet	m berechnet	Unterschied
1.	658,9	911,1	948,4	— 37,3
2.	1381,5	1424,0	1387,0	+ 37,0
3.	1792,0	1547,9	1533,0	+ 14,9
4.	2151,0	1627,3	1623,5	+ 3,8
5.	2432,8	1680,7	1685,0	— 4,3
6.	2757,0	1722,7	1742,2	— 19,5
7.	3090,6	1767,3	1791,2	— 23,9
8.	3186,0	1787,7	1803,4	— 15,7
9.	2645,6	1707,9	1723,6	— 15,7
10.	2232,1	1654,0	1644,8	+ 9,2
11.	1918,7	1584,1	1568,9	+ 15,2
12.	1551,2	1488,9	1452,9	+ 36,0
13.	1133,1	1327,9	1276,8	+ 51,1
14.	670,3	952,0	957,5	— 5,5

Beachtet man, dass bei diesen Versuchen zur Messung der Intensität der Ströme als Tangentenboussole eine gewöhnliche auf einer Spitze drehbare Boussole, die blos 60 Millimeter lang war, gebraucht wurde, wo die Bruchtheile eines Grads nicht mit Sicherheit beobachtet werden konnten und daher die Intensität leicht um 1 Procent zu klein oder zu gross gefunden werden konnte, so leuchtet ein, dass man keine voll-

kommnere Uebereinstimmung der Rechnung mit der Beobachtung erwarten durfte, als die, welche obige Tafel wirklich zeigt. In der graphischen Darstellung Fig. 7 sind die berechneten Werthe durch eine *stärkere* Linie, die beobachteten durch eine *feinere* Linie verbunden. Es scheint hierdurch die *Drehbarkeit* der Eisenmolekule ausser Zweifel gesetzt. Und da man nun diese Eisenmolekule nach Ampère als die Träger von *Molekularströmen* betrachten kann, so ist dadurch eine vollständige Uebereinstimmung aller magnetischen Erscheinungen, auch derjenigen, welche an *veränderlichen* Magneten beobachtet werden, mit der Theorie der *Molekularströme* bewiesen und es ist dadurch eine wichtige Bestätigung dieser Theorie durch die *magnetischen* Erscheinungen gewonnen worden, als Gewähr der vorher gegebenen Begründung derselben durch die *diamagnetischen* Erscheinungen.

27.

Anwendung auf die Art. 10 gemachte Vergleichung.

Das im vorigen Artikel aus der Theorie drehbarer Molekule abgeleitete Gesetz zur Bestimmung der Stärke des Eisenmagnetismus nach seiner Abhängigkeit von der magnetischen oder elektromagnetischen Scheidungskraft findet seine wichtigste Anwendung auf die Konstruktion starker Elektromagnete, wie überhaupt aller elektromagnetischen Instrumente, deren Wirkung von der Stärke des Eisenmagnetismus abhängt. Da aber diese Anwendung, auf welche Joule und Müller besonders aufmerksam gemacht haben, mit dem hier erörterten Gegenstande (Diamagnetismus) nicht unmittelbar zusammenhängt, so beschränke ich mich darauf, hier blos die Anwendung obigen Gesetzes auf die Art. 10 gemachte Vergleichung der Stärke eines Elektrodiamagnets aus seinen *magnetischen* und *magnetelektrischen* Wirkungen beizufügen, weil darauf Art. 10, S. 512 verwiesen worden ist.

Es ist nämlich Art. 10 der *Wismuthmagnetismus* mit dem *Eisenmagnetismus* auf doppelte Weise verglichen worden, *erstens* durch die von beiden hervorgebrachten *Ablenkungen einer Magnetnadel, zweitens* durch die von beiden, bei gleicher Bewegung in einem geschlossenen Leiter, *inducirten elektrischen Ströme.* Aus beiden Vergleichungen lässt sich die Stärke des *Wismuthdiamagnetismus* nach absolutem Maasse bestimmen, wenn die Stärke des *Eisenmagnetismus* nach absolutem Maasse bekannt ist. Es kommt also nur darauf an, obiges Gesetz unter den bei jener Vergleichung gegebenen Verhältnissen auf die Bestimmung des Eisenmagnetismus anzuwenden, um für den Wismuthdiamagnetismus *zwei* von einander unabhängige Bestimmungen zu erhalten, welche durch ihre Uebereinstimmung *das Gesetz der diamagnetischen Polarität* be-

stätigen. Nun ist zwar schon Art. 10 das aus den MÜLLER'schen Versuchen abgeleitete Gesetz unter den dort angegebenen Verhältnissen auf diese Bestimmung des Eisenmagnetismus angewendet, jedoch dabei bemerkt worden, dass das daraus gefundene Resultat keineswegs als ganz sicher und genau gelten könne, und es wird daher zu grösserer Sicherheit und Genauigkeit gereichen, das im vorigen Artikel schärfer bestimmte Gesetz darauf anzuwenden.

Es war nämlich Art. 10 der, nach der Note S. 508, durch eine elektromagnetische Kraft $X = 629{,}9$ im Wismuth hervorgebrachte *Diamagnetismus* mit dem durch dieselbe Kraft im Eisen hervorgebrachten *Magnetismus durch die von beiden auf eine Magnetnadel ausgeübten Drehungsmomente* verglichen und ihr Verhältniss wie

$$1:1\,470\,000$$

gefunden worden. Nach diesem Verhältnisse kann der *Diamagnetismus nach absolutem Maasse* bestimmt werden, wenn der *Eisenmagnetismus nach absolutem Maasse* bekannt ist. Nun ist aber nach dem vorigen Artikel für $X = 629{,}9$

$$\frac{y}{x} = 3{,}3959.$$

Substituirt man ferner, wie im vorigen Artikel, der cylindrischen Form des Eisenstäbchens, welches 92 Millimeter lang und 0,1016 Millimeter dick war, eine möglich nahe kommende ellipsoidische Form, so erhält man nach NEUMANN

$$S = \frac{1}{138\,780}$$

und man findet damit, wenn $\varrho = 7{,}78$ gesetzt wird,

$$\log m = \log \frac{yT}{X} - \log\left(1 + 4\pi S\varrho\,\frac{y}{X}\right) = 3{,}329\,19,$$

also den *Eisenmagnetismus nach absolutem Maasse*

$$m = 2134.$$

Für diesen Werth des *Eisenmagnetismus* erhält man aber nach dem angeführten Verhältnisse den derselben Kraft $X = 629{,}9$ entsprechenden *Dimagnetismus des Wismuths, nach absolutem Maasse*

$$= \frac{1}{1\,470\,000} \cdot 2134 = \frac{1}{689}\cdot$$

Es war ferner nach Art. 10 der, nach Note S. 508, durch eine elektromagnetische Kraft $X = 3012$ im Wismuth hervorgebrachte *Diamagnetismus* mit dem durch dieselbe Kraft im Eisen hervorgebrachten *Magnetismus durch die Intensität der von ihnen bei ihrer Bewegung in einem geschlossenen Leiter erregten elektrischen Ströme* verglichen und

ihr Verhältniss wie 1 : 456 700 oder, nach der Art. 10 S. 508 für das Wismuth angegebenen Reduktion, wie

$$1 : 360\,740$$

gefunden worden. Nach diesem Verhältnisse kann nun ebenfalls der *Diamagnetismus nach absolutem Maasse* bestimmt werden, wenn der *Eisenmagnetismus nach absolutem Maasse* bekannt ist. Nun ist aber nach dem vorigen Artikel für $X = 3012$

$$\frac{y}{X} = 0{,}771\,33.$$

Substituirt man nun auch hier der cylindrischen Form des Eisenstäbchens, welches 186 Millimeter lang und 0,8342 Millimeter dick war, eine möglich nahe kommende ellipsoidische Form, so erhält man nach NEUMANN

$$S = \frac{1}{9747},$$

und hiermit, für $\varrho = 7{,}78$,

$$\log m = \log \frac{yT}{X} - \log \left(1 + 4\pi S \varrho \frac{y}{X}\right) = 3{,}362\,74,$$

also den *Eisenmagnetismus nach absolutem Maasse*

$$m = 2305{,}4.$$

Für diesen Werth des *Eisenmagnetismus* erhält man aber nach dem angeführten Verhältnisse den derselben Kraft $X = 3012$ entsprechenden *Diamagnetismus des Wismuths nach absolutem Maasse*

$$= \frac{1}{360\,740} \cdot 2305{,}4 = \frac{1}{156{,}5}.$$

Reducirt man endlich diese für verschiedene Werthe der Kraft X bestimmte Stärke des Diamagnetismus durch Division mit X auf denjenigen Werth, welcher der Einheit der Kraft X entspricht, so erhält man nach der *ersteren* Vergleichung (durch *magnetische* Wirkungen) für *die Stärke des durch die Einheit der Kraft in der Masseneinheit des Wismuths hervorgebrachten Diamagnetismus nach absolutem Maasse* den Werth

$$\frac{1}{629{,}9} \cdot \frac{1}{689} = \frac{1}{434\,000};$$

aus der *letzteren* Vergleichung (durch *elektrische* Wirkungen) erhält man dagegen

$$\frac{1}{2301} \cdot \frac{1}{156{,}5} = \frac{1}{471\,300}.^{1)}$$

1) Nach diesem Verhältnisse ergiebt sich leicht, wenn das aus der *magnetischen* Wirkung des Wismuths gefundene Resultat nach S. 506 . $= \frac{1}{1470000}$ angenommen wird,

Im Mittel also aus beiden, nach Verhältniss der Art. 10 schon näher erörterten Umstände wohl übereinstimmenden, Vergleichungen ergiebt sich *die Stärke des durch die Einheit der Kraft in der Masseneinheit des Wismuths hervorgebrachten Diamagnetismus nach absolutem Maasse*

$$= \frac{1}{452\,000}.$$

Aus den im vorigen Artikel angeführten Formeln findet man aber *den Grenzwerth des durch die Einheit der Kraft in der Masseneinheit des Eisens hervorgebrachten Magnetismus nach demselben absoluten Maasse* ausgedrückt

$$= 5{,}6074,$$

d. i. 2 540 000 Mal grösser als den Diamagnetismus.

Für *kleine Scheidungskräfte* und *dünne Eisenstäbe*, für welche der Eisenmagnetismus zum Wismuthdiamagnetismus nahe in einem *konstanten* Verhältnisse steht, ergiebt sich also der *Wismuthdiamagnetismus* etwa $2\frac{1}{2}$ *Millionen* Mal kleiner als der *Eisenmagnetismus.* Je grösser aber die Scheidungskräfte und je dicker die Eisenstäbe werden, desto mehr wächst der Diamagnetismus des Wismuths im Vergleiche zum Magnetismus des Eisens, so dass er z. B. in dem Art. 10 angeführten Falle bis zu dem 360 740. Theile des Eisenmagnetismus stieg, welches der grösste Werth desselben ist, der in obigen Versuchen vorkommt.

das aus der *magnetelektrischen* Wirkung abgeleitete $= \frac{4340}{4713} \cdot \frac{1}{1470000} = \frac{1}{1596000}$, was also statt des S. 512 angegebenen Werths $= \frac{1}{1731560}$, welcher gefunden worden war, indem die Müller'schen Versuche bei der Reduktion des Eisenmagnetismus zum Grunde gelegt wurden, zu setzen ist. Das hier gefundene genauere Resultat ist übrigens a. a. O. unter Verweisung auf diese Note schon angeführt worden.

XII.

Ueber den Zusammenhang der Lehre vom Diamagnetismus mit der Lehre von dem Magnetismus und der Elektricität.

Von

W. Weber.

(Auszug aus den Abhandlungen der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften. I. p. 483—578; auch in der besonders erschienenen Schrift: „Abhandlungen über elektrodynamische Maassbestimmungen von Wilh. Weber Leipzig, Weidmann'sche Buchhandlung, 1852.)

[Annalen für Physik und Chemie, herausgegeben von J. C. Poggendorff, Bd. 87, Leipzig 1852, p. 145—189.]

I. Theorie.

Man unterscheidet in der Lehre vom *Magnetismus beharrliche* und *veränderliche* Magnete, und betrachtet z. B. einen Magnet von hartem Stahle als einen beharrlichen, einen Magnet von weichem Eisen als einen veränderlichen. Fände zwischen beiden Arten ein strenger Gegensatz Statt (was ebenso wenig wie bei den in der Elektricitätslehre unterschiedenen Konduktoren und Isolatoren der Fall ist), so würde der Magnetismus der beharrlichen Magnete blos aus den *Wirkungen*, der Magnetismus der veränderlichen Magnete aus den *Ursachen* sowohl als auch aus den *Wirkungen* erforscht werden können. Jedenfalls sind, auch wenn jener Gegensatz nicht streng gilt, die *veränderlichen* Magnete *zu einer vollständigen Erforschung des Magnetismus* (aus seinen Ursachen und Wirkungen) mehr geeignet als die *beharrlichen.*

Man könnte in der Lehre vom *Diamagnetismus* auf gleiche Weise zwischen *beharrlichen* und *veränderlichen Diamagneten* zu unterscheiden versuchen; es würde aber alsdann *kein Merkmal zur Unterscheidung beharrlicher Diamagnete von beharrlichen Magneten* geben, wodurch diese Unterscheidung alle praktische Bedeutung verliert. Es kommen daher bei Erforschung des Diamagnetismus nur *veränderliche Diamagnete* in Betracht, die sich auf doppelte Weise, theils aus ihren *Ursachen,* theils aus ihren *Wirkungen* erforschen lassen.

Nun ist bekannt, dass man durch Erforschung des *Magnetismus* eines Magnets aus seinen (auf andere Körper ausgeübten) *Wirkungen* zur Kenntniss der *idealen Vertheilung* der magnetischen Fluida an der Oberfläche des Magnets gelangen kann, von welcher GAUSS bewiesen hat, dass sie die Kenntniss des *wahren inneren Zustands* bei der Betrachtung aller *Wirkungen* vollkommen vertritt, und es ist ein grosser Gewinn für viele Forschungen, dass durch die Betrachtung der *idealen Vertheilung* ein Weg gegeben ist, alle Wirkungen einfach und vollständig, *ohne Hülfe einer Hypothese über das Innere des Körpers,* zusammen zu fassen, besonders dann, wenn die Ursachen jener Wirkungen noch unbekannt sind und erst erforscht werden sollen. Gerade daraus aber, dass diese Kenntniss von der *idealen Vertheilung,* welche man aus den beobachteten Wirkungen erwerben kann, zur Uebersicht *aller Wirkungen* so ganz Genüge leistet, leuchtet von selbst ein, dass man auf dem Grunde der *beobachteten Wirkungen allein* auch nicht weiter gelangen könne, als zur Kenntniss dieser *idealen Vertheilung,* welche doch noch von der Kenntniss der *wahren inneren Natur des Magnets* nothwendig unterschieden werden muss; dass man also auf dem blossen Grunde der *beobachteten Wirkungen* z. B. nicht im Stande ist, die wirkliche Vertheilung der im Magnete enthaltenen magnetischen Fluida, oder die wirkliche Zahl, Stärke und Anordnung der in ihm enthaltenen elektrischen Ströme zu erfahren.

Dasselbe gilt nun auch von den *Wirkungen eines Diamagnets* und man könnte also durch deren *Beobachtung* zwar zur Kenntniss der *idealen Vertheilung* magnetischer Fluida an der Oberfläche des Diamagnets gelangen, und dieselbe würde die Kenntniss seines *wahren inneren Zustandes in der Betrachtung aller seiner Wirkungen* vollkommen ersetzen; aber man würde dadurch allein weder einen Aufschluss über den *wahren inneren Zustand* selbst, noch über das *eigentliche Wesen des Diamagnetismus, seine Entstehung und Veränderungen* erhalten. Um ihnen auf die Spur zu kommen, darf man sich daher auf die Betrachtung der Wirkungen und der davon abhängigen *idealen* Vertheilung nicht beschränken, sondern es ist nothwendig, eine andere Betrachtung zu Hülfe zu nehmen, welche *auf einem von diesen Wirkungen unabhängigen Fundamente* beruht.

Alle möglichen Ursachen des Diamagnetismus (ebenso wie des Magnetismus) lassen sich im Allgemeinen in *innere* und *äussere* scheiden. Die *äussere* Ursache ist (gleich den Wirkungen) *durch die Beobachtung* gegeben: sie ist für Magnetismus und Diamagnetismus dieselbe, nämlich *eine ihrer Grösse und Richtung nach bestimmte magnetische oder elektromagnetische Scheidungskraft.* Wäre ausser dieser *äusseren* Ursache auch noch die *innere,* im Körper selbst liegende, bekannt, so würde durch beide der Diamagnetismus selbst vollständig bestimmt sein und um-

gekehrt öffnet sich ein Weg, *die unbekannte innere Ursache* zu bestimmen, wenn ausser der bekannten *äusseren Ursache* der aus beiden resultirende *Diamagnetismus* (durch seine Wirkungen) bekannt ist. Folgt man dem hier angedeuteten Wege und stellt *die bekannten magnetischen Scheidungskräfte* mit der aus den Wirkungen erforschten *idealen Vertheilung* sowohl für *Eisen* als auch für *Wismuth* zusammen, so ergiebt sich, dass gleiche Scheidungskraft entgegengesetzte ideale Vertheilungen beim Eisen und beim Wismuth hervorbringt, oder umgekehrt, dass *eine gleiche ideale Vertheilung bei Eisen und Wismuth entgegengesetzt gerichteten Scheidungskräften* entspricht. Der Grund davon, dass entgegengesetzte äussere Ursachen im Eisen und Wismuth gleiche Wirkungen hervorbringen, muss nun *in der Verschiedenheit der inneren, im Eisen und Wismuth selbst gelegenen Ursachen* enthalten sein. Um nun die hierdurch *gegebene Verschiedenheit der inneren Ursachen* im *Eisen* und *Wismuth* näher zu bestimmen, ist es nothwendig, *alle möglichen inneren Ursachen,* welche Wirkungen, die aus einer *idealen Vertheilung* erklärbar sind, haben können, *zu klassificiren,* und dann zu prüfen, ob unter allen, die wir aufzählen können, solche enthalten sind, welche von dem soeben erwähnten, *bei magnetischen und diamagnetischen Körpern unter gleichem äusseren Einflusse thatsächlich vorhandenen, Gegensatze* Rechenschaft geben.

Klassifikation der inneren Ursachen, welche den durch eine ideale Vertheilung gegebenen Wirkungen zum Grunde liegen können.

Wir können *vier* wesentlich verschiedene Arten von *inneren*, in den Körpern gelegenen, Ursachen angeben, welche solche aus einer idealen Vertheilung magnetischer Fluida erklärbare Wirkungen hervor zu bringen fähig sind:

1. die innere Ursache solcher Wirkungen kann in der Existenz zweier *magnetischen* Fluida, welche (mehr oder weniger) *unabhängig von ihrem ponderablen Träger* beweglich sind, enthalten sein;
2. sie kann in der Existenz zweier *magnetischer* Fluida enthalten sein, welche nur *mit den Molekulen ihres ponderablen Trägers beweglich* sind (drehbare Molekularmagnete);
3. sie kann in der Existenz *beharrlicher von den elektrischen Fluidis gebildeten Molekularströme* enthalten sein, welche *mit den Molekulen* drehbar sind;
4. sie kann in der Existenz der *elektrischen Fluida* enthalten sein, welche *in Molekularströmung* versetzt werden können.

Diese *vier* hier angeführten möglichen inneren Ursachen der durch eine *ideale Vertheilung* an der Oberfläche erklärbaren Wirkungen sind

die einzigen, die man kennt und der Prüfung unterwerfen kann. — Der *erste* Fall liegt der von Coulomb und Poisson entwickten Theorie des Magnetismus zu Grunde, — der *dritte* Fall liegt dem von Ampère entwickelten Zusammenhange der Lehre vom Magnetismus mit der Elektrodynamik zum Grunde; — der *zweite* Fall lässt sich auf den dritten reduciren, indem man, nach dem von Ampère bewiesenen Theoreme, dass Molekularmagnete und Molekularströme in allen ihren Wirkungen gleich sind, die ersteren für die letzteren substituirt. — Es bleibt also nur noch der *vierte* Fall übrig, der bisher unbeachtet und unerörtert geblieben ist.

Für jeden dieser vier Fälle ergiebt sich nun ein bestimmter Zusammenhang zwischen der Art der *idealen Vertheilung* und der *Richtung der magnetischen Scheidungskraft*, der sie entspricht. Für den *ersten* Fall ergiebt sich nach Poisson's Theorie, dass, wenn man in der Richtungslinie der magnetischen Scheidungskraft diejenige als die *positive* bezeichnet, nach welcher der Nordpol einer Magnetnadel getrieben wird, und wenn man für die dieser Scheidungskraft entsprechende *ideale Vertheilung* die Schwerpunkte des nördlichen und südlichen Fluidums bestimmt, der erstere von diesen beiden Schwerpunkten gegen den letzteren in *positiver* Richtung verschoben ist. — Für den *dritten* Fall ist dieser Zusammenhang von Ampère entwickelt worden und es hat sich ergeben, dass hier dieselbe Abhängigkeit der *idealen Vertheilung von der magnetischen Scheidungskraft* Statt findet. — Und aus der schon erwähnten Zurückführung des *zweiten* Falls auf den dritten leuchtet von selbst ein, dass dieselbe Abhängigkeit auch für den zweiten Fall gilt. — Es bleibt also in Beziehung auf diese Abhängigkeit nur noch der *vierte* Fall zu erörtern übrig.

Dieser *vierte* Fall setzt *elektrische Fluida* voraus, welche in Molekularströme versetzt werden können; die *Möglichkeit* aber, in Molekularströmung versetzt zu werden, beruht für die elektrischen Fluida darauf, dass in den einzelnen Molekulen, oder um sie herum, *in sich zurücklaufende Bahnen* vorhanden, in denen jene Fluida *ohne Widerstand* beweglich sind, woraus folgt, dass es alsdann nur einer *stromerregenden Kraft* (d. i. einer Kraft, welche auf das positive und negative Fluidum nach entgegengesetzten Richtungen wirkt) nach der Richtung dieser Bahn bedarf, um die Fluida in dieser Bahn *wirklich zu bewegen*. Nun beweist die Lehre von der Magnetelektricität, dass durch *die zunehmende oder abnehmende Intensität einer magnetischen Scheidungskraft* wirklich eine *stromerregende* (elektromotorische) Kraft gegeben sei, welche auf die beiden beweglichen elektrischen Fluida nach entgegengesetzten Richtungen wirkt und sie also *in Strombewegung setzen muss. Die Richtung dieser Molekularströmung* ist durch das Grundgesetz der magne-

tischen Induktion *in ihrer Abhängigkeit von der Zunahme oder Abnahme der magnetischen Scheidungskraft* gegeben, und die *ideale Vertheilung* ist wiederum in ihrer Abhängigkeit von diesen *Molekularströmen* durch den von Ampère für den dritten Fall entwickelten Zusammenhang der Elektrodynamik mit der Lehre vom Magnetismus gegeben. Es ergiebt sich hieraus also mittelbar auch der Zusammenhang zwischen der *idealen Vertheilung und der Zunahme oder Abnahme der magnetischen Scheidungskraft,* der sie entspricht.

Hieraus aber leuchtet ein, dass *in jedem Augenblicke,* wo eine Zunahme oder Abnahme der magnetischen Scheidungskraft Statt findet, *eine solche Molekularströmung* hervorgebracht werden muss, und dass sich diese nacheinander hervorgebrachten Strömungen, wenn sie nicht von selbst wieder verschwinden, *summiren* müssen. Diese Strömungen verschwinden aber *nicht* von *selbst*; denn Ampère hat bewiesen, dass den elektrischen *Molekularströmen Beharrlichkeit* zugeschrieben werden muss, d. h. die elektrischen Fluida erleiden bei ihren Kreisbewegungen um die ponderablen Molekule keinen solchen *Widerstand*, wie die elektrischen Fluida, welche einen ponderablen Leiter durchströmen, aus dem sich das schnelle Verschwinden der elektrischen Ströme in diesen Leitern erklärt. (Aus dieser den *Molekularströmen* nothwendig zukommenden *Beharrlichkeit* leuchtet von selbst ein, dass die *Möglichkeit*, die elektrischen Fluida *in Molekularströmung* zu versetzen, wie schon angeführt worden ist, darauf beruht, dass in den Molekulen oder um sie herum, *in sich zurücklaufende Bahnen* vorhanden sind, in denen jene Fluida *ohne Widerstand beweglich* sind.) Daraus folgt, dass mit *fortgesetzter Zunahme der magnetischen Scheidungskraft* eine *fortgesetzte Anhäufung der magnetischen Fluida, nach der idealen Vertheilung,* verbunden sei, woraus sich ergiebt, dass *jeder gegebenen Stärke der magnetischen Scheidungskraft ein bestimmter Moment der idealen Vertheilung* entspricht. Es findet aber diese *Summation* nur bei *Molekularströmen* Statt, weil nur bei ihnen *die Bewegung der elektrischen Fluida keinen Widerstand* findet. Die *anderen* Ströme, die von der nämlichen Scheidungskraft in weiteren Bahnen hervorgebracht werden, die aber durch den Widerstand, den sie in diesen Bahnen finden, schnell verschwinden, bringen nur *im Augenblicke ihrer Erregung* (bei wachsender oder abnehmender Scheidungskraft) magnetische Wirkungen auf andere Körper hervor, welche sogleich verschwinden, sobald die Scheidungskraft *konstant* geworden ist und die daher zur Grösse der *vorhandenen Scheidungskraft* in gar keiner Beziehung stehen, die doch nothwendig Statt finden muss, wenn *von den Wirkungen veränderlicher Magnete oder Diamagnete* Rechenschaft gegeben werden soll, wozu daher nur *Molekularströme* brauchbar sind. Entwickelt man nun *in Betreff dieser Molekularströme*

nach den Gesetzen der *magnetischen Induktion* die Abhängigkeit des Moments der *idealen Vertheilung* von der Grösse der *vorhandenen Scheidungskraft*, so findet man, dass, wenn in der Richtung der magnetischen Scheidungskraft diejenige als die *positive* bezeichnet wird, nach welcher der Nordpol einer Magnetnadel getrieben wird, und wenn man für die von dieser Scheidungskraft abhängige *ideale Vertheilung* die Schwerpunkte des nördlichen und südlichen Fluidums bestimmt, der erstere von diesen beiden Schwerpunkten gegen den letzteren in *negativer* Richtung verschoben ist, d. i. *gerade umgekehrt wie für die drei anderen Fälle*, wonach sich von der *inneren Ursache des Diamagnetismus* Rechenschaft geben lässt.

Innere Ursache des Diamagnetismus.

Dieses merkwürdige Resultat gestattet also eine Anwendung auf die Begründung einer *Theorie der diamagnetischen Erscheinungen,* welche von den *Kräften, die sie hervorbringen,* Rechenschaft giebt, an der es bis jetzt gefehlt hat. Zu einer solchen *Theorie* genügt es nämlich nicht, dass man den diamagnetischen Zustand eines Körpers in Beziehung auf alle seine *Wirkungen* durch eine *ideale Vertheilung* magnetischer Fluida an seiner Oberfläche zweckmässig *repräsentiren* kann, sondern es ist dazu wesentlich erforderlich, dass auch von den *Kräften* Rechenschaft gegeben werde, durch welche jener Zustand *hervorgebracht* wird, so wie auch davon, *nach welchen Gesetzen* und *worauf* diese Kräfte wirken.

Aus der obigen Zusammenstellung und Betrachtung der verschiedenen *möglichen* Weisen, wie der *durch eine ideale Vertheilung magnetischer Fluida repräsentirbare Zustand eines Körpers* entstehen könne, hat sich nur *ein einziger Fall* ergeben, in welchem für die Abhängigkeit *der idealen Vertheilung von der magnetischen Scheidungskraft* ein mit den *Fundamentalerscheinungen* bei der *Entstehung* des Diamagnetismus übereinstimmendes Gesetz resultirt. Daraus folgt, dass von der *Entstehung* des diamagnetischen Zustands der Körper nur dann Rechenschaft gegeben werden kann, wenn dieser Fall als *wirklich vorhanden* angenommen wird, wonach die *Zunahme des Diamagnetismus* eines Körpers der *inducirenden Kraft* proportional ist, welche auf die im Körper befindlichen, *in bestimmten Kreisbahnen um die Molekule ohne Widerstand beweglichen, elektrischen Fluida* wirken, und die Geschwindigkeit ihrer Bewegung in diesen Bahnen *beschleunigen.* Es wird also hiernach z. B. der Wismuthdiamagnetismus aus der Annahme erklärt, dass die Wismuthmolekule bestimmte *in sich zurücklaufende Bahnen* (oder Kanäle) *enthalten, in denen die elektrischen Fluida ohne Widerstand beweglich sind,* während diese Fluida in allen anderen Bahnen

nur mit Ueberwindung eines ihrer Geschwindigkeit proportionalen Widerstands beweglich sind. Die Entstehung eines *reinen* (nicht mit Magnetismus vermischten) *Diamagnetismus* würde ausserdem voraussetzen, dass die jene Bahnen oder Kanäle enthaltenden Molekule nicht *drehbar* sind, weil sonst *drehbare Molekularströme* Statt finden könnten, die so stark wären, dass ein Theil ihrer Intensität bei der Drehung als *konstant* betrachtet werden könnte und also nach Ampère einen *magnetischen Zustand* zur Folge haben würde. Dieser Annahme gemäss kann der *Diamagnetismus* oder *Elektrodiamagnetismus* eines Körpers aus der auf denselben wirkenden *magnetischen* oder *elektromagnetischen Scheidungskraft* bestimmt werden.

Bestimmung des Diamagnetismus oder Elektrodiamagnetismus eines Körpers aus der auf ihn wirkenden magnetischen oder elektromagnetischen Scheidungskraft.

Die durch X ausgedrückte *magnetische* oder *elektromagnetische Scheidungskraft*[1]) übt auf einen Kreis vom Halbmesser r *elektromotorische Kräfte* aus, deren Integralwerth für den Zeitraum, in welchem dieser Kreis aus der gegen die Richtung der Scheidungskraft senkrechten Stellung in die damit parallele geführt wird, nach der in Art. 11 der Widerstandsmessungen in meinen elektrodynamischen Maassbestimmungen[2]) gegebenen Bestimmung,

$$= \pi r^2 X$$

ist. Dieser Integralwerth ist die *Summe der Produkte* aus der nach

[1]) Jede *magnetische Scheidungskraft* kann ihrer Intensität nach mit dem *Erdmagnetismus verglichen* und *nach demselben Maasse* angegeben werden. Die *elektromagnetische Scheidungskraft* einer cylindrischen Spirale, durch welche ein Strom von der Intensität i geht, wird nach dem Fundamentalgesetze des Elektromagnetismus durch $2\pi ni/\sqrt{a^2+r^2}$ ausgedrückt, wo n die Zahl der Spiralwindungen, r den Halbmesser und a die Länge der Axe bezeichnet. Dieser Werth gilt zunächst für die Scheidungskraft im Mittelpunkt des Cylinders, nähert sich aber dem für jeden anderen Punkt des inneren Raumes mit Ausnahme derjenigen, welche nahe am Ende liegen, desto mehr, je länger die Spirale und je kleiner ihr Halbmesser ist. Wenn daher ein Wismuthstab in der Mitte einer solchen Spirale sich befindet, so wirken auf alle seine Theile nahe *gleiche elektromagnetische Scheidungskräfte*, und er kann darin auch innerhalb gewisser Grenzen *verschoben* werden, ohne dass diese Kräfte sich merklich ändern. Daher eignet sich eine solche Spirale besonders zu solchen Versuchen, bei welchen der *Diamagnetismus unverändert* bleiben soll. — Obiger Ausdruck giebt die *elektromagnetische Scheidungskraft* in demselben Maasse an, nach welchem die *magnetischen Scheidungskräfte* bestimmt werden (nämlich nach dem zur Bestimmung der Stärke der erdmagnetischen Kraft festgesetzten *absoluten Maasse*), wenn i die Stärke des *Stabmagnetismus* bezeichnet, dessen Wirkung den Wirkungen des die *Flächeneinheit umströmenden Stroms* gleich ist.

[2]) [Wilhelm Weber's Werke, Bd. III, p. 323.]

dem a. a. O. Art. 10 festgestellten *absoluten Maasse* ausgedrückten *Intensität der elektromotorischen Kraft* in das *Zeitelement*, in welchem die Kraft mit dieser Intensität wirkt. Der Ausdruck dieses Integralwerths bleibt unverändert, wenn, statt den Kreis um 90° zu drehen, *die Scheidungskraft X verschwindet.* Wächst umgekehrt diese Scheidungskraft von $X = 0$ bis $X = X$ (beim Schliessen der Kette), so ist der Ausdruck dieses Integralwerths

$$-\pi r^2 X,$$

wo das *negative* Vorzeichen bedeutet, dass der inducirte Kreisstrom eine *solche Richtung* hat, dass die Pole eines ihm *äquivalenten Molekularmagnets* nach entgegengesetzten Seiten gerichtet sind, als die einer Boussole unter dem Einflusse der Kraft X.

Dieser Bestimmung des Integralwerths der *elektromotorischen Kraft* liegt das aus dem *absoluten Maasse des Magnetismus* abgeleitete Maass zum Grunde, wie es a. a. O. S. 338 und 339[1]) festgestellt ist, und muss mit $\sqrt{\frac{1}{2}}$ multiplicirt werden, wenn sie für das, a. a. O. Art. 26, angegebene *rein elektrodynamische Maass elektrodynamischer Kräfte* gelten soll, also:

$$-\frac{\pi}{\sqrt{2}} \cdot r^2 X.$$

Und dieser Ausdruck mit $4/c$ multiplicirt (wo c denjenigen konstanten Werth der relativen Geschwindigkeit bezeichnet, bei welcher *zwei elektrische Massen gar keine Wirkung auf einander ausüben*) giebt die elektromotorische Kraft in Theilen des in der Mechanik *für alle Kräfte im Allgemeinen festgestellten absoluten Maasses* (a. a. O. Art. 27), also:

$$-\frac{2\sqrt{2}}{c} \cdot \pi r^2 X.$$

Es ist dies der Werth der *elektromotorischen* Kraft für die Länge der ganzen Kreisbahn unter der Voraussetzung, dass *in jeder Längeneinheit dieser Bahn die Einheit des elektrischen Fluidums* sich befindet; durch Division mit der Kreisperipherie $2\pi r$ erhält man daher *die auf jede Maasseinheit des elektrischen Fluidums wirkende elektromotorische* Kraft

$$= -\frac{\sqrt{2}}{c} \cdot rX.$$

Dies bedeutet nach den Principien der Mechanik, *die Zunahme der Geschwindigkeit, welche jede ponderable Masseneinheit, wenn sie an die Maasseinheit des elektrischen Fluidums geknüpft wäre, in dem Zeitraum erhalten würde, in welchem die Scheidungskraft von $X = 0$ bis $X = X$ wächst.* Bezeichnet ε den unbekannten kleinen Bruch, welchen *die Masse der elektrischen Maasseinheit von dem ponderablen Massenmaasse bildet,* so giebt obiger Werth, mit ε dividirt, die *Stromgeschwindigkeit* u,

[1]) [Wilhelm Weber's Werke, Bd. III, p. 321.]

welche durch das angegebene Wachsthum *der Scheidungskraft* hervorgebracht worden ist. Multiplicirt man diese Stromgeschwindigkeit u mit $4e/c$, wo e die Menge des elektrischen Fluidums, nach der elektrischen Maasseinheit, ausdrückt, welche in jeder Längeneinheit der Kreisbahn sich befindet, so erhält man die *Intensität des inducirten Kreisstroms nach dem rein elektrodynamischen Maasse,* und, mit $\sqrt{2}$ multiplicirt, nach demjenigen Maasse bestimmt, nach welchem *ein Strom von der Intensität* $= 1$, *wenn er die Flächeneinheit umläuft, der Maasseinheit des Magnetismus äquivalent* ist, nämlich

$$-\frac{8e}{c^2\varepsilon}\cdot rX.$$

Das elektromagnetische Moment dieses inducirten Kreisstroms (Molekularstroms) findet man durch Multiplikation der angegebenen *Stromintensität* mit dem von der Kreisbahn umschlossenen *Flächenraum*

$$= -\frac{8e}{c^2\varepsilon}\pi r^3 X.$$

Hierbei ist angenommen, dass die *Normale* der Kreisbahnebene mit der Richtung der Scheidungskraft parallel sei, was für *alle* Kreisbahnebenen nur bei *einer* bestimmten Anordnung der Molekule Statt finden kann. Beim *Wismuth* setzen wir diese Anordnung nicht voraus, sondern nehmen vielmehr nach dem Begriffe der *Homogenität* an, dass die Normale der Kreisebene keine vorherrschende Richtung habe. Darnach muss die Zahl der Kreisbahnen, deren Normalen den Winkel φ mit der Richtung der Scheidungskraft machen, mit $\sin\varphi$ proportional gesetzt werden. Die *Stromintensität* ergiebt sich dann mit $\cos\varphi$ proportional und die *der Scheidungskraft parallele Komponente des Moments* mit $\cos\varphi^2$. Multiplicirt man daher obigen Werth mit $\sin\varphi\cos\varphi^2$, so erhält man einen Ausdruck, welcher dem Antheile aller Kreisströme (Molekularströme), deren Normalen mit der Richtung der Scheidungskraft den Winkel φ machen, an dem *elektrodiamagnetischen Momente* des Wismuths proportional ist, nämlich:

$$-\frac{8e}{c^2\varepsilon}\cdot\pi r^3 X\,.\,\sin\varphi\cos\varphi^2.$$

Multiplicirt man mit $d\varphi$ und ferner den alsdann zwischen den Grenzen $\varphi = 0$ und $\varphi = \pi/2$ genommenen *Integralwerth* mit der Zahl der Molekularströme, so erhält man das ganze *elektrodiamagnetische Moment* der Wismuthmasse m, wenn μm die Zahl der Molekularströme in dieser Masse bezeichnet,

$$= -\frac{8\pi}{3c^2\varepsilon}\cdot\mu r^3 e\,.\,mX.$$

Das *elektrodiamagnetische Moment* einer Wismuthmasse ist also der Scheidungskraft X und der Masse des Wismuths m proportional, und

wird daraus durch Multiplikation mit einem aus der *allgemeinen Elektricitätslehre* zu entnehmenden konstanten Faktor $8\pi/3c^2\varepsilon$, und einem von der *Beschaffenheit des Wismuths* abhängigen konstanten Faktor $\mu r^3 e$ gefunden. Diesen letzten Faktor kann man die *diamagnetische Konstante* des Wismuths nennen.

In der hier gegebenen Bestimmung des *elektrodiamagnetischen Moments* ist die Induktion der Molekularströme in den Kreisbahnen aller Molekule *einzeln* betrachtet worden, wie wenn auf jedes Molekul blos die aus der Scheidungskraft X berechnete elektromotorische Kraft gewirkt hätte. Dies ist genau genommen nicht der Fall, sondern es haben in jeder Kreisbahn ausserdem noch diejenigen elektromotorischen Kräfte mit gewirkt, welche von der *Wechselwirkung* der diamagnetischen Molekule herrührten, gerade so, wie auf ein Theilchen eines Eisenstabs nicht blos die äussere, z. B. vom Erdmagnetismus ausgeübte, Scheidungskraft wirkt, sondern auch diejenigen Scheidungskräfte, welche von der Wechselwirkung der magnetischen Eisentheilchen des Eisenstabs unter einander herrühren. Soll nun diese *Wechselwirkung* der diamagnetischen Molekule in Rechnung gebracht werden, wie wohl sie so klein ist, dass sie kaum einen merklichen Einfluss hat, so verdient dabei zunächst ein merkwürdiger Gegensatz hervorgehoben zu werden, welcher zwischen der Wechselwirkung *diamagnetischer* und *magnetischer* Molekule Statt findet.

Vergleichung der Wechselwirkung diamagnetischer Molekule mit der magnetischer Molekule.

Befinden sich zwei *Eisentheilchen* in einer der Richtung der auf sie wirkenden Scheidungskraft X *parallelen* Geraden, und bezeichnet man mit m das *magnetische Moment*, welches diese Scheidungskraft in jedem von diesen beiden Eisentheilchen, *einzeln* betrachtet, hervorbringen würde, so resultirt für jedes Theilchen aus der Wirkung des anderen eine neue Scheidungskraft, welche das Moment m *vergrössert*. Diese neue, aus der Wechselwirkung beider Theilchen entspringende, Scheidungskraft wird nach bekannten Gesetzen durch $2m/r^3$ ausgedrückt, wenn r den Abstand der Theilchen bezeichnet. Die gesammte Scheidungskraft $(X + 2m/r^3)$ bringt daher in dem betrachteten Theilchen das grössere Moment $(1 + 2m/Xr^3)\,m$ hervor. Befinden sich dagegen zwei *Wismuththeilchen* in einer, der Richtung der auf sie wirkenden Scheidungskraft X *parallelen*, Geraden, und wird das *diamagnetische Moment*, welches dieser Scheidungskraft entspricht, mit $-\mu$ bezeichnet (das negative Vorzeichen bedeutet, dass für gleich gerichtete Scheidungskräfte das diamagnetische Moment dem magnetischen entgegengesetzt ist), so resultirt für jedes Theilchen aus der Wirkung des anderen eine neue Scheidungskraft

$-2\mu/r^3$, wenn r der Abstand beider Theilchen ist, und folglich entspricht der *gesammten* Scheidungskraft $(X - 2\mu/r^3)$ das *verkleinerte* diamagnetische Moment $-(1 - 2\mu/Xr^3)\,\mu$. Es findet also der *Gegensatz* Statt, dass *der Magnetismus der in der Richtung der Scheidungskraft liegenden Eisentheilchen durch Wechselwirkung verstärkt, der Diamagnetismus der in dieser Richtung liegenden Wismuththeilchen dagegen durch Wechselwirkung geschwächt wird.*

Umgekehrt verhält es sich, wenn die Eisen- und Wismuththeilchen in einer gegen die Richtung der Scheidungskraft X *senkrechten* Geraden liegen, wo der *Magnetismus* der Eisentheilchen durch Wechselwirkung *geschwächt*, der *Diamagnetismus* der Wismuththeilchen dagegen durch Wechselwirkung *verstärkt* wird. Es ergiebt sich nämlich dann der *geschwächte Magnetismus* des Eisentheilchens

$$= + \left(1 - \frac{m}{Xr^3}\right) m,$$

der *verstärkte Diamagnetismus* des Wismuththeilchens

$$= - \left(1 + \frac{\mu}{Xr^3}\right) \mu.$$

Hieraus folgt, dass während man eine gegebene Masse Eisen, um ihr durch eine gegebene Scheidungskraft den stärksten *Magnetismus* zu ertheilen, in die Form eines langen und dünnen Stabs bringt, und seiner Länge nach der Richtung der Scheidungskraft parallel stellt; so muss man dagegen eine Wismuthmasse, um ihr den stärksten *Diamagnetismus* zu ertheilen, in die dünnste Plattenform bringen, und ihrer Dicke nach der Richtung der Scheidungskraft parallel stellen. Die weitere Entwickelung dieser Gesetze der Wechselwirkung diamagnetischer Molekule im Vergleich mit der magnetischer Molekule führt endlich zu einer *einfachen Unterscheidung magnetischer und diamagnetischer Stoffe,* die eine nähere Erklärung verdient.

Unterscheidung magnetischer und diamagnetischer Körper durch positive und negative Werthe einer Konstante.

Beschränkt man sich, der Einheit wegen auf die Betrachtung eines *Rotations-Ellipsoids* von Eisen oder Wismuth, dessen Hauptaxe der Scheidungskraft X parallel ist, so hat Neumann für *Eisen* bewiesen, dass *das magnetische Moment des Ellipsoids*

$$= \frac{kvX}{1 + 4\pi kS}$$

ist, wo v das Volumen und S eine durch das Verhältniss der Axen des Ellipsoids gegebene Grösse ist, nämlich

$$S = \sigma(\sigma^2 - 1)\left\{\frac{1}{2}\log\frac{\sigma+1}{\sigma-1} - \frac{1}{\sigma}\right\},$$

$$\sigma = \sqrt{1 - \frac{r^2}{\lambda^2}},$$

r und $\sqrt{r^2 - \lambda^2}$ die Axen des Ellipsoids. *k soll darin für Eisen einen konstanten Werth haben,* welchen Neumann mit dem Namen der *magnetischen Konstante des Eisens* bezeichnet und *dieser konstante Werth ist bei Eisen, so wie auch bei allen anderen magnetischen Stoffen, nothwendig positiv.*

Die Grösse k dient also, nach Verschiedenheit der Grösse der *positiven* Werthe, welche sie annimmt, *als Unterscheidungsmerkmal der verschiedenen magnetischen Stoffe;* man kann aber den Gebrauch der Grösse k als Unterscheidungsmerkmal *verallgemeinern und ihn auf alle Körper ausdehnen, wenn man negative Werthe von k zulässt und die physische Bedeutung daran knüpft, dass ein Körper, für welchen sich der Werth von k negativ ergiebt, ein diamagnetischer ist.* (Der Name *antimagnetischer* oder *negativ-magnetischer* würde daher für diese Körper passender sein.) Den für einen *diamagnetischen* Körper gefundenen *negativen* Werth von k kann man die *magnetische Konstante des diamagnetischen Körpers* nennen oder man kann den *positiven* Werth, den man durch Verwechslung des Vorzeichens erhält, seine *diamagnetische Konstante* nennen. Bezeichnet man alsdann *diese stets positive diamagnetische Konstante* mit h, zur Unterscheidung der mit k bezeichneten gleichfalls *stets positiven magnetischen Konstante*, so ergiebt sich auf die nämliche Weise, wie Neumann das magnetische Moment eines magnetischen Ellipsoids bestimmt hat, *das diamagnetische Moment eines diamagnetischen Ellipsoids*

$$= -\frac{hvX}{1 - 4\pi hS}.$$

Nun ist für ein *unendlich gestrecktes Ellipsoid*, für eine *Kugel* und für ein *unendlich abgeplattetes Ellipsoid* der Reihe nach

$$S = 0, \quad S = \tfrac{1}{3}, \quad S = 1;$$

folglich sind die entsprechenden *magnetischen Momente* der Reihe nach

$$+kvX, \quad +\frac{kvX}{1 + \frac{4}{3}\pi k}, \quad +\frac{kvX}{1 + 4\pi k},$$

dagegen die entsprechenden *diamagnetischen Momente* der Reihe nach

$$-hvX, \quad -\frac{hvX}{1 - \frac{4}{3}\pi h}, \quad -\frac{hvX}{1 - 4\pi h}.$$

Der *gestrecktesten* Form entspricht also der *schwächste*, der *abgeplatteten* Form der *stärkste Diamagnetismus*, gerade umgekehrt wie beim *Magnetismus*, wie schon oben bewiesen worden ist. Da aber die *diamag-*

netische Konstante h bei allen bekannten diamagnetischen Körpern einen gegen die Einheit fast verschwindend kleinen Werth hat, so kann das *diamagnetische* Moment aller dieser Körper ohne merklichen Fehler als unabhängig von ihrer Gestalt betrachtet und

$$= -hvX$$

gesetzt werden, und dieser kann mit demjenigen verglichen werden, welcher oben für das *diamagnetische Moment* erhalten wurde ohne Rücksicht auf die Wechselwirkung der diamagnetischen Molekule unter einander. Setzt man nämlich

$$v = \frac{m}{\varrho},$$

wo m die Masse und ϱ die Dichtigkeit des Körpers bezeichnet, so erhält man für das *diamagnetische Moment* den Ausdruck

$$-\frac{h}{\varrho} \cdot mX$$

statt des oben gefundenen Ausdrucks

$$-\frac{8\pi}{3c^2\varepsilon} \cdot \mu r^3 e \,.\, mX.$$

Auf beide Arten wird das *diamagnetische Moment* als das Produkt der Masse m in die Scheidungskraft X dargestellt, multiplicirt mit einem *konstanten Koefficienten,* welcher im letzteren Ausdrucke aus zwei Faktoren besteht, nämlich aus dem aus der *allgemeinen Elektricitätslehre* zu entnehmenden Faktor $8\pi/3c^2\varepsilon$, und aus dem von der *Beschaffenheit der diamagnetischen Körper* abhängigen Faktor $\mu r^3 e$, welcher oben die *diamagnetische Konstante* des Körpers genannt worden ist. Man sieht leicht ein, dass diese beiden Faktoren hier in h/ϱ nicht geschieden sind, und dass also h/ϱ hier keine andere Bedeutung hat, als die des Produkts jener beiden Faktoren.

Die Grösse k ist hier als *konstant* (d. h. als unabhängig von der Grösse der Scheidungskraft X) angenommen worden, weil Neumann, *nach der Theorie scheidbarer magnetischer Fluida*, bewiesen hat, dass sie *konstant* (d. h. unabhängig von der Grösse der Scheidungskraft X) sein müsse. Die oben angeführten Resultate sind aber von dieser Annahme unabhängig, und behalten ihre Geltung, auch wenn die nähere Prüfung ergeben sollte, dass k eine Funktion der Grösse der Scheidungskraft X wäre. Aus dieser Prüfung wird sich aber von selbst ergeben, dass wenn auch k mit X sich ändert, doch h für jeden diamagnetischen Körper *einen unveränderlichen Werth* behält.

Durch die hier entwickelte *Theorie des Diamagnetismus* kann nun, wie sich leicht zeigen lässt, die bekannte Streitfrage, *ob magnetische Fluida wirklich existiren*, entschieden werden.

Ueber die Existenz magnetischer Fluida.

Wenn eine gewisse Klasse von Wirkungen eines Körpers auf andere Körper so beschaffen ist, dass sie aus einer *idealen Vertheilung* magnetischer Fluida an seiner Oberfläche erklärt werden kann, so lassen sich für *die wahren Ursachen im Innern des Körpers* verschiedene *Möglichkeiten* denken und darnach vier Fälle unterscheiden, die oben angegeben und näher erörtert worden sind. Zwei dieser Fälle beruhten auf der Annahme, dass *zwei magnetische Fluida* existiren, die entweder in den drehbaren Molekulen des Körpers unbeweglich, in *konstanter* Scheidung, oder in undrehbaren Molekulen beweglich, in *variabler* Scheidung sich befinden; die beiden anderen Fälle dagegen beruhten auf der Annahme, dass *die beiden nach der Elektricitätslehre vorhandenen elektrischen Fluida* in einer bestimmten Kreisbahn entweder um jedes drehbare Molekul des Körpers in *konstanter* oder um jedes undrehbare Molekul in *variabler* Strombewegung sich befänden. Diese vier Fälle schliessen nun, wie man leicht sieht, keineswegs einander wechselseitig aus; denn es kann ein Theil der *magnetischen* Fluida in drehbaren Molekulen konstant geschieden bleiben, während die Scheidung eines anderen Theils variabel ist; und ebenso kann ein Theil *der elektrischen Strömung* in gegebenen Kreisbahnen drehbarer Molekule konstant sein, während ein anderer Theil in Kreisbahnen undrehbarer Molekule seiner Intensität nach variirt. In letzter Beziehung liesse sich sogar die Existenz *konstanter* Strömungen ohne das Hinzukommen eines *variablen* Theils *bei den vielen vorhandenen elektromotorischen Kräften* gar nicht begreifen, weil die elektrischen Fluida, wenn sie in bestimmten Bahnen *frei* beweglich sind, wie die Existenz konstanter Strömungen beweist, *dem Antriebe jener nach der Richtung dieser Bahnen zerlegten elektromotorischen Kräfte nothwendig folgen müssen.* Indessen können jene vier Fälle paarweise zu *zwei Hauptfällen* verbunden werden, von denen jeder, wenn er wirklich nachgewiesen wäre, den anderen als ganz überflüssige Hypothese erscheinen lassen würde, nämlich 1. dass *magnetische Fluida existiren,* welche mit den Molekulen oder in denselben sich bewegen können; 2. dass *die nach der Elektricitätslehre überall vorhandenen elektrischen Fluida in bestimmten Kreisbahnen um die Molekule ohne Widerstand beweglich* sind.

Nun lässt sich für jeden von diesen beiden Hauptfällen eine *Theorie* entwickeln, und jede dieser Theorien lässt sich in zwei Theile theilen, nämlich in einen solchen, worin die Resultate beider Theorien übereinstimmen, und in einen solchen, worin sie einander widersprechen. Denn es verhält sich mit dieser Theorie gerade so wie in der Optik mit der *Emissionstheorie* und *Wellentheorie*, die ebenfalls in vielen Resultaten

übereinstimmten, bis die Entdeckung der *Interferenzerscheinungen* zu näherer Erörterung desjenigen Theils führte, worin beide Theorien einander widersprechen. Wenn nun auch die beiden auf der Annahme *magnetischer Fluida* und *elektrischer Molekularströme* beruhenden Theorien in sehr vielen Beziehungen eine bewunderungswürdige Uebereinstimmung der Resultate bisher gegeben haben, so dürfte man doch auch hier, wie in der Optik, erwarten, dass endlich *die Entdeckung irgend einer neuen Klasse von Erscheinungen* zu näherer Erörterung desjenigen Theils, worin beide einander widersprechen, führen würde. Beide Theorien stimmen zwar 1. in allen, *die Erscheinungen beharrlicher Magnete* betreffenden, Resultaten überein; 2. auch darin, dass jede *eine Eintheilung der veränderlichen Magnete in zwei Klassen* gestattet, nämlich in solche, die ihren Magnetismus *der blossen Orientirung fertig vorhandener drehbarer Molekule* (Molekularmagnete oder Molekularströme), und in solche, die ihren Magnetismus *der Anregung von Bewegung imponderabler Fluida in ruhenden Molekulen* (der Scheidung magnetischer Fluida in den Molekulen, oder der Erregung elektrischer Ströme in bestimmten Kreisbahnen um die Molekule) verdanken; 3. auch noch in ihren Resultaten *über die erste Klasse der veränderlichen Magnete.* Beide Theorien widersprechen aber einander in ihren Resultaten über *die zweite Klasse der veränderlichen Magnete* durch entgegengesetzte Bestimmungen über *die Lage ihrer Pole*; denn nach der *einen* soll die Lage der Pole für die zweite Klasse der veränderlichen Magnete *gleich* der für die erste Klasse sein; nach der anderen soll die Lage der Pole für die zweite Klasse *entgegengesetzt* der für die erste sein. So lange man also nur *solche veränderliche Magnete kannte, wo die Lage der Pole* (für gleich gerichtete Scheidungskräfte) *gleich war,* liessen sich *beide Theorien* anwenden; sobald man aber *veränderliche Magnete* (Diamagnete) *entdeckte, wo die Lage der Pole* (bei gleich gerichteten Scheidungskräften) *entgegengesetzt* war, so blieb keine Wahl mehr zwischen beiden Theorien, weil *nur die zweite von der Entstehung zweier Klassen von Magneten mit entgegengesetzter Lage der Pole, bei gleich gerichteten Scheidungskräften*, Rechenschaft giebt.

Die von Faraday *entdeckten diamagnetischen Erscheinungen* dienen daher zur Entscheidung der Alternative zwischen diesen beiden Theorien, gerade so wie die Interferenzerscheinungen zur Entscheidung der Alternative zwischen Emissions- und Wellentheorie, und dies ist die wesentlichste und wichtigste Bedeutung, welche der Faraday'schen Entdeckung gegeben werden kann. *Durch die Entdeckung des Diamagnetismus wird also die Hypothese der elektrischen Molekularströme im Innern der Körper bestätigt; die Hypothese der magnetischen Fluida im Innern der Körper widerlegt,* — ein Resultat, welches auch durch die genauere direkte

Erforschung des *veränderlichen Magnetismus* seine Bestätigung erhalten hat, nämlich in dem Gesetze, *nach welchem die Stärke des veränderlichen Magnetismus durch die Grösse der magnetischen oder elektromagnetischen Scheidungskraft bestimmt wird,* was hier noch näher erörtert zu werden verdient.

Abhängigkeit des veränderlichen Magnetismus von der Grösse der magnetischen oder elektromagnetischen Scheidungskraft.

Nach der vorhergehenden *Theorie des Diamagnetismus* soll das diamagnetische Moment eines Diamagnets *der Grösse der magnetischen oder elektromagnetischen Scheidungskraft proportional* sein. Dieselbe *Proportionalität* soll nach der bisher angenommenen Ansicht *von den in den Eisenmolekulen beweglichen magnetischen Fluidis,* für das magnetische Moment *eines veränderlichen Magnets* gelten. Muss nun aber diese Ansicht, zugleich mit der Hypothese *der magnetischen Fluida im Innern der Körper* verworfen und statt dessen nach Ampère's Ansicht angenommen werden, dass die Eisenmolekule *die drehbaren Träger von beharrlichen Molekularströmen* sind, so folgt daraus *ein anderes Gesetz der Abhängigkeit des veränderlichen Magnetismus von der Grösse der magnetischen oder elektromagnetischen Scheidungskraft.*

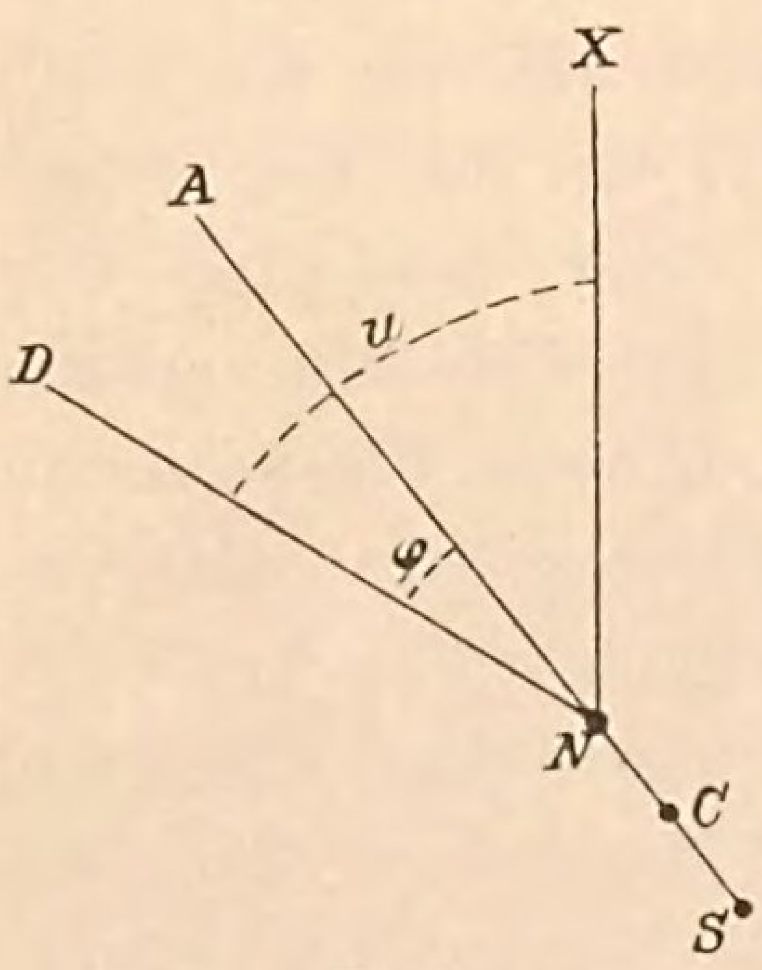


Fig. 1.

Es sei nämlich Fig. 1 NS die Axe eines *unveränderlichen Molekularstroms*, welcher sich um seinen Mittelpunkt C drehen kann; diese Axe sei, wenn die Scheidungskraft $X = 0$ ist, im Gleichgewicht mit ND parallel. Die Thatsache, dass beim weichen Eisen der durch eine auf das Eisen wirkende Scheidungskraft hervorgebrachte Magnetismus von selbst wieder verschwindet, sobald die Scheidungskraft zu wirken aufhört, beweist, dass der Molekularstrom, auf dessen Drehung der hervorgebrachte Magnetismus beruht, von selbst wieder in seine ursprüngliche, mit ND parallele Lage zurückgetrieben wird. Diese in der Wechselwirkung der Eisenmolekule begründete zurücktreibende Kraft muss aber mit der Ablenkung AND wachsen und kann durch

$$D \sin \varphi$$

dargestellt werden, wo D eine konstante Grösse bezeichnet, welche man die *molekulare Direktionskraft* nennen kann. Wirkt nun ausser dieser molekularen Direktionskraft auf den Molekularstrom nach der Richtung NX die Scheidungskraft X, welche mit der Richtung der Direktionskraft den Winkel $XND = u$ einschliesst, so wird der Molekular-

strom dadurch um den Winkel $AND = \varphi$ gedreht oder abgelenkt, und man hat dann zur Bestimmung der neuen Gleichgewichtslage folgende Gleichung

$$X \sin u \cos \varphi = (D + X \cos u) \sin \varphi$$

oder

$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{X \sin u}{D + X \cos u}.$$

Aus dieser Ablenkung φ lässt sich nun die *Zunahme* des nach der Richtung der Kraft X zerlegten *magnetischen Moments* des Molekularstroms bestimmen. Wird nämlich das ganze unveränderliche magnetische Moment des Molekularstroms mit μ bezeichnet, so war das nach der Richtung der Kraft X zerlegte vor der Ablenkung

$$= \mu \cos u,$$

nach der Ablenkung

$$= \mu \cos (u - \varphi),$$

folglich ist die gesuchte Zunahme x

$$x = \mu (\cos (u - \varphi) - \cos u).$$

Substituirt man hierin für φ den durch obige Gleichung $\operatorname{tang} \varphi = X \sin u / (D + X \cos u)$ gegebenen Werth, so erhält man

$$x = \mu \left\{ \frac{X + D \cos u}{\sqrt{X^2 + D^2 + 2XD \cos u}} - \cos u \right\}.$$

Für ein System von Molekularströmen, deren magnetische Axen beim ursprünglichen Gleichgewicht nach allen Richtungen des Raums ohne Unterschied gerichtet sind, ist die Zahl der Molekularströme, deren Axen mit der Richtung NX der Kraft X den Winkel u bilden, mit $\sin u$ proportional zu setzen. Es soll nun das magnetische Moment y bestimmt werden, welches aus der Drehung aller Molekularströme des Systems durch die Kraft X resultirt.

Man multiplicire zu diesem Zwecke den oben gefundenen Werth von x mit $\sin u\, du$ und nehme dann den Integralwerth von $u = 0$ bis $u = \pi$. Dieser Integralwerth, mit der Anzahl der Molekularströme n multiplicirt und mit

$$\int_0^\pi \sin u\, du = 2$$

dividirt, giebt das gesuchte *Moment* y

$$y = \frac{n}{2} \int_0^\pi x \sin u\, du.$$

Durch Ausführung der Integration erhält man für y folgenden Ausdruck: [1])

$$y = n\mu \frac{X}{\sqrt{X^2 + D^2}} \cdot \frac{X^4 + \frac{7}{6} X^2 D^2 + \frac{2}{3} D^4}{X^4 + X^2 D^2 + D^4}.$$

Die Kraft, welche auf das Eisen wirkte, und durch welche das Moment y hervorgebracht wurde, war $= X$. Bezeichnet n die Zahl der Molekularströme *in der Volumeneinheit*, so hat das Verhältniss des Moments y zu der Kraft X *in der Theorie drehbarer Molekularströme* dieselbe Bedeutung, welche die von NEUMANN mit k bezeichnete magnetische Konstante *in der Theorie scheidbarer magnetischer Fluida* hat. Substituirt man daher in der oben angeführten NEUMANN'schen Formel $kvX/(1 + 4\pi kS)$ für k den eben gefundenen Werth y/X, so ergiebt sich das gesuchte magnetische Moment eines veränderlichen Magnets von der Form eines Rotations-Ellipsoids, auf welche sich die NEUMANN'sche Formel bezieht,

$$= \frac{vy}{1 + 4\pi S \frac{y}{X}},$$

worin S den schon oben bestimmten, von dem Verhältniss der Axen des Ellipsoids abhängigen Faktor bezeichnet.

Dieses, nach der AMPÈRE'schen, im Gegensatze zu der gewöhnlich angenommenen Ansicht sich ergebende Resultat *über die Abhängigkeit des veränderlichen Magnetismus von der Grösse der magnetischen oder elektromagnetischen Scheidungskraft*, ist nun wirklich durch die von MÜLLER gemachten, in diesen Annalen [2]) 1851, Bd. 82, S. 181 beschriebenen Versuche bestätigt werden.

II. Versuche.

Nachdem im vorigen Abschnitte zur leichteren Uebersicht, die über den Zusammenhang der Lehre vom Diamagnetismus mit der Lehre von dem Magnetismus und der Elektricität gewonnenen Resultate unter dem

[1]) [W. WEBER hat den nachfolgenden Ausdruck für y nachträglich (Berichte über die Verhandlungen der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, mathematisch-physische Klasse, Jahrgang 1852, p. 164) mit folgenden Worten verbessert]: S. 572, Zeile 22 der letzten Abhandlung über elektrodynamische Maassbestimmungen im ersten Bande der Abhandlungen der mathematisch-physischen Klasse der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften ist für y statt des strengen Ausdrucks ein Näherungswerth gesetzt worden. Ich verbessere dieses Versehen, indem ich bemerke, dass derselbe keinen merklichen Einfluss auf die daraus abgeleiteten numerischen Angaben hat. Es ergiebt sich nämlich der genaue Integralwerth von y für alle Werthe von X, welche kleiner als D sind, $y = \frac{2}{3} n\mu X/D$; für alle Werthe von X, welche grösser als D sind, $y = n\mu (1 - \frac{1}{3} D^2/X^2)$.]

[2]) [Annalen der Physik und Chemie, herausgegeben von C. J. POGGENDORFF.]

Titel einer Theorie vorausgeschickt worden sind, soll nun in diesem Abschnitte ein kurzer Bericht von den zu ihrer Begründung ausgeführten Versuchen folgen.

1. *Elektrodiamagnetismus und Messung des Moments eines Elektrodiamagnets.*

Die bequemste Einrichtung eines *elektrodiamagnetischen Messapparats*, zur Beobachtung der *diamagnetischen Polarität*, besteht in einer galvanischen Spirale, welche vertikal und symmetrisch zwischen den beiden

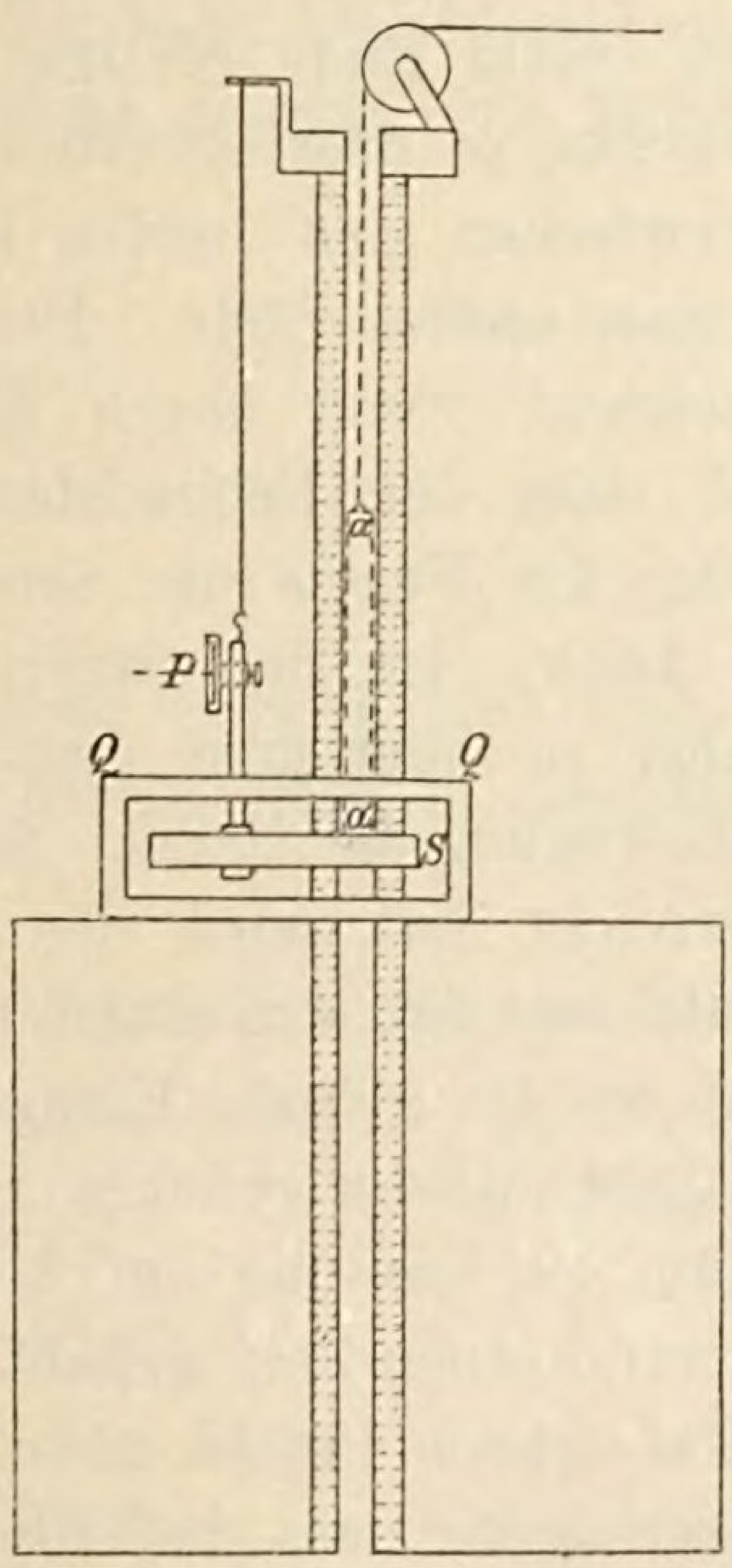


Fig. 3.

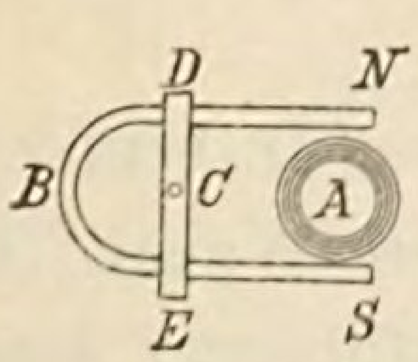


Fig. 2.

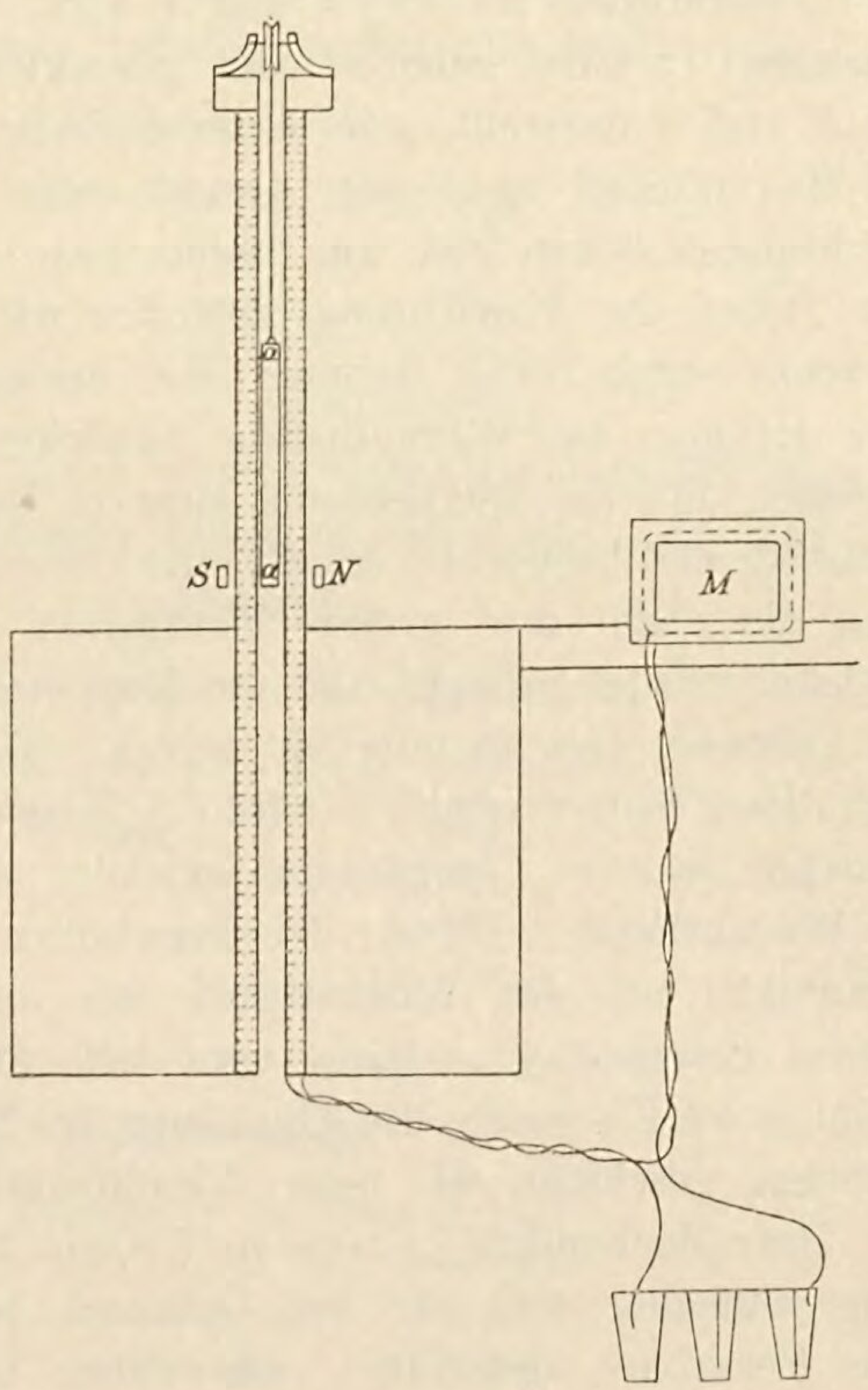


Fig. 4.

Polen einer *hufeisenförmig* gebogenen Magnetnadel aufgestellt wird. A Fig. 2 stellt den Querschnitt der Spirale dar, welche symmetrisch zwischen den Polen N und S der *hufeisenförmig* gekrümmten Magnetnadel NBS liegt. Diese Magnetnadel wird von der Klemme DE gehalten, in deren Mitte c der Aufhängungsfaden befestigt ist. Fig. 3 und 4 stellen das Instrument in zwei Seitenansichten dar. Es ist vortheilhaft, der Spirale eine beträchtliche Länge zu geben, z. B. von 400 bis 500 Millimeter, wodurch es leichter wird, die Aufhängung der

Nadel so zu reguliren, dass sie in der die Länge der Nadel halbirenden Horizontalebene schwebt, wo dann der durch die Spirale gehende Strom auf die Nadel kein Drehungsmoment ausübt. Sollte aber auch ein kleines Drehungsmoment vorhanden sein, so lässt sich dies leicht durch einen aus wenigen Windungen bestehenden Multiplikator *M* Fig. 4 kompensiren, indem man denselben Strom hindurch leitet und ihn der Magnetnadel nähert. Zur Beobachtung der Magnetnadel ist es nothwendig, sie mit einem Spiegel *P* Fig. 3 zu versehen und darin mit einem Fernrohr das Spiegelbild einer entfernten Skale zu beobachten. Die Magnetnadel wird ausserdem mit einem Dämpfer *QQ* Fig. 3 umgeben. Der Wismuthstab *aa* Fig. 3 und 4 wird an einem Ende vertikal aufgehangen; er kann gehoben oder gesenkt werden, so dass entweder, wie Fig. 3 und 4 darstellt, sein unteres Ende zwischen den beiden Polen der Magnetnadel zu liegen kommt, oder sein oberes Ende. Die Beobachtungen lassen sich am bequemsten machen, wenn durch Rollen oder Hebel die Einrichtung getroffen wird, dass der Beobachter am Fernrohr selbst durch Hebung oder Senkung des Fusses die Senkung oder Hebung des Wismuthstabs bewirken kann. Ist der Strom geschlossen und die Magnetnadel ganz in Ruhe, so hebt man den Wismuthstab und beobachtet darauf eine kleine Bewegung der Nadel. Sobald dann die Nadel ihre grösste Elongation erreicht hat, wird der Wismuthstab wieder gesenkt und die Magnetnadel bewegt sich dann schon mit grösserer Geschwindigkeit zurück. Hat sie die grösste Elongation nach dieser Seite erreicht, so wird der Wismuthstab wieder gehoben u. s. w. Zwischen je zwei Elongationen zeichnet man die Stellung auf, welche der Wismuthstab während der dazwischen verflossenen Zeit gehabt hat. Vertauscht man den Wismuthstab mit einem gleich langen aber sehr dünnen Eisenstabe, so kann man sich überzeugen, dass bei gleicher Stellung des Eisenstabs die Ablenkung der Nadel in der entgegengesetzten Richtung geschieht, wie beim Wismuthstabe.

Herr Mechanikus Leyser *in Leipzig* hat dieses Instrument in möglichst einfacher und für den Gebrauch bequemen Weise (für 25 Thlr. ohne Fernrohr) ausgeführt, was daher zur Ausführung dieses Fundamentalversuchs über diamagnetische Polarität besonders empfohlen werden kann. Herr Leyser hat mir über die von Herrn Professor Hankel und ihm im physikalischen Institute zu Leipzig damit gemachten Versuche Folgendes mitgetheilt. „Es wurde ein Strom von vier Grove'schen Elementen angewendet und der Magnet durch einen seitlich aufgestellten Multiplikator in seiner früheren Stellung erhalten, was auf 1 bis 1,5 Skalentheile gelang. Das Wismuth war chemisch rein und so aufgehängt, dass es an einem Faden auf und ab gezogen werden konnte, ohne dass der Magnet im Geringsten erschüttert wurde.

Beobachtungen von Leyser:

Stand des Magnets ohne Strom 492,0.

Mit Strom Wismuth	in der Mitte	493,5,	
„	oben	490,8,	
„	unten	499,8,	
„	oben	491,1,	
„	in der Mitte	493,8.	

Hieraus ergiebt sich in Uebereinstimmung mit allen anderen auf ähnliche Weise angestellten Versuchen, dass beim *Heraufziehen* des Wismuths (von der Mitte nach *oben*) der Ruhestand des Magnets auf *kleinere* Zahlen, beim *Herablassen* (von der Mitte nach *unten*) auf *grössere* Zahlen verrückt wurde. Die Differenz zwischen *unten* und *oben* beträgt

+ 8,9 Skalentheile.

Ohne Strom Wismuth	in der Mitte	492,0,
„	oben	497,2,
„	unten	490,2,
„	oben	498,2,
„	in der Mitte	490,0.

Hieraus ergiebt sich *ohne Strom* eine entgegengesetzte Wirkung als mit Strom, nämlich eine Differenz zwischen *unten und oben* von

— 7,5 Skalentheilen.

Beobachtungen von Herrn Professor Hankel:

Stand des Magnets ohne Strom 496,5.

Mit Strom Wismuth	oben	492,1,
„	unten	500,7,
„	oben	491,6,
„	in der Mitte	497,7.

Die Differenz zwischen unten und oben beträgt also

+ 8,9 Skalentheile.

Ohne Strom Wismuth	in der Mitte	497,5,
„	oben	503,5,
„	unten	498,0,
„	oben	502,6,
„	in der Mitte	494,8.

Die Differenz zwischen *unten* und *oben* also

— 5,0.

Der Wismuthstab wurde alsdann herumgedreht und es zeigte sich auch dann die nämliche Wirkung, z. B.:

Stand des Magnets ohne Strom 500,0.

Mit Strom Wismuth	oben	497,3,
„	unten	507,1,
„	oben	598,0.

Die Differenz zwischen *unten* und *oben* also

$$+\ 9{,}4.$$

Wurden, statt den Ruhestand jedes Mal zu bestimmen, die Elongationen beobachtet, während der Schwingungsbogen durch abwechselnde Hebung und Senkung des Wismuths in der Mitte jeder Schwingung *multiplicirt* ward, so ergaben sich folgende Resultate:

		Elongation	Schliessungsbogen
Mit Strom Wismuth	in der Mitte	500,0	
„	oben	497,0	3,0
„	unten	513,0	16,0
„	oben	481,5	31,5
„	unten	515,5	34,0
„	oben	476,5	39,0
„	unten	520,3	43,8
„	oben	473,0	47,3
„	unten	522,0	49,0
„	oben	471,0	51,0
„	unten	526,0	55,0
„	oben	468,5	57,5

Ein Eisenstäbchen, an die Stelle des Wismuths gesetzt, trieb *oben* den Magnet auf *grössere*, *unten* auf *kleinere* Zahlen, und dasselbe fand auch nach Umkehrung des Eisenstabs Statt. Das Stativ des Instruments muss sehr schwer sein und es eignet sich dazu sehr gut ein Serpentinstein; das Wismuth muss sehr leicht beweglich und der Kupferdraht rein sein. Aus allen Beobachtungen ergab sich, dass der Ausschlag *beim Aufziehen des Wismuths* bei Anwendung von vier Grove'schen Elementen 8,9 bis 9,4 Skalentheile auf kleinere Zahlen ging, während ein *feines Eisendrähtchen* unter gleichen Verhältnissen auf *grössere* Zahlen trieb; ferner, dass das angewendete Wismuthstück *ohne Strom* wie ein Eisendraht wirkte, 5 bis 7,5 Skalentheile. Bringt man die letztere Einwirkung mit in Rechnung, so ergiebt sich *der diamagnetische Ausschlag des Wismuths* bei Anwendung von vier Grove'schen Bechern im Mittel = 15,4 Skalentheile. Durch Multiplikation konnte aber der Schwingungsbogen bis 57,5 Skalentheile gebracht und in dieser Grösse erhalten werden, indem die Wirkung des kupfernen Dämpfers, mit welchem der Magnet umgeben war, der diamagnetischen Wirkung das Gleichgewicht hielt."

Die folgende Versuchsreihe ist mit einem von dem beschriebenen etwas verschiedenen Apparate gemacht worden; doch bedarf derselbe keiner besonderen Beschreibung, da die Verschiedenheiten von keinem wesentlichen Einfluss sind.

Versuche mit Wismuth.

No. der Schwingung	Stellung d. Wismuths während der Schwingung	Stand der Nadel am Anfange oder Ende jeder Schwingung	Schwingungsbogen der Nadel	Reducirter Schwingungsbogen	Mittelwerth
		500,0			
1.	oben		— 40,0	— 63,4	
		467,0			
2.	unten		— 50,4	— 66,6	
		513,9			
3.	oben		— 56,3	— 67,1	
		459,9			— 61,8
4.	unten		— 58,5	— 65,5	
		518,5			
5.	oben		— 55,2	— 59,4	
		460,0			
6.	unten		— 46,5	— 48,8	
		512,0			
7.			∓ 29,7		
	oben	471,1			
8.			± 7,0		
		489,7			
9.	unten		— 8,9		
		494,2			
10.	oben		— 15,6		
		480,9			
11.	unten		— 30,0	— 47,5	
		498,9			
12.	oben		— 50,4	— 66,6	
		457,0			— 59,8
13.	unten		— 57,8	— 68,5	
		516,0			
14.	oben		— 50,9	— 56,8	
		459,3			
15.			∓ 35,6		
	unten	504,4			
16.			± 12,4		
		478,3			
17.	oben		— 14,7		
		476,9			
18.	unten		— 36,6		
		504,9			
19.	oben		— 42,6	— 67,5	
		459,6			
20.	unten		— 39,6	— 52,3	
		499,4			
21.	oben		— 46,6	— 55,5	
		460,1			
22.	unten		— 51,7	— 57,9	— 56,1
		513,9			
23.	oben		— 45,9	— 49,4	
		464,2			
24.	unten		— 50,6	— 53,1	
		506,2			
25.	oben		— 55,2	— 57,0	
		446,9			
26.			∓ 44,5		
	unten	498,0			
27.			± 15,5		
		460,0			
28.	oben		— 16,8		
		453,1			
29.	unten		— 29,8		
		479,8			
30.	oben		— 40,3	— 63,9	
		446,9			
31.	unten		— 46,0	— 60,2	
		494,6			— 55,8
32.	oben		— 42,2	— 50,0	
		450,4			
33.	unten		— 44,0	— 49,3	
		490,5			
34.	oben				
		442,6			

Es sind in dieser Tafel die Nadelstände, wie sie am Anfang und Ende jeder Schwingung beobachtet worden sind, in der *dritten* Kolumne angegeben; in der *vierten* Kolumne die zugehörigen Schwingungsbögen (im Mittelwerthe aus je zwei auf einander folgenden). Ein *positives* Vorzeichen vor dem Schwingungsbogen bedeutet, dass die Nadel bei der *oberen Stellung* des Wismuths von kleineren auf grössere, oder bei der *unteren Stellung* von grösseren auf kleinere Skalentheile ging; das Umgekehrte gilt für das *negative* Vorzeichen. Nachdem die Stellung des

Wismuths mehrmals regelmässig am Ende jeder Schwingung gewechselt worden war und der Schwingungsbogen seinen Grenzwerth fast erreicht hatte, wurde eine Unterbrechung dadurch hervorgebracht, dass die Stellung des Wismuths während zweier Schwingungen unverändert gelassen, darauf aber wieder regelmässig gewechselt wurde. Der *negative* Schwingungsbogen wurde dadurch plötzlich in einen *positiven* verwandelt, der aber schnell bis auf Null abnahm und sehr bald wieder in einen *negativen* überging, wodurch die Richtung der von dem Wismuth (bei seiner oberen und unteren Stellung) hervorgebrachten Ablenkung am augenscheinlichsten hervortrat. — Zählt man die Schwingungsbögen von demjenigen an, welcher der Null am nächsten ist, so lassen sich die dem Grenzwerthe am nächsten kommenden beobachteten Schwingungsbögen, mit Hülfe des bekannten decrementum logarithmicum, leicht auf den *Grenzwerth* reduciren und daraus ein genauerer Mittelwerth für letzteren finden: man braucht nämlich dazu den beobachteten Werth des nten Schwingungsbogens, bei obigen Versuchen, wo das decrementum logarithmicum nahe $= \log 3/2$ war, blos mit $(1 - [2/3]^n)$ zu dividiren. Hiernach ergeben sich die in der *fünften* Kolumne angeführten reducirten Werthe und die daraus gezogenen in der *sechsten* Kolumne angegebenen Mittel. Aus allen diesen Beobachtungen zusammen findet man den gesuchten Grenzwerth

$$x = -58{,}4.$$

Aus diesem Grenzwerth des Schwingungsbogens lässt sich die dem Gleichgewichte der Nadel entsprechende Ablenkung E ableiten, nämlich $E = -5{,}93$, oder im Mittel aus mehreren von verschiedenen Beobachtern gemachten Versuchsreihen

$$E = -5{,}17,$$

während für ein Eisenstäbchen von 59 200 Mal kleinerem Gewichte derselbe Werth, durch ähnliche Versuche bestimmt,

$$E' = +128{,}4$$

gefunden wurde. Hiernach ergiebt sich, nach der Reduktion auf gleiches Gewicht, der Diamagnetismus des Wismuths 1 470 000 Mal kleiner als der Magnetismus des Eisens. Dieses Resultat gilt aber nur für eine bestimmte Form des Eisenstabs und für eine bestimmte Grösse der auf das Eisen wirkenden Scheidungskraft, nämlich $X = 629{,}9$, welche aus der gemessenen Stromstärke und aus den Umwindungen der elektromagnetischen Spirale bestimmt worden ist.

2. *Diamagnetelektricität und Messung der diamagnetisch inducirten elektrischen Ströme.*

Der hier zunächst zu beschreibende diamagnetische Induktionsapparat ist so eingerichtet, dass *die Induktion durch blosse Bewegung*

des diamagnetischen Körpers in einer ruhenden Drahtspirale hervorgebracht wird, während der Diamagnetismus des Körpers unverändert bleibt, wodurch vermieden wird, dass in dem Wismuth, *als Leiter*, galvanische Ströme inducirt werden, die sonst durch eine *sekundäre Induktion* Wirkungen hervorbringen würden, welche mit den Wirkungen der *diamagnetischen Induktion* leicht verwechselt werden könnten. Die praktische Ausführung eines solchen *diamagnetischen Induktionsapparats* beruht auf der Anwendung einer galvanischen Spirale, durch deren *elektromagnetische Scheidungskraft*, wie oben bemerkt worden ist, ein in ihrer Mitte befindlicher Wismuthstab *gleichförmig diamagnetisirt und innerhalb gewisser Grenzen verschoben werden kann, ohne dabei eine Aenderung der Stärke seines Diamagnetismus zu erleiden.*

Der zur diamagnetischen Induktion benutzte Elektrodiamagnet.

Der zur diamagnetischen Induktion benutzte *Elektrodiamagnet* bestand aus einem Wismuthstabe in einer langen Drahtspirale *Acccc* Fig. 5 (S. 580), durch welche der Strom von acht Bunsen'schen Kohlenzinkbechern geleitet wurde. Der Wismuthstab war 186 Millimeter lang und wog 339 300 Milligramm. Die Drahtspirale bestand aus Kupferdraht, welcher mit Wolle umsponnen und ausserdem mit Guttapercha überzogen war; der reine Kupferdraht war 2,3 Millimeter dick, der aufgewundene Draht bildete acht Lagen übereinander, jede zu 120 Umwindungen. Die ganze Spirale war 383 Millimeter lang und hatte 23,9 Millimeter inneren und 70 Millimeter äusseren Durchmesser.

Die Induktionsspirale.

Die Induktionsspirale *Abbbb* Fig. 5 (S. 580) ist diejenige Spirale, in welcher *durch die Bewegung des Elektrodiamagnets ein Strom inducirt werden soll.* Diese Spirale muss von der zum Elektrodiamagnet gehörigen, durch welche der Strom der galvanischen Säule geht, sorgfältig isolirt und mit dem Multiplikator des Galvanometers, womit der inducirte Strom beobachtet werden soll, verbunden werden. Diese Spirale bestand aus einem 1 Millimeter dicken, mit Seide übersponnenen Kupferdraht, welcher drei Lagen übereinander, jede von 294 Umwindungen bildete; die Länge der Spirale war 383, der innere Durchmesser 19, der äussere 23 Millimeter. Nachdem sie zur besseren Isolirung noch mit dünnem Guttapercha umwickelt worden, war sie fest in die weitere Röhre der zum Elektrodiamagnet gehörigen Spirale eingeschlossen, oder vielmehr die letztere Spirale darum gewunden.

Der wesentlichste, bei dieser Spirale in Betracht kommende, Punkt

ist, dass sie ihrer Länge nach in zwei ganz symmetrisch gewundene Hälften zerfalle, d. h., der Draht ist nicht der ganzen Länge nach gleichförmig in derselben Richtung fortgewunden, sondern die Spirale zerfällt ihrer Länge nach in zwei Hälften, die entgegengesetzt gewunden sind. Es ist dieses nothwendig, wenn durch die Bewegung eines diamagnetischen Wismuth- oder magnetischen Eisenstabs in dieser Spirale ein Strom inducirt werden soll, denn wird dieser inducirende Stab in die Mitte der Spirale gelegt und daselbst bewegt, so ist die von seinem nördlichen Ende in der einen Hälfte der Spirale ausgeübte Induktionskraft der von seinem südlichen Ende in der anderen Hälfte ausgeübten gerade entgegengesetzt, und die Wirkung beider würde sich aufheben, wenn beide Hälften der Spirale in gleichem Sinne gewunden wären. Durch ihre entgegengesetzte Windung wird bewirkt, dass die beiden Induktionskräfte einander nicht aufheben, sondern *verdoppeln.*

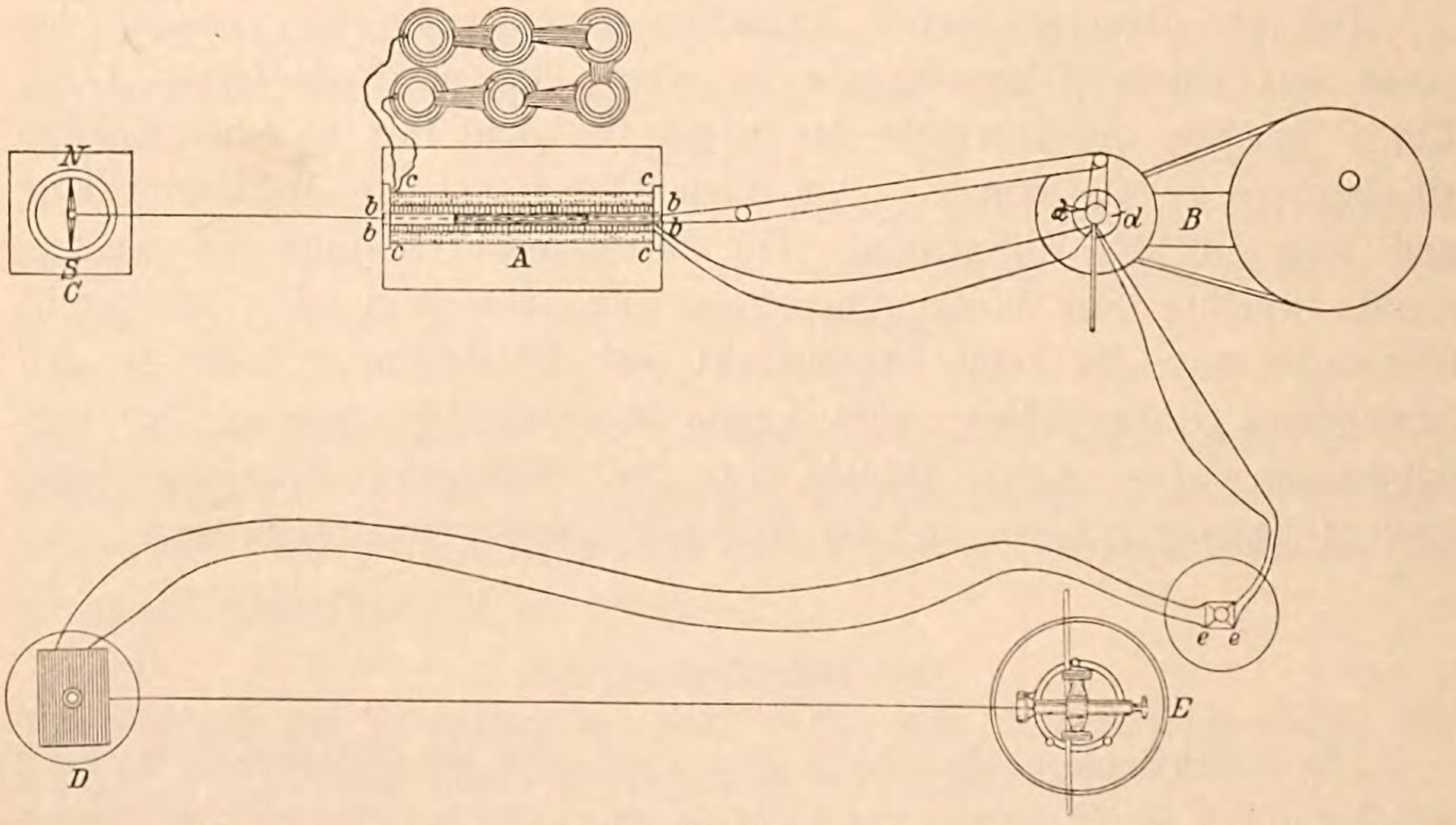


Fig. 5.

Diese zum Zwecke der Induktion nothwendige Einrichtung gewährt ausserdem noch einen für die praktische Ausführung der Versuche wichtigen Vortheil. Es leuchtet nämlich ein, dass der Strom der galvanischen Säule in der zum Elektrodiamagnet gehörigen Spirale zwar, so lange er *konstant* ist, keine inducirende Kraft auf die Induktionsspirale ausüben könne; bei der geringsten *Aenderung seiner Intensität* aber würde er in der Induktionsspirale einen Strom induciren, welcher weit stärker wäre als der diamagnetisch inducirte Strom, und die Beobachtungen des letzteren stören würde. Nun leuchtet aber ein, dass dieselbe Einrichtung der Induktionsspirale, durch welche bewirkt wird, dass die diamagnetische Induktion in beiden Hälften dieser Spirale sich

verdoppelt, zugleich eine *Aufhebung* der von dem Strome der galvanischen Säule auf die beiden Hälften der Induktionsspirale ausgeübten Induktionskräfte bewirkt, so dass, wenn nur die Symmetrie beider Hälften vollkommen ist, auch die grössten Intensitätsänderungen des Stroms der Säule gar keinen Einfluss haben. Dazu kommt noch 1. dass es sehr leicht zu prüfen ist, ob diese Aufhebung wirklich genau vorhanden ist, indem man statt kleiner Aenderungen den ganzen Strom löst oder kommutirt; 2. dass wenn es sich findet, dass diese Aufhebung nicht vollkommen ist, es sehr leicht dahin gebracht werden kann, blos dadurch, dass das eine Drahtende der Induktionsspirale noch ein oder einige Male um die zum Elektromagnet gehörige Spirale herumgewunden wird. Es ist auf diese Weise leicht, die Wirkungen der diamagnetischen Induktion von allen fremdartigen Einflüssen zu befreien.

Die übrigen Theile des Induktionsapparats.

Ueber die Einrichtung der übrigen Theile, welche mehr oder weniger der Willkür des Beobachters überlassen bleibt, füge ich nur folgende Bemerkungen bei. Um den Wismuthstab in der Induktionsspirale hin- und herzuschieben, verbinde ich denselben mit der Kurbel eines Rades *B* (Fig. 5), damit ferner der in der Induktionsspirale bei der Zurückschiebung des Wismuthstabs inducirte Strom im Multiplikator des Galvanometers dieselbe Richtung habe wie bei der Hinschiebung, so ist am Rade ein *Kommutator dd* angebracht, *welcher sich mit dem Rade dreht*, und durch welchen bei jeder halben Umdrehung des Rads (in dem Augenblicke, wo der Wismuthstab den Anfangs- oder Endpunkt seiner Bahn erreicht) die Verbindung der Drahtenden der Induktionsspirale mit denen des Multiplikators des Galvanometers gewechselt wird. Die hiernach immer gleiche Richtung, in welcher alle inducirten Ströme durch den Multiplikator des Galvanometers gehen, würde immer eine Ablenkung der Nadel nach derselben Seite zur Folge haben. Um nun den Beobachter in den Stand zu setzen, auch eine Ablenkung der Nadel nach der anderen Seite hervorzubringen, ist neben dem Beobachtungsfernrohr *E* (Fig. 5), noch ein zweiter Kommutator *ee* aufgestellt, welcher nur von dem Beobachter selbst gewechselt wird und der *Hülfskommutator* heissen soll. — Besondere Aufmerksamkeit ist noch darauf zu verwenden: 1. dass man die Induktion mehr durch Beschleunigung der Drehung des Rads, als durch Vergrösserung der Bahn des Wismuthstabs zu verstärken suche; 2. dass kein thermomagnetischer Strom am rotirenden Kommutator entstehe; man muss denselben so einrichten, dass sich nur gleiche Metalle an einander reiben. Uebrigens kann der Einfluss dieser Ströme, wenn sie sehr schwach sind, durch

angemessene Kombination der Beobachtungen leicht ganz eliminirt werden. — Um endlich eine ungefähre Kenntniss von der Stärke des Stroms der galvanischen Säule zu erhalten dient eine gewöhnliche Boussole, in angemessener Entfernung von der zum Elektrodiamagnet gehörigen Spirale so aufgestellt, dass der durch diese Spirale gehende Strom eine bequem zu messende Ablenkung hervorbringt.

Die Versuche wurden damit begonnen, dass 1. bei *normaler* Stromrichtung der Rotationskommutator in Drehung versetzt und damit zugleich der *Wismuthstab* in der Induktionsspirale hin- und hergeschoben wurde. Dabei wechselte der Beobachter bei jeder Elongation der Galvanometernadel den Hülfskommutator, bis der dadurch multiplicirte Schwingungsbogen seinem Grenzwerthe nahe gebracht war. Sodann wurde 2. dieselbe Versuchsreihe bei *umgekehrter* Stromrichtung, 3. wieder bei *normaler*, 4. bei *umgekehrter* und endlich 5. nochmals bei *normaler* Stromrichtung wiederholt. Alsdann wurde 6. der Wismuthstab mit einem dünnen *Eisenstäbchen* vertauscht und seine Induktion auf gleiche Weise bei *normaler* Stromrichtung gemessen.

1. Induktion *des Wismuthstabs bei normaler* Stromrichtung.

No. der Schwingung	Stellung des Hülfskommutators	Stand der Nadel am Anfange und Ende jeder Schwingung	Schwingungsbogen der Nadel	Reducirter Schwingungsbogen	Mittelwerth	Ablenkung der Boussole
		475,3				
1.	—	472,8	+ 3,70			
2.	+	477,7	+ 5,40			
3.	—	471,8	+ 6,80			
4.	+	479,5	+ 8,35			
5.	—	470,5	+ 9,65			
6.	+	480,8	+ 10,55			
7.	—	470,0	+ 11,40	+ 13,20		
8.	+	482,0	+ 12,25	+ 13,65	+ 13,60	32° 10′ westlich
9.	—	469,5	+ 12,70	+ 13,75		
10.	+	482,4	+ 13,00	+ 13,80		
11.	—	469,3				

2. bei *umgekehrter* Stromrichtung.

No. der Schwingung	Stellung des Hülfskommutators	Stand der Nadel am Anfange und Ende jeder Schwingung	Schwingungsbogen der Nadel	Reducirter Schwingungsbogen	Mittelwerth	Ablenkung der Boussole
		503,5				
1.	+	515,9	+ 9,50			
2.	—	509,3	+ 3,65			
3.	+	510,0	— 1,25			
4.	—	513,2	— 4,75			
5.	+	506,9	— 7,35			
6.	—	515,3	— 8,90			
7.	+	505,9	— 9,60	— 14,12		
8.	—	515,7	— 9,95	— 13,10	— 13,08	31° 50′ östlich
9.	+	505,6	— 9,85	— 12,02		
10.	—	515,2				

3. bei *normaler* Stromrichtung.

No. der Schwingung	Stellung des Hülfskommutators	Stand der Nadel am Anfange und Ende jeder Schwingung	Schwingungsbogen der Nadel	Reducirter Schwingungsbogen	Mittelwerth	Ablenkung der Boussole
		480,5				
1.	+	471,0	− 7,15			
2.	−	475,8	− 2,80			
3.	+	475,0	+ 0,85			
4.	−	472,5	+ 3,80			
5.	+	477,6	+ 6,25			
6.	−	470,2	+ 8,05			
7.	+	478,9	+ 9,25			
8.	−	469,1	+ 10,00	+ 13,17		
9.	+	479,3	+ 10,75	+ 13,12		
10.	−	468,0	+ 11,30	+ 13,08	+ 13,06	31° 48′ westlich
11.	+	479,3	+ 11,30	+ 12,88		
12.	−	468,0				
		4. bei *umgekehrter* Stromrichtung.				
		501,5				
1.	+	515,0	+ 10,15			
2.	−	508,2	+ 4,30			
3.	+	510,0	− 0,05			
4.	−	511,9	− 3,40			
5.	+	507,0	− 5,60			
6.	−	513,3	− 7,25			
7.	+	505,1	− 8,65			
8.	−	514,2	− 9,65			
9.	+	504,0	− 10,10	− 12,33		
10.	−	514,0	− 10,55	− 12,21		
11.	+	502,9	− 11,00	− 12,25	− 12,16	32° 13′ östlich
12.	−	513,8	− 11,30	− 12,24		
13.	+	502,1	− 11,45	− 12,15		
14.	−	513,3	− 11,25	− 11,76		
15.	+	502,0				
		5. bei *normaler* Stromrichtung.				
		486,0				
1.	+	461,0	− 20,40			
2.	−	476,8	− 12,40			
3.	+	467,8	− 6,15			
4.	−	471,1	− 1,25			
5.	+	471,9	+ 2,75			
6.	−	467,2	+ 5,75			
7.	+	474,0	+ 7,10			
8.	−	466,6	+ 7,30			
9.	+	473,8	+ 7,75			
10.	−	465,5	+ 8,90	+ 10,86		
11.	+	475,0	+ 9,70	+ 11,23		
12.	−	465,1	+ 10,05	+ 11,20		
13.	+	475,3	+ 10,25	+ 11,10	+ 10,95	31° 39′ westlich
14.	−	465,0	+ 10,15	+ 10,77		
15.	+	475,0	+ 10,10	+ 10,56		
16.	−	464,8				

6. Induktion des *Eisenstabs bei normaler* Stromrichtung.

No. der Schwingung	Stellung des Hülfs-kommutators	Stand der Nadel am Anfange und Ende jeder Schwingung	Schwingungs-bogen der Nadel	Reducirter Schwingungs-bogen	Mittelwerth	Ablenkung der Boussole
1.	+	461,0				
2.	—	457,2	— 15,30			
3.	+	484,0	— 33,65			
4.	—	443,5	— 45,60			
5.	+	494,2	— 54,95			
6.	—	435,0	— 62,20			
7.	+	500,2	— 67,45			
8.	—	430,5	— 71,50	— 84,98		
9.	+	503,8	— 74,50	— 84,60		
10.	—	428,1	— 76,90	— 84,47		
11.	+	506,2	— 78,60	— 84,28		
12.	—	427,1	— 79,90	— 84,16		
13.	+	507,8	— 80,85	— 84,04	— 83,876	31° 48′ westlich
14.	—	426,8	— 81,10	— 83,50		
15.	+	508,0	— 81,30	— 83,10		
16.	—	426,6	— 81,50	— 82,85		
17.	+	508,2	— 81,75	— 82,78		
		426,3				

Bezeichnet man den sehr geringen Einfluss, welchen der *thermomagnetische Strom* auf das Resultat ausübte, der Reihe nach mit x, x^{I}, x^{II}, x^{III}, x^{IV}, und vernachlässigt die noch kleineren Unterschiede $x - x^{I}$, $x^{I} - x^{II}$, $x^{II} - x^{III}$, $x^{III} - x^{IV}$, so erhält man folgende Bestimmungen für den der *diamagnetischen* Induktion allein entsprechenden Grenzwerth, auf normale Stromrichtung reducirt:

aus 1	$+ 13,60 + x$	$+ 13,34$		
2	$+ 13,08 - x^{I}$	$+ 13,07$		
3	$+ 13,06 + x^{II}$	$+ 12,61$		im Mittel + 12,644.
4	$+ 12,16 - x^{III}$	$+ 11,555$		
5	$+ 10,95 + x^{IV}$			

Aus diesem, *bei gleichförmiger Vertheilung der* (durch die Hin- und Herschiebung des Wismuthstabs hervorgebrachten) *Induktionsstösse* auf die ganze Schwingungsdauer der Nadel gefundenen, Grenzwerthe der Schwingungsbögen lässt sich nun leicht auch derjenige Grenzwerth ableiten, welcher einer Koncentration aller Induktionsstösse während einer Schwingungsdauer auf den Mittelpunkt der Schwingungsdauer entsprochen haben würde. Der gefundene Werth des Schwingungsbogens = 12,644 ist zu diesem Zwecke nur mit $\pi/2$, oder genauer, mit Berücksichtigung der Dämpfung, mit 1,574235 zu multipliciren, wodurch man den gesuchten Grenzwerth

$$= + 19,905$$

erhält. Für den *Eisenstab* (wo alle Induktionsstösse stets im Mittelpunkte jeder Schwingungsdauer Statt fanden) ist der entsprechende Grenzwerth

$$= - 83,876$$

gefunden worden. Aus einer grösseren Anzahl ähnlicher von verschiedenen Beobachtern ausgeführten Versuchsreihen ergiebt sich im Mittel das Verhältniss dieser für *Wismuth* und *Eisen* bestimmten Grenzwerthe wie

$$+ 16,956 : - 83,49.$$

Nun verhält sich die Intensität *der vom Wismuth- und Eisenstabe inducirten Ströme diesen Grenzwerthen direkt proportional, und umgekehrt proportional der Zahl der Induktionsstösse während einer Schwingungsdauer* (d. i. wie

$$1 : 216,2,$$

weil bei den Versuchen mit dem Wismuthstabe 216,2 bei den Versuchen mit dem Eisenstabe nur ein Induktionsstoss während jeder Schwingungsdauer Statt fanden). *Die vom diamagnetischen Wismuthstabe inducirten elektrischen Ströme waren also den vom magnetischen Eisenstabe inducirten ihrer Richtung nach entgegengesetzt, und verhielten sich ihrer Intensität nach wie*

$$16,956 : 83,49 \,.\, 216,2 = 1 : 1064,5,$$

ungeachtet der Wismuthstab 339 300 Milligramm und der Eisenstab blos 760,86 Milligramm wog. Hiernach kann man rechnen, dass der Wismuthstab, *bei gleichem Gewichte* mit dem Eisenstabe, einen 456 700 Mal schwächeren Strom inducirt haben würde. Dieses Resultat gilt aber nur für eine bestimmte Form des Eisenstabs und für eine bestimmte Grösse der auf das Eisen wirkenden Scheidungskraft, nämlich $X = 3012$, welche aus der gemessenen Stromstärke und aus den Umwindungen der elektromagnetischen Spirale bestimmt worden ist.

3. *Ueber die Abhängigkeit der Stärke des Magnetismus veränderlicher Magnete von der Grösse der magnetischen oder elektromagnetischen Scheidungskraft.*

Aus der oben aufgestellten Theorie des Diamagnetismus, im Zusammenhange mit der Lehre vom Magnetismus, ergiebt sich, dass die in der letzteren bisher angenommene Ansicht zweier magnetischer Fluida, die sich in den Eisenmolekulen frei bewegen können (woraus die *Proportionalität* des Magnetismus mit der Scheidungskraft folgt), nicht zulässig sei, und dass daher statt ihrer die von Ampère aufgestellte Ansicht zu setzen sei, wonach die Eisenmolekule die drehbaren Träger beharrlicher Molekularströme sind, eine Ansicht, nach welcher keine *Proportionalität* des Magnetismus mit der Scheidungskraft Statt finden darf. Diese Folgerung der aufgestellten Theorie lässt sich an der Erfahrung prüfen, und es sind in dieser Beziehung schon oben die von Müller gemachten Versuche angeführt worden. Indessen sind andere Versuche, namentlich von Buff und Zamminer, gemacht worden, welche

zu anderen Resultaten geführt haben. Vor einer neuen Wiederholung dieser Versuche sind daher die Verhältnisse näher zu prüfen, von denen eine sichere Entscheidung abhängt.

Aus den von Müller gemachten Versuchen hatte sich ergeben, dass die Abweichung des Magnetismus *dünner* Eisenstäbe von der Proportionalität mit der Scheidungskraft bei viel kleineren Scheidungskräften wahrgenommen werde, als die des Magnetismus *dicker* Stäbe. Es kommt daher, bei der Vergleichung der von Müller mit den von Buff und Zamminer gemachten Versuchen, in Betracht, dass der dünnste von Müller gebrauchte Stab nur 6, der dünnste von Buff und Zamminer gebrauchte 9 Millimeter dick war, und diese Verschiedenheit der Dicke wird durch ihr Verhältniss zur Länge noch einflussreicher, indem der dünnere Stab von Müller 330, der dickere von Buff und Zamminer nur 200 Millimeter lang war. Zu den folgenden Versuchen wurde ein noch dünnerer Stab als der von Müller, nämlich von 3,66 Millimeter Dicke bei 100,2 Millimeter Länge und 8190 Milligramm Masse gebraucht. Auch der (von grösserer Scheidungskraft hervorgebrachte) Magnetismus eines so dünnen Stabs lässt sich noch mit grosser Genauigkeit durch die von ihm aus der Ferne hervorgebrachte Ablenkung eines kleinen Spiegelmagnetometers messen; die einzige Schwierigkeit besteht nur in der gehörigen Sonderung der vom Eisenmagnetismus und der von dem galvanischen Strom hervorgebrachten Wirkungen. Es leuchtet nämlich ein, dass, wenn man dieselbe galvanische Spirale zur Magnetisirung sowohl dicker als dünner Stäbe gebraucht, wie es von Müller, Buff und Zamminer geschehen ist, abgesehen davon, dass dadurch auf die grössere Scheidungskraft verzichtet wird, welche auf einen dünneren Stab wirken würde, wenn derselbe Strom in mehreren engeren Windungen um denselben herumgeführt würde, jede Scheidung bei dünneren Stäben weniger Genauigkeit gestattet, weil die unmittelbare Wirkung der Spirale dieselbe bleibt, und daher für die dünneren Stäbe verhältnissmässig grösser als für die dickeren ist. Zu den folgenden Versuchen wurde daher eine Spirale gebraucht, welche den dünnen Stab eng umschloss, und es wurde ausserdem noch die Einrichtung getroffen, dass derselbe Spiraldraht ausser diesen engen Windungen noch zwei grössere Windungen bildete, welche der Strom in entgegengesetzter Richtung durchlief, und die einen ebenso grossen Flächenraum umgrenzten, wie alle engen Windungen zusammen genommen. Dadurch wird nach den bekannten Gesetzen des *Elektromagnetismus* bewirkt, dass der Strom unmittelbar gar keine Wirkung auf das entfernte Magnetometer ausübt, was sich auch leicht direkt prüfen lässt. Die ganze am Magnetometer beobachtete Wirkung rührt dann blos von dem *Eisenmagnetismus* her, der sich dann mit gleicher Schärfe und Genauig-

keit, wie der Magnetismus beharrlicher Magnete, nach der von Gauss in der Intensitas etc. gegebenen Anleitung aus der gemessenen Ablenkung und aus der bekannten Stärke der erdmagnetischen Kraft *nach absolutem Maasse* bestimmen lässt. Als ein wesentlicher Umstand ist noch hervorzuheben, dass die von Müller, Buff und Zamminer gebrauchten Spiralen kürzer waren, als die dadurch magnetisirten Eisenstäbe. Bei Müller war dieser Unterschied nur gering, denn der Eisenstab ragte nur 15 Millimeter zu beiden Seiten aus der Spirale hervor; bei Buff und Zamminer war er aber viel grösser, indem die Enden des längsten und dünnsten Stabs 45 Millimeter zu beiden Seiten aus der Spirale hervorragten. Der hiervon herrührende nachtheilige Einfluss wurde aber noch dadurch vergrössert, dass die Länge des in der Spirale eingeschlossenen Theils blos 110 Millimeter betrug, statt bei Müller 300 Millimeter. Dieser Umstand dürfte der Hauptgrund von der scheinbaren Differenz der Resultate sein, zu denen diese Beobachter gelangt sind; denn es leuchtet ein, dass die Wirkung der Spirale auf das Eisen in der Mitte am stärksten ist, nach den Enden aber abnimmt, und dass diese Abnahme ausserhalb der Spirale ausserordentlich schnell wächst. Daraus folgt, dass, wenn auch, für grössere Werthe der Stromstärke, die im mittleren Theile des Eisenstabs hervorgebrachte Wirkung ihrem Grenzwerthe sich näherte, eine solche Annäherung bei den ausserhalb der Spirale liegenden Theilen noch keineswegs eingetreten zu sein brauchte. Um daher diese Annäherung in allen Theilen des Eisenstabs gleichzeitig hervorzubringen, wurde bei den folgenden Versuchen eine Spirale gebraucht, welche bedeutend länger als der Eisenstab war, so dass die von dieser Spirale (deren Durchmesser zugleich gegen ihre Länge sehr klein war) auf die Enden des Eisenstabs ausgeübte Kraft von der auf die Mitte ausgeübten nicht merklich verschieden war, wodurch allein sichere Resultate erhalten werden konnten.

Ich begnüge mich hier, ohne auf die Beschreibung der Versuche im Einzelnen einzugehen, die auf diese Weise gewonnenen Resultate in der folgenden Tafel übersichtlich zusammenzustellen, und bemerke nur, dass jede einzelne Bestimmung auf 4 maligem Stromwechsel in der Spirale beruht, wobei sich stets die grösste Uebereinstimmung ergab, zum Beweise, dass die Koercitivkraft des Eisens der Genauigkeit der Messung dabei keinen Eintrag that. Die nach bekannten Regeln in der Tafel gemachte Zurückführung des Eisenmagnetismus auf *absolutes Maass* bedarf keiner weiteren Erläuterung. Auch die Stromstärke ist mit Hülfe einer Tangentenboussole nach *absolutem Maasse* bestimmt und dabei auch die, von dem Verhältniss der Nadellänge zum Durchmesser des Rings abhängige Korrektion berücksichtigt worden. Aus der so bestimmten *Stromstärke* aus der *Zahl der Windungen* und den *Dimen-*

sionen der Spirale wurde endlich *die Grösse der auf das Eisen wirkenden Scheidungskraft* berechnet und nach demselben Maasse, nach welchem die Stärke der erdmagnetischen Kraft ausgedrückt wird, in der *zweiten* Kolumne der folgenden Tafel unter X angegeben. Der gefundene *Eisenmagnetismus* M, mit der in Milligramm ausgedrückten Masse des Eisens, $p = 8190$, dividirt und dadurch *auf die Masseneinheit reducirt,* ist in der dritten Kolumne unter m aufgeführt.

No.	X	m
1.	658,9	911,1
2.	1381,5	1424,0
3.	1792,0	1547,9
4.	2151,0	1627,3
5.	2432,8	1680,7
6.	2757,0	1722,7
7.	3090,6	1767,3
8.	3186,0	1787,7
9.	2645,6	1707,9
10.	2232,1	1654,0
11.	1918,7	1584,1
12.	1551,2	1488,9
13.	1133,1	1327,9
14.	670,3	952,0

Durch diese Versuche wird das von Müller gefundene Resultat bestätigt, und es bleibt nur näher zu erörtern übrig, ob die hier gefundene Veränderlichkeit der Stärke des Eisenmagnetismus bei verschiedener Grösse der auf das Eisen wirkenden Scheidungskraft mit dem Gesetze übereinstimme, welches am Ende des ersten Abschnitts *aus der Annahme einer bestimmten Drehbarkeit der Molekule* abgeleitet worden ist. Ist dies der Fall, so leuchtet von selbst ein, dass man mit Ampère annehmen kann, dass *diese drehbaren Molekule die Träger von Molekularströmen* sind, wodurch die Erklärung von der *Entstehung und den Veränderungen des Eisenmagnetismus* ganz unabhängig von der Annahme *magnetischer Fluida* gemacht und *auf die blosse Annahme beweglicher elektrischer Fluida zurückgeführt wird.*

Nach der (am Ende des ersten Abschnitts gemachten) *Annahme einer bestimmten Drehbarkeit der Molekule* wird die Beschaffenheit eines jeden Körpers in magnetischer Beziehung durch *zwei Merkmale* bestimmt, nämlich 1. *durch das Produkt des magnetischen Moments eines Molekuls* (nach der Richtung seiner magnetischen Axe) *in die Zahl der Molekule des Körpers*; 2. *durch die mit dem Namen der molekularen Direktionskraft bezeichnete Konstante.* Jenes Produkt ist oben mit $n\mu$, diese Konstante mit D bezeichnet worden.

Setzt man nun für *Eisen*

$$n\mu = 2324{,}68,$$
$$D = 276{,}39,$$

wobei die Zahl der Molekule n auf die *Masseneinheit* bezogen werden möge, so ergiebt sich aus den am Ende des ersten Abschnitts gegebenen Formeln, wenn sie auf die *Masseneinheit* (statt auf die Volumeneinheit) bezogen werden, wobei die Dichtigkeit des Eisens = 7,78 und der Zahlenfaktor S für den 100,2 Millimeter langen und 3,66 Millimeter dicken Stab $S = 1/249$ zu nehmen ist, folgende Tafel zusammengehöriger Werthe von X und m.

X	m
658,9	948,4
1381,5	1387,0
1792,0	1533,0
2151,0	1623,5
2432,8	1685,0
2757,0	1742,2
3090,6	1791,2
3186,0	1803,4
2645,6	1723,6
2232,1	1644,8
1918,7	1568,9
1551,2	1452,9
1133,1	1276,8
670,3	957,5

Man sieht, dass diese berechneten Werthe von den Werthen der vorigen Tafel, welche durch Beobachtung erhalten worden, wenig abweichen.

Nach denselben Formeln ergiebt sich ferner für dasjenige *Eisenstäbchen*, für welches unter No. 1 der Werth von m durch Vergleichung *magnetischer Wirkungen* 1 470 000 Mal grösser als für Wismuth gefunden worden ist, wobei $X = 629{,}9$ war:

$$m = 2134;$$

folglich für *Wismuth*

$$\text{für } X = 629{,}9 \quad m = \frac{2134}{1\,470\,000} = \frac{1}{689}.$$

Dagegen ergiebt sich für dasjenige *Eisenstäbchen*, für welches unter No. 2 der Werth von m durch Vergleichung der *Induktionswirkungen* 360 740 Mal grösser als für Wismuth gefunden worden ist, wobei $X = 3012$ war,

$$m = 2305{,}4,$$

folglich für *Wismuth*

$$\text{für } X = 3012 \quad m = \frac{2305{,}4}{360\,740} = \frac{1}{156{,}5}.$$

Hiernach wäre also der Wismuthdiamagnetismus, bei 4,8 Mal stärkerer Scheidungskraft X, 4,4 Mal grösser erhalten worden, d. i. *nahe proportional, ungeachtet die eine Bestimmung auf einer Vergleichung der magnetischen, die andere auf einer Vergleichung der Induktionswirkungen beruht.* Hierdurch wird der Satz bestätigt, dass

die Induktionswirkungen zu den magnetischen bei diamagnetischem Wismuthe sich ebenso verhalten wie bei magnetischem Eisen.

Wird der Diamagnetismus nach demselben *absoluten Maasse* wie der Magnetismus bestimmt, so ergiebt sich endlich *die Stärke des Diamagnetismus von 1 Milligramm Wismuth unter dem Einfluss der Scheidungskraft* $X = 1$

$$= \frac{1}{452\,000}.$$

Die Stärke des Magnetismus von 1 Milligramm Eisen unter dem Einfluss der Scheidungskraft $X = 1$

$$= 5{,}6074,$$

d. h. *der Magnetismus eines dünnen Eisenstäbchens übertrifft den Diamagnetismus einer gleichen Wismuthmasse, wenn auf beide kleine und gleiche Scheidungskräfte wirken, etwa* $2\frac{1}{2}$ *Millionen Mal.* Für *dickere* Eisenstäbe und *grössere* Scheidungskräfte ergiebt sich diese Zahl kleiner.

XIII.

[Berichte über die Verhandlungen der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, mathematisch-physische Klasse, Bd. 17, Leipzig 1855, p. 55—61.]

Sitzung am 20. Oktober 1855.

Wilhelm Weber, *Vorwort* bei der Uebergabe der Abhandlung: *Elektrodynamische Maassbestimmungen, insbesondere Zurückführung der Stromintensitäts-Messungen auf mechanisches Maass.*

Der königlichen Gesellschaft der Wissenschaften übergebe ich die genannte, von mir und Professor Kohlrausch in Marburg verfasste Abhandlung. Sie bildet eine Fortsetzung von drei Abhandlungen, welche ich früher übergeben und welche unter demselben allgemeinen Titel erschienen sind.

Das allgemeine Gesetz der elektrischen Wirkung und die daraus für die verschiedenen Theile der Elektricitätslehre abgeleiteten Fundamentalgesetze, mit Ausnahme des Fundamentalgesetzes der Elektrostatik, enthalten, wie schon in der ersten Abhandlung entwickelt worden, eine *Konstante,* deren nach bekannten Maassen ausgedrückter Zahlenwerth für die ganze Elektricitätslehre sowohl in theoretischer als praktischer Beziehung von grosser Wichtigkeit ist. Denn wenn man auch, ohne Kenntniss des Werths dieser Konstanten, sehr zahlreiche Anwendungen von jenen Gesetzen machen kann zur Bestimmung von Verhältnissen oder Quotienten, wo sich diese Konstante im Zähler und Nenner aufhebt, so giebt es doch noch viele andere Anwendungen von obigen Gesetzen, welche ohne Werthbestimmung der in ihnen enthaltenen Konstanten nicht möglich sind. An dieser Werthbestimmung fehlte es noch bis jetzt und diese Lücke in den elektrodynamischen Maassbestimmungen auszufüllen, ist das nächste Ziel vorliegender Abhandlung.

Den einfachsten Weg, zu diesem Ziele zu gelangen, bieten die Stromintensitätsmessungen nach absolutem Maasse, welche in der zweiten Abhandlung näher erörtert worden, namentlich diejenigen, welche auf die magnetischen oder elektrodynamischen Stromwirkungen begründet wurden, auf welche die auf elektrolytische Stromwirkungen begründeten mit Hülfe von korrespondirenden Beobachtungen leicht zurückgeführt

werden konnten. Denn die nach einem von jenen beiden Maassen ausgedrückte Stromintensität ist nichts anderes als die Menge der positiven Elektricität, welche nach der Stromrichtung in 1 Sekunde durch jeden Querschnitt des Leiters fliesst, multiplicirt entweder mit $\sqrt{8}$ oder mit 4 und dividirt mit jener *Konstanten*, woraus einleuchtet, dass, wenn nur jene Elektricitätsmenge gemessen werden könnte, die Messung der Stromintensität nach einem von jenen beiden absoluten Maassen zur Werthbestimmung dieser *Konstanten* führen würde. Diese Menge positiver Elektricität aber, welche nach der Richtung des Stroms in 1 Sekunde durch den Querschnitt des Leiters fliesst, ist in der zweiten Abhandlung als *mechanisches Maass* der Stromintensität bezeichnet worden, woraus hervorgeht, dass der Zweck dieser Abhandlung, den Werth jener *Konstanten* zu bestimmen, erreicht wird, wenn es gelingt, *die nach jenen beiden Maassen ausgeführten Stromintensitätsmessungen auf mechanisches Maass zurückzuführen.*

Die Elektricitätsmenge, welche in einer bestimmten Zeit durch den Querschnitt eines Leiters fliesst, lässt sich nun aber während sie strömt nicht messen; sie muss daher vorher gemessen werden, während sie noch in Ruhe sich befindet. Man muss daher eine bestimmte Menge Elektricität, welche man durch einen Leitungsdraht strömen lassen will, vorher angesammelt erhalten, z. B. in einer Leidener Flasche, und muss sie, während sie sich darin in Ruhe befindet, nach *elektrostatischen* Principien zu messen suchen, und muss sodann, wenn dieselbe Elektricitätsmenge einen Leitungsdraht durchströmt (durch den sie z. B. von der Leidener Flasche zur Erde abgeleitet wird), die *Intensität* und die *Dauer* des von ihr gebildeten Stroms *nach absolutem Maasse* bestimmen.

Was nun zuerst jene Messung der in der Leidener Flasche angesammelten Elektricitätsmenge betrifft, so sind zwar die *elektrostatischen* Principien, nach denen diese Messung ausgeführt werden muss, im Allgemeinen bekannt, es hat aber viele Schwierigkeiten gefunden, diese Principien auf die in einer Leidener Flasche angesammelte Elektricität in Anwendung zu bringen. Coulomb, dem wir diese Principien verdanken, hat nur Anwendungen auf sehr kleine Elektricitätsmengen gemacht, mit welchen die kleinen Kugeln seiner elektrischen Wage geladen waren. Die Lösung dieser Schwierigkeiten war daher die Aufgabe, welche uns zum Zwecke dieser Abhandlung vorzugsweise beschäftigen musste. Mehrere dieser Schwierigkeiten waren durch frühere Untersuchungen des Professor Kohlrausch beseitigt worden, und dieser Umstand war die Veranlassung, dass wir uns zur Ausführung einer Arbeit mit einander verbanden, die nur bei so vereinigten Kräften befriedigende Resultate hoffen liess.

Was sodann die Messung der *Intensität* und *Dauer* des von der

in der Leidener Flasche angesammelten Elektricität bei ihrer Ableitung in die Erde erzeugten Stroms betrifft, so leuchtet ein, dass weder die Messung jener *Intensität* noch dieser *Dauer* sich unmittelbar ausführen liessen, weil die Intensität keine konstante ist und weil die Dauer des so erzeugten Stroms unmessbar klein ist. Das Einzige, was sich genau messen lässt, ist der sogenannte *Integralwerth* des so erzeugten Stroms, d. h. die Summe der Produkte aus jedem Zeitelement dt in die (nach absolutem Maasse ausgedrückte) Intensität i des in diesem Zeitelemente vorhandenen Stroms, $= \int i dt$, von Anfang bis Ende des Stroms gerechnet. Dieser Integralwerth ist aber nichts anderes als die Menge der von der Leidener Flasche in die Erde abgeleiteten Elektricität multiplicirt entweder mit $\sqrt{8}$ oder mit 4 und dividirt mit der gesuchten *Konstanten.* Jedoch ist hierbei zu beachten, dass nicht alle, sondern nur die Hälfte der in der Leidener Flasche angesammelten Elektricität aus der Flasche in die Erde strömt, während eine gleiche Menge negativer Elektricität gleichzeitig aus der Erde in die Flasche strömt und daselbst die andere Hälfte der dort angesammelten Elektricität neutralisirt.

Wir müssen in diesem kurzen Berichte darauf verzichten, auf die Ausführung dieser Messungen specieller einzugehen, und verweisen daher, sowohl was die elektrostatische Messung der in einer Leidener Flasche angesammelten Elektricitätsmenge, als auch was die elektrodynamische Messung des Integralwerths des durch Ableitung dieser Elektricität erzeugten Stroms betrifft, auf die Abhandlung selbst. Es möge hier genügen, die Resultate dieser Messungen kurz anzuführen.

Die Messung der in einer Leidener Flasche angesammelten Elektricitätsmenge E bei fünf verschiedenen Ladungen ergab folgende Resultate:

No.	E
1.	35 786 000
2.	41 618 000
3.	49 313 000
4.	44 007 000
5.	49 276 000

Die Bedeutung der unter E angeführten Zahlen ist folgende: Bei der *ersten* Ladung war in der Flasche eine solche Menge positiver Elektricität angesammelt, dass wenn dieselbe in einem Punkt koncentrirt wäre, eine gleiche koncentrirte Menge Elektricität in einem 1 Millimeter davon entfernten Punkte von derselben mit einer dem Gewichte von $(35\,786\,000)^2 \,.\, 1/g$ Milligramm gleichen Kraft abgestossen worden sein würde, wo g die Beschleunigung der ponderablen Körper durch die Schwere bezeichnet, d. i. $g = 9811 \frac{\text{Millimeter}}{(\text{Sekunde})^2}$. Die Messung des Inte-

gralwerths $\int idt$ des durch Ableitung der in der Leidener Flasche angesammelten Elektricität E erzeugten Stroms nach dem auf die magnetischen Stromwirkungen begründeten absoluten Maasse ergaben in diesen fünf Fällen folgende Resultate:

No.	$\int idt$
1.	0,0001194
2.	0,0001300
3.	0,0001568
4.	0,0001480
5.	0,0001589

Nun ist aber nach Obigem, wenn man dabei beachtet, dass von der *positiven* Elektricitätsmenge E nur die Hälfte aus der Leidener Flasche in die Erde strömt, weil die andere Hälfte durch die in umgekehrter Richtung aus der Erde in die Flasche strömende *negative* Elektricität in der Flasche selbst neutralisirt wird, der Quotient $E/\int idt = c\sqrt{2}$, wo c die gesuchte Konstante bezeichnet; folglich erhält man aus obigen fünf Werthen von E und den zugehörigen Werthen von $\int idt$ folgende fünf von einander ganz unabhängige Werthbestimmungen der unbekannten *Konstanten* c:

No.	c
1.	423870 . 10^6
2.	452750 . 10^6
3.	444760 . 10^6
4.	420510 . 10^6
5.	438560 . 10^6

Im Mittel aus diesen 5 Messungen ergiebt sich der Werth der *Konstanten* $c = 436\,090 \,.\, 10^6$.

Die Bedeutung der *Konstanten* c ist die einer bestimmten Geschwindigkeit, und zwar derjenigen Geschwindigkeit, mit welcher sich zwei elektrische Massen einander nähern oder von einander entfernen müssen, wenn weder Anziehung noch Abstossung zwischen ihnen Statt finden soll. Es ist diese Geschwindigkeit c hier durch die Zahl der Millimeter ausgedrückt worden, welche vermöge dieser Geschwindigkeit in 1 Sekunde zurückgelegt werden. Die Meile zu 7408 Meter gerechnet ist dies eine Geschwindigkeit von 58 868 Meilen in 1 Sekunde.

Mit dem Werthe dieser *Konstanten* lassen sich endlich alle nach absoluten Maassen, sie mögen auf die magnetischen oder elektrodynamischen oder elektrolytischen Stromwirkungen begründet sein, ausgeführten Stromintensitätsmessungen leicht auf *mechanisches Maass* zurückführen, woraus sich z. B. ergeben hat, dass eine positive Elek-

tricitätsmenge von $16\frac{4}{9}$ Billionen Maasseinheiten und eine gleiche negative Elektricitätsmenge erfordert wird, um 1 Milligramm Wasser zu zerlegen. Wäre jene positive Elektricitätsmenge in einer Wolke, diese negative an der senkrecht unter der Wolke liegenden Stelle der Erdoberfläche koncentrirt, so würde daraus eine Anziehung der Wolke von der Erde sich ergeben, welche bei 1000 Meter Abstand beider von einander einem Gewichte von 27 545 Kilogramm oder fast 551 Centnern gleich wäre.

Der *zweite* Theil der Abhandlung beschäftigt sich mit Anwendungen, die sich machen lassen, theils indem man die in den früheren Abhandlungen entwickelten Gesetze durch die gewonnene Bestimmung ergänzt, theils die neu gewonnene Bestimmung als Grundlage für neue Untersuchungen zu benutzen sucht.

In allen Gesetzen, in welchen die *Konstante c* vorkommt, erscheint sie immer als Nenner der Geschwindigkeit, mit welcher die Körper sich gegen einander wirklich bewegen, oder als Nenner der Geschwindigkeit, mit welcher die Körper nach Verlauf der Zeiteinheit (Sekunde) sich gegen einander bewegen würden, wenn die vorhandene Beschleunigung während dieser Zeit fortdauerte. Es ist daher praktisch interessant, dass alle wirklichen Geschwindigkeiten, welche wir kennen, selbst die der Weltkörper, gegen die Geschwindigkeit c als verschwindend betrachtet werden können; denn die einzige uns bekannte Geschwindigkeit, welche der Geschwindigkeit c nahe kommt, nämlich die der Fortpflanzung des Lichts, ist keine wirkliche Geschwindigkeit, mit der sich Körper gegen einander bewegen. Es ergeben sich hieraus interessante Anwendungen, z. B. dass man die dem Gesetz der Elektrostatik beigefügte Ergänzung auch auf das Gravitationsgesetz übertragen könnte, weil die Aenderung der Gravitationskraft, welche sich daraus ergeben würde, unter allen Verhältnissen, wo wir sie beobachten, gänzlich verschwinden würde. Dass bei der Elektricität die Aenderung der *elektrostatischen Kraft* (welche der Gravitationskraft der Ponderabilien entspricht) durch Hinzufügung der erwähnten Ergänzung nicht überall verschwindet, hat seinen Grund blos in der bei Neutralisation positiver und negativer Elektricität Statt findenden vollkommenen Aufhebung der elektrostatischen Kräfte. Wo keine solche Neutralisation Statt findet, sondern freie Elektricität vorhanden ist, wird immer in der Wirkung dieser freien Elektricität die Betrachtung der elektrostatischen Kraft genügen, weil deren Aenderung in Gemässheit jener Ergänzung ebenfalls als ganz verschwindend angesehen werden darf, was für die Betrachtung der freien Elektricität bei geschlossenen Ketten von grosser praktischer Bedeutung ist.

Es ist ein wichtiges Princip endlich für neue Untersuchungen, dass alle Kräfte, welche auf eine elektrische Masse wirken, mittelbar auch

auf die ponderablen Massen wirken, an welchen sie haften und von denen sie nur mit Ueberwindung des den ponderablen Körpern zukommenden Widerstands geschieden werden können. Lassen sich nun jene elektrischen Kräfte nach *mechanischem Maass* bestimmen, so lernt man dadurch die Molekularkräfte kennen, welche die *mechanischen* und *chemischen* Wirkungen der Elektricität auf die ponderablen Körper vermitteln. Es wird gezeigt, wie sich hiernach die Erforschung des galvanischen Widerstands des Wassers benutzen lassen würde, um eine genaue Einsicht und Kenntniss von der *chemischen Affinität* des Sauerstoffs und Wasserstoffs im Wasser zu gewinnen. Könnte man z. B. in der Säule einer Mischung von Wasser und Schwefelsäure von 1,25 spec. Gewicht, welche bei beliebigem Querschnitt 1 Millimeter Höhe besässe, alle Sauerstofftheilchen des Wassers unter einander fest verbinden und mittelst eines gespannten Fadens nach einer Seite ziehen, während alle Wasserstofftheilchen unter einander fest verbunden mittelst eines gespannten Fadens nach der entgegengesetzten Seite gezogen würden, so müsste die Spannung dieser beiden Fäden 1478 Centner betragen, wenn die Systeme der Sauerstofftheilchen und Wasserstofftheilchen in 1 Sekunde so weit aus einander gezogen werden sollten, dass an den beiden Enden der Wassersäule die Bestandtheile von 1 Milligramm Wasser frei würden.

Aehnliche Anwendungen lassen sich wahrscheinlich auch in Beziehung auf die mechanischen Wirkungen der Elektricität beim Ueberspringen von einem Konduktor zu einem anderen machen, wobei kleine ponderable Theilchen des einen Konduktors von der Elektricität mit fortgerissen werden. Besässe man eine genauere Kenntniss von allen dabei wesentlich in Betracht kommenden Verhältnissen, so würde es vielleicht möglich sein, auf diesem Wege die Masse des neutralen elektrischen Fluidums, welche in den ponderablen Körpern existirt, zu bestimmen, und es scheint schon jetzt daraus unter gewissen wahrscheinlichen Voraussetzungen auf eine ausserordentliche Grösse dieser Masse geschlossen werden zu können. Je grösser diese Masse aber ist, desto kleiner würde die Geschwindigkeit sein, mit welcher dieselbe sich in den galvanischen Strömen bewegte, und es scheint auf diese Weise schon jetzt mit grosser Wahrscheinlichkeit angenommen werden zu können, dass die wirkliche Geschwindigkeit, mit welcher die elektrischen Massen in geschlossenen Ketten sich verschieben, ziemlich gering ist und keineswegs mit der grossen Geschwindigkeit verwechselt werden darf, mit welcher die galvanischen Strömungen in geschlossenen Ketten fortgepflanzt werden, welche Wheatstone zu messen versucht hat.

XIV.

Ueber die Elektricitätsmenge, welche bei galvanischen Strömen durch den Querschnitt der Kette fliesst.

Von

Wilhelm Weber und **R. Kohlrausch.**[1])

[Annalen der Physik und Chemie, herausgegeben von J. C. Poggendorff, Bd. 99, Leipzig 1856, p. 10–25.]

1. *Aufgabe.*

Die Vergleichung der Wirkungen einer geschlossenen galvanischen Kette mit den Wirkungen des Entladungsstroms angesammelter freier Elektricität hat zu der Annahme geführt, dass diese Wirkungen von einer *Elektricitätsbewegung* in der Kette herrühren. Wir denken uns in den die Kette konstituirenden Körpern ihre *neutrale* Elektricität in Bewegung, in der Art, dass deren gesammter positiver Theil nach der einen Richtung sich in geschlossenem, zusammenhängendem Kreise herumschiebt, der negative nach der entgegengesetzten Richtung. Der Umstand, dass nirgends durch diese Bewegung eine Aufhäufung der Elektricität entsteht, fordert die Annahme, dass durch jeden Querschnitt in gleicher Zeit die gleiche Elektricitätsmenge hindurchfliesse.

Man hat sich darüber geeinigt, dass man die *Grösse dieses Fliessens*, die sogenannte *Stromintensität*, proportional setzen will der Elektricitätsmenge, welche in derselben Zeit durch den Querschnitt der Kette hindurchgeht. Soll also eine bestimmte Stromintensität durch eine *Zahl* ausgedrückt werden, so ist festzusetzen, welche Stromintensität zum Maasse dienen soll, d. h. welche Grösse des Fliessens man mit *Eins* bezeichnen will.

[1]) Der Herr Herausgeber wünschte für die Annalen einen Bericht über eine von Prof. Weber und mir gemeinschaftlich ausgeführte Arbeit, deren Resultate unter Prof. Weber's wesentlicher und schliesslicher Redaktion im fünften Bande der Abhandlungen der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig unter dem Titel: *Elektrodynamische Maassbestimmungen, insbesondere Zurückführung der Stromintensitätsmessungen auf mechanisches Maass* (Leipzig bei Hirzel, 1856) niedergelegt sind. Ich gebe hiermit einen kurzen Auszug. Kohlrausch.

Am einfachsten wäre es hier, wie überhaupt bei einem jeden Fliessen, diejenige Grösse des Fliessens mit Eins zu bezeichnen, welche entsteht, wenn in der Zeiteinheit die Einheit der Flüssigkeit durch den Querschnitt geht, also das Maass der Stromintensität aus ihrer *Ursache* zu definiren. Die Einheit des elektrischen Fluidums ist in der Elektrostatik durch die *Kraft* bestimmt, mit welcher die freien Elektricitäten in der Entfernung auf einander wirken. Denkt man zwei gleiche Mengen von Elektricität derselben Art in zwei Punkten koncentrirt, deren Entfernung die Längeneinheit ist, und ist dann die Kraft, mit welcher sie abstossend auf einander wirken, gleich der *Krafteinheit*, so ist die in jedem der beiden Punkte befindliche Elektricitätsmenge das *Maass* oder die *Einheit* der freien Elektricität.

Als Krafteinheit wird dabei *diejenige Kraft* angenommen, *durch welche die Masseneinheit während der Zeiteinheit um die Längeneinheit beschleunigt wird.* Dadurch also, dass die Einheiten für die Länge, Zeit und Masse festgesetzt werden, ist nach den Principien der Mechanik zugleich das Maass für die Kräfte gegeben, und indem wir an letzteres das Maass für die freie Elektricität anknüpfen, haben wir gleichzeitig ein Maass für die Stromintensität.

Dieses Maass, welches das *mechanische Maass* der Stromintensität heissen soll, setzt also *die Intensität desjenigen Stroms zur Einheit, welcher entsteht, wenn in der Zeiteinheit die Einheit der freien positiven Elektricität in der einen Richtung, eine gleiche Menge negativer Elektricität in der entgegengesetzten Richtung durch jeden Querschnitt der Kette fliesst.*

Nach diesem Maasse können wir nun die Messung der Intensität eines vorhandenen Stroms nicht ausführen, denn wir kennen weder die Menge des neutralen elektrischen Fluidums, welche in der Kubikeinheit des Leiters vorhanden ist, noch kennen wir die Geschwindigkeit, mit welcher sich die beiden Elektricitäten bei dem Strome verschieben. Wir können die Intensität der Ströme nur durch die *Wirkungen* vergleichen, welche sie hervorbringen.

Eine dieser Wirkungen ist z. B. die *Wasserzersetzung.* Es kommen hinreichende Gründe zusammen, die Stromintensität der Wassermenge proportional zu setzen, welche in derselben Zeit zerlegt wird. Danach würde man *diejenige Stromintensität mit Eins bezeichnen, bei welcher in der Zeiteinheit die Masseneinheit Wasser zerlegt wird,* also z. B., wenn die Sekunde und das Milligramm als die Maasse der Zeit und der Masse angenommen werden, diejenige Stromintensität, bei welcher in einer Sekunde ein Milligramm Wasser zersetzt wird. *Dieses Stromintensitäts-Maass heisst das elektrolytische.*

Nun entsteht die natürliche Frage, wie sich dieses elektrolytische

Maass der Stromintensität zu dem vorhin festgesetzten mechanischen Maasse verhalte, also die Frage, wie viele (elektrostatisch oder mechanische gemessene) positive Elektricitätseinheiten in der Richtung des positiven Stroms während der Sekunde durch den Querschnitt fliessen, wenn dabei in dieser Zeit ein Milligramm Wasser zerlegt wird.

Eine andere Wirkung des Stroms ist das *Drehungsmoment*, welches er auf eine Magnetnadel ausübt und von dem wir ebenfalls voraussetzen, dass es unter sonst gleichen Umständen der Stromintensität proportional sei. Soll durch diese Art Wirkung eine Stromintensität gemessen werden, so sind die *Verhältnisse* festzusetzen, unter denen das Drehungsmoment beobachtet werden soll. Man könnte diejenige Stromintensität mit Eins bezeichnen, welche unter *beliebig* festgesetzten räumlichen Verhältnissen ein *beliebig* festgesetztes Drehungsmoment auf einen *beliebig* gewählten Magneten ausübt. Wenn dann unter *denselben* Verhältnissen ein m Mal so grosses Drehungsmoment beobachtet würde, so müsste die dabei herrschende Stromintensität mit m bezeichnet werden. Das Unpraktische solcher willkürlichen Maasse hat aber eben zu den *absoluten* Maassen geführt und so ist in diesem Falle das elektromagnetische Maass der Stromintensität an das absolute Maass für den Magnetismus anzuknüpfen. Das geschieht durch folgende Festsetzung der *Normalverhältnisse* für die Beobachtungen der magnetischen Wirkungen eines Stroms:

Der Strom geht durch einen kreisförmigen Leiter, welcher die Flächeneinheit umschliesst und wirkt auf einen Magnet, welcher die Einheit des Magnetismus besitzt, aus einer beliebigen aber grossen Entfernung $= R$; *der Mittelpunkt des Magnets liegt in der Ebene des Leiters und seine magnetische Axe ist nach dem Mittelpunkte des kreisförmigen Leiters gerichtet.* — Das von dem Strome auf den Magneten ausgeübte, nach mechanischem Maasse ausgedrückte Drehungsmoment D ist unter diesen Verhältnissen verschieden sowohl nach Verschiedenheit der Stromintensität, als auch nach Verschiedenheit der Entfernung R: das Produkt $R^3 D$ *hängt aber blos von der Stromintensität* ab und ist daher unter diesen Verhältnissen die *messbare* Wirkung des Stroms, nämlich dasjenige, wodurch die Stromintensität zu messen ist, wonach man also zum *magnetischen Maasse der Stromintensität* die Intensität desjenigen Stroms erhält, für welchen $R^3 D = 1$ ist. — Die elektromagnetischen Gesetze lehren, dass dieses Maass der Stromintensität zugleich die Intensität desjenigen Stroms ist, welcher, wenn er eine Ebene von der Grösse der Flächeneinheit umschliesst, in der Ferne überall die Wirkungen eines im Mittelpunkte jener Ebene befindlichen Magneten ausübt, welcher die Einheit des Magnetismus besitzt und dessen magnetische Axe auf der Ebene senkrecht steht; — oder auch, dass es die Intensität desjenigen

Stroms ist, von welchem eine *Tangentenboussole mit einfachem Ringe vom Halbmesser* $= R$ bei einer Ablenkung vom magnetischen Meridiane

$$\varphi = \text{arc tang} \frac{2\pi}{RT}$$

im Gleichgewichte gehalten wird, wenn T die horizontale Intensität des Erdmagnetismus bezeichnet.

Auch hier entsteht die natürliche Frage über das Verhältniss des *mechanischen* Maasses der Stromintensität zu diesem *magnetischen* Maasse, also die Frage, wie viel Mal die elektrostatische Einheit der Elektricitätsmenge während einer Sekunde durch den Querschnitt der Kette hindurchgehen müsse, um diejenige Stromintensität hervorzubringen, von welcher die eben genannte Ablenkung φ der Nadel einer Tangentenboussole bewirkt wird.

Dieselbe Frage wiederholt sich bei der Betrachtung eines *dritten* Stromintensitätsmaasses, welches den elektrodynamischen Wirkungen der Ströme entnommen ist und deswegen das *elektrodynamische Maass* der Stromintensität heisst.

Nun sind die drei von der *Wirkung* der Ströme hergenommenen Maasse schon unter einander verglichen. Man weiss, dass das magnetische Maass $\sqrt{2}$ Mal grösser ist als das elektrodynamische, aber $106\frac{2}{3}$ Mal kleiner als das elektrolytische, und es ist deswegen, um die Frage zu lösen, wie diese drei Maasse sich zum *mechanischen* Maasse verhalten, nur nöthig, das letztere mit *einem* der übrigen zu vergleichen.

Dieses war der Zweck der unternommenen Arbeit, welcher zu erreichen war durch die Lösung der folgenden

Aufgabe:

Es sei ein konstanter Strom gegeben, von welchem eine Tangentenboussole mit einfachem Multiplikatorkreise vom Halbmesser $= R^{mm}$ *bei einer Ablenkung* $\varphi = \text{arc tang}\, 2\pi/RT$ *im Gleichgewichte erhalten wird, wenn* T *die Intensität des die Boussole lenkenden horizontalen Erdmagnetismus bezeichnet: es soll bestimmt werden, wie die Elektricitätsmenge, welche bei einem solchen Strome in einer Sekunde durch den Querschnitt des Leiters fliesst, sich zu der Elektricitätsmenge auf jeder von zwei gleich geladenen (unendlich) kleinen Kugeln verhält, welche einander aus der Entfernung von 1 Millimeter mit der Einheit der Kraft abstossen. Es soll dabei zur Einheit der Kraft diejenige Kraft genommen werden, welche der Masse eines Milligramms in einer Sekunde 1 Millimeter Geschwindigkeit ertheilt.*

2. *Lösung dieser Aufgabe.*

Hat man auf einem isolirten Leiter eine Menge E von freier Elektricität angesammelt und lässt (unter Einschaltung einer Wassersäule) dieselbe durch einen Multiplikator nach der Erde strömen, so wird die Magnetnadel abgelenkt. Diese Grösse der ersten Elongation hängt bei demselben Multiplikator und derselben Nadel *lediglich von der Menge der entladenen Elektricität* ab, indem die Entladungszeit so kurz gegen die Schwingungsdauer der Nadel ist, dass die Wirkung als ein Stoss betrachtet werden darf.

Wenn man einen konstanten Strom eine ähnliche kurze Zeit durch einen Multiplikator leitet, so ertheilt man der Nadel einen ähnlichen Stoss und auch in diesem Falle hängt die Grösse der ersten Elongation *lediglich von der Elektricitätsmenge* ab, welche während der Dauer des Stroms durch den Querschnitt des Multiplikatordrahts sich bewegt.

Wäre nun bei demselben Multiplikator *genau dieselbe* Elongation entstanden, das eine Mal, indem man die *bekannte* Menge E von freier Elektricität entlud, das andere Mal, indem man einen *konstanten Strom* eine kurze Zeit wirken liess, so ist, wie sich beweisen lässt, die Menge positiver Elektricität, welche während dieser kurzen Zeit bei dem konstanten Strome in der Richtung dieses Stroms durch den Querschnitt floss, gleich $\frac{1}{2} E$.

Hiernach fordert die gestellte Aufgabe die Lösung folgender zwei Aufgaben:

a) *eine angesammelte Menge E von freier Elektricität in dem angegebenen elektrostatischen Maasse zu messen und bei ihrer Entladung die Elongation der Magnetnadel eines Galvanometers zu beobachten;*

b) *die kleine Zeit τ zu bestimmen, während welcher ein konstanter Strom von der Intensität $= 1$ (nach magnetischem Maasse) durch den Multiplikator desselben Galvanometers fliessen muss, damit er der Nadel dieselbe Elongation ertheile.*

Multiplicirt man dann $\frac{1}{2} E$ mit der Zahl, welche anzeigt, wie oft τ in der Sekunde enthalten ist, so erhält man in der Zahl $E/2\tau$ die positive Elektricitätsmenge ausgedrückt, welche bei einem Strom, dessen Intensität nach magnetischem Maasse $= 1$ ist, während der Sekunde in der Richtung des positiven Stroms den Querschnitt des Leiters passirt.

Die Aufgabe *a* wurde in folgender Weise behandelt.

Es wurde zuerst mit Hülfe des Sinus-Elektrometers das Verhältniss mit grosser Genauigkeit bestimmt, in welchem sich die Ladung einer kleinen Leidener Flasche zwischen ihr selbst und einer etwa 13 zölligen, mit Stanniol bekleideten Kugel theilte, welche entfernt von den Wandungen des Zimmers gut isolirt aufgehängt war, so dass aus der auf

die Kugel übergegangenen Elektricitätsmenge, sobald man diese zu messen verstand, auch die in der kleinen Flasche zurückgebliebene Menge bis auf einen Theil eines Procentes berechnet werden konnte.

Die Beobachtungen bestanden darauf in Folgendem:

Die Flasche wurde geladen, die grosse Kugel mit ihrem Knopfe berührt, drei Sekunden später die in der Flasche zurückgebliebene Ladung durch einen aus 5635 Windungen gebildeten Multiplikator[1]) unter Einschaltung von zwei mit Wasser gefüllten langen Röhren entladen und die erste Elongation φ der mit einem Spiegel nach Art der Magnetometer versehenen Magnetnadel beobachtet. Zugleich wurde jetzt die grosse Kugel mit der ungefähr 1zölligen Standkugel einer in sehr grossem Maassstabe ausgeführten Torsionswaage[2]) berührt. Diese Standkugel, in die Torsionswaage gebracht, halbirte ihre empfangene Ladung mit der beweglichen Kugel, worauf sich die Torsion messen liess, welche während einer längeren Zeit in abnehmendem Maasse erforderlich war, um die beiden Kugeln in einer ganz bestimmten, vorher ausgemittelten Entfernung zu erhalten. — Aus dem durch Schwingungsversuche in bekannter Weise ermittelten Torsionskoefficienten des Drahts und den genau bestimmten Dimensionen konnte, unter Berücksichtigung der nicht gleichförmigen Vertheilung der Elektricität auf den beiden Kugeln (welche Rücksichtnahme durch die gegen ihre Entfernung von einander nicht unbedeutende Grösse der Kugeln geboten wurde), die Elektricitätsmenge in dem geforderten absoluten Maasse gemessen werden, welche in jedem Augenblicke in der Torsionswaage sich befand. Durch die beobachtete Abnahme der Torsion ergab sich zugleich der Elektricitätsverlust, so dass es möglich wurde, durch dessen Berücksichtigung ebenfalls anzugeben, wie gross diese Menge gewesen wäre, wenn sie in dem Augenblicke schon in der Torsionswaage sich hätte befinden können, in welchem die grosse Kugel von der Leidener Flasche geladen wurde. — Diese Menge war also von der grossen Kugel auf die Standkugel übergegangen. Aus den genau gemessenen Halbmessern dieser Kugeln konnte (nach Plana's Arbeiten) das Verhältniss der Theilung der Elektricität

[1]) Der mittlere Durchmesser der Windungen betrug 266 Millimeter; der fast $\frac{2}{3}$ Meilen lange und sehr gut mit Seide besponnene Draht war vorher seiner ganzen Länge nach durch Kollodium gezogen, während die Wandungen des Gehäuses stark mit Siegellack bekleidet waren. Ein kräftiger Kupferdämpfer beruhigte die Schwingungen.

[2]) Der Kasten der Torsionswaage, in dessen Mitte die Kugeln sich befanden, war parallelepipedisch, 1,16 Meter lang, 0,81 Meter breit und 1,44 Meter hoch. Die lange Schellackstange, an welcher durch einen seitlichen Schellackarm die bewegliche Kugel befestigt war, trug zur Beobachtung der Stellung der Kugel unten einen Spiegel und tauchte dann in ein Gefäss mit Oel, wodurch die Schwankungen sehr rasch beseitigt wurden.

zwischen ihnen berechnet werden, so dass durch die Abmessung in der Torsionswaage ohne weiteres die Elektricitätsmenge bekannt wurde, welche nach Ladung der grossen Kugel in der Leidener Flasche zurückgeblieben und drei Sekunden später durch den Multiplikator entladen war. Sie bedurfte nur noch einer kleinen Korrektion wegen des Verlustes an disponibler Ladung, welcher während dieser drei Sekunden durch Ausströmen an die Luft und durch Rückstandsbildung entstanden war.

In der folgenden Tabelle sind die Resultate von fünf auf einander folgenden Versuchen zusammengestellt. Die mit E überschriebene Kolumne enthält die entladenen Elektricitätsmengen, die mit s überschriebene die entsprechenden Ablenkungen der Magnetnadel in Skalentheilen, und die mit φ überschriebene dieselben Ablenkungen, aber in Bogen für den Radius = 1.

No.	E	s	φ
1.	36 060 000	73,5	0,005 708 7
2.	41 940 000	80,0	0,006 213 6
3.	49 700 000	96,5	0,007 495 2
4.	44 350 000	91,1	0,007 075 7
5.	49 660 000	97,8	0,007 596 2

Die *Aufgabe b* verlangt die Zeiten τ zu wissen, während welcher ein Strom von derjenigen Intensität, welche im magnetischen Strommaasse mit 1 bezeichnet wird, durch denselben Multiplikator fliessen muss, um die in den fünf Versuchen beobachteten Elongationen φ hervorzubringen.

Es ist in dem *„zweiten Theile der elektrodynamischen Maassbestimmungen von* W. Weber*“* das Drehungsmoment entwickelt, welches von dem eben bezeichneten Strome auf eine Magnetnadel ausgeübt wird, welche den Windungen des Multiplikators parallel steht. Dieses Drehungsmoment ist proportional dem magnetischen Momente der Nadel und der Zahl der Windungen, ausserdem aber eine Funktion der Dimensionen des Multiplikators und der Vertheilung der magnetischen Fluida in der Nadel, wofür es genügt, den Abstand der Schwerpunkte der beiden magnetischen Fluida zu bestimmen, welche statt der wirklichen Vertheilung des Magnetismus auf der Oberfläche der Nadel vertheilt gedacht werden können. Bei der gegen den Durchmesser des Multiplikators immer noch kleinen Nadel konnte für diesen Abstand ein aus der Gestalt der Nadel entnommener Werth mit hinreichender Sicherheit gesetzt werden, so dass das bezeichnete Drehungsmoment D als unbekannt nur noch das magnetische Moment der Nadel enthielt. — Wenn dieses Drehungsmoment während einer gegen die Schwingungsdauer t

der Nadel sehr kurzen Zeit τ wirkt, so findet man die dadurch der Nadel ertheilte angulare Geschwindigkeit in dem Ausdrucke

$$\frac{D}{K}\tau,$$

wobei K das Trägheitsmoment bedeutet. Die Beziehung zwischen dieser angularen Geschwindigkeit und der ersten Elongation φ führt dann zu einer Gleichung zwischen τ und φ,

$$\tau = \varphi \,.\, A,$$

worin A eine aus lauter scharf zu messenden Grössen zusammengesetzte, also bekannte Konstante bedeutet, nämlich $A = 0{,}020\,915$ für die Sekunde als Zeitmaass.

Fragt es sich also, während welcher Zeiten τ ein konstanter Strom von der magnetischen Stromintensität $= 1$ durch den Multiplikator fliessen musste, um die obigen fünf beobachteten Elongationen hervorzubringen, so braucht man deren Werthe nur in diese Gleichung für τ einzusetzen. Auf diese Weise ergeben sich in Sekunden die Werthe

No.	τ
1.	0,000 119 4
2.	0,000 130 0
3.	0,000 156 8
4.	0,000 148 0
5.	0,000 158 9

Dividirt man nun $\frac{1}{2} E$ in den fünf Versuchen durch das zugehörige τ, so findet sich

No.	$\frac{E}{2\tau}$
1.	$151\,000 \,.\, 10^6$
2.	$161\,300 \,.\, 10^6$
3.	$158\,500 \,.\, 10^6$
4.	$149\,800 \,.\, 10^6$
5.	$156\,250 \,.\, 10^6$

also im Mittel

$$\frac{E}{2\tau} = 155370 \,.\, 10^6.$$

Das *mechanische Maass der Stromintensität* verhält sich also

zum *magnetischen* wie $1 : 155370 \,.\, 10^6$,
zum *elektrodynamischen* wie $1 : 109860 \,.\, 10^6$ $(= 1 : 155370 \,.\, 10^6 \,.\, \sqrt{\tfrac{1}{2}})$,
zum *elektrolytischen* wie $1 : \;16573 \,.\, 10^9$ $(= 1 : 155370 \,.\, 10^6 \,.\, 106\tfrac{2}{3})$.

3. *Anwendungen.*

Unter den Anwendungen, welche von der Zurückführung der gebräuchlichen Maasse für die Stromintensität auf mechanisches Maass gemacht werden können, ist die wichtigste die Bestimmung der Konstanten, welche in dem elektrischen Grundgesetz vorkommt, durch welches die Elektrostatik, Elektrodynamik und Induktion zugleich umfasst werden. Nach diesem Grundgesetz ist die Wirkung der Elektricitätsmenge e auf die Menge e' in der Entfernung r bei der relativen Geschwindigkeit dr/dt und der relativen Beschleunigung d^2r/dt^2 gleich

$$\frac{ee'}{r^2}\left[1-\frac{1}{c^2}\left(\frac{dr^2}{dt^2}-2r\frac{d^2r}{dt^2}\right)\right],$$

und die Konstante c stellt dabei diejenige relative Geschwindigkeit vor, welche die elektrischen Massen e und e' haben und behalten müssen, wenn sie gar nicht mehr auf einander wirken sollen.

Im Vorigen ist das Verhältniss des magnetischen Maasses zum mechanischen gefunden worden

$$= 155\,370 \,.\, 10^6 : 1;$$

in der zweiten Abhandlung über *elektrische Maassbestimmungen* ist dasselbe Verhältniss gefunden

$$= c\sqrt{2} : 4;$$

die Gleichstellung dieser Verhältnisse liefert

$$c = 439\,450 \,.\, 10^6$$

Längeneinheiten, nämlich Millimeter, also eine Geschwindigkeit von 59 320 Meilen in der Sekunde.

Die Einsetzung des Werths von c in das obige elektrische Grundgesetz lässt begreifen, warum die elektrodynamische Wirkung elektrischer Massen, nämlich

$$\frac{ee'}{r^2}\,\frac{1}{c^2}\left(\frac{dr^2}{dt^2}-2r\frac{d^2r}{dt^2}\right),$$

gegen die elektrostatische

$$\frac{ee'}{r^2}$$

immer verschwindend klein erscheint, so dass die erstere überhaupt nur bemerkbar bleibt, wenn, wie beim galvanischen Strome, die elektrostatischen Kräfte durch die Neutralisation der positiven und negativen Elektricität sich vollkommen aufheben.

Von den übrigen Anwendungen soll hier nur die Anwendung auf die Elektrolyse kurz mitgetheilt werden.

Es ist oben angegeben, dass bei einem Strome, der in der Sekunde 1 Milligramm Wasser zersetzt,

$$106\tfrac{2}{3} \,.\, 155370 \,.\, 10^6$$

positive Elektricitätseinheiten in der Richtung des positiven Stroms in jeder Sekunde durch den Querschnitt der Kette gehen und dieselbe Menge an negativer Elektricität in der entgegengesetzten Richtung.

Der Umstand, dass bei der Elektrolyse ponderable Massen bewegt werden, dass diese Bewegung durch elektrische Kräfte hervorgebracht wird, welche nur wieder auf Elektricität, nicht unmittelbar auf das Wasser wirken, führt zu der Vorstellung, dass im Wasseratom das *Wasserstoffatom* freie positive, das *Sauerstoffatom* freie negative Elektricität besitze. Es kommen mancherlei Gründe zusammen, weshalb man eine Elektricitätsbewegung im Wasser nicht ohne Elektrolyse denken will, und weshalb man annimmt, dass das Wasser nicht im Stande sei, die Elektricität nach Art der Leiter durch sich hindurch strömen zu lassen. Sieht man also an der einen Elektrode eben so viele positive Elektricität aus dem Wasser auftreten, wie der anderen Elektrode während derselben Zeit durch den Strom zugeführt wird, so ist diese auftretende positive Elektricität diejenige, welche den ausgeschiedenen Wasserstofftheilchen angehört hat.

Stellt man sich auf diesen Standpunkt, so dass man also die ganze Elektricitätsbewegung im Elektrolyten an die Bewegung der ponderablen Atome knüpft, so geht zunächst aus den oben gewonnenen Zahlen hervor, dass die Wasserstoffatome in 1 Milligramm Wasser $106\tfrac{2}{3} \,.\, 155370 \,.\, 10^6$ Einheiten an freier positiver Elektricität besitzen, die Sauerstoffatome eine gleiche Menge an negativer Elektricität.

Daraus folgt zweitens, dass diese Elektricitätsmengen zusammen das *Minimum von neutraler Elektricität* bezeichnen, welche in einem Milligramm Wasser enthalten ist. Würden nämlich die Atome des Wassers ausser ihren freien Elektricitäten noch neutrale Elektricität besitzen, was hier dahingestellt bleiben mag, so würde die Masse der neutralen Elektricität in einem Milligramm Wasser noch grösser sein.

Man ist unter den obigen Voraussetzungen aber auch im Stande, die *Kraft* anzugeben, mit welcher auf die Gesammtheit der Wasserstofftheilchen einer Wassermasse in der einen Richtung, auf die Gesammtheit der Sauerstofftheilchen in der entgegengesetzten Richtung gewirkt wird.

Man denke sich z. B. eine cylindrische Röhre von $\frac{10}{9}$ Quadratmillimeter Querschnitt, welche als Zersetzungszelle dienen soll, mit einem Gemische von Wasser und Schwefelsäure vom specifischen Gewichte 1,25 angefüllt, welche also in jedem 1 Millimeter langen Stücke

ein Milligramm Wasser enthält. Durch HORSFORD kennen wir das Verhältniss des specifischen Widerstands dieser Mischung zu dem des Silbers und durch LENZ das Verhältniss des Widerstands des Silbers zu dem des Kupfers. In den Abhandlungen der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen (Bd. 5 „über die Anwendung der magnetischen Induktion auf Messung der Inklination mit dem Magnetometer“[1]) ist der Widerstand des Kupfers nach absolutem Maasse des magnetischen Systems bestimmt. Dadurch wird es möglich, auch den Widerstand in *absolutem magnetischem Maasse* anzugeben, welchen das Wasser (unter Einfluss der beigemengten Schwefelsäure) in einem 1 Millimeter langen Stücke jener cylinderförmigen Zersetzungszelle ausübt. Dieser Widerstand, multiplicirt mit der in magnetischem Maasse ausgedrückten Stromintensität giebt die elektromotorische Kraft in Beziehung auf diese kleine Säule, ebenfalls im *magnetischen* Maasssystem. Das *magnetische* Maass der elektromotorischen Kraft ist aber so viel Mal kleiner als das *mechanische,* wie das magnetische Maass der Stromintensität grösser ist als das mechanische, und da dies letztere Verhältniss jetzt bekannt ist, kann durch blosse Division mit $155\,370 \cdot 10^6$ jene im magnetischen Maasse berechnete elektromotorische Kraft in mechanisches Maass umgewandelt werden. Die so entstandene Zahl bedeutet dann den *Unterschied der beiden Kräfte,* von denen in der Richtung des Stroms die eine auf *eine jede Einheit* der freien positiven Elektricität in den Wasserstofftheilchen, die andere auf *eine jede Einheit* der freien negativen Elektricität in den Sauerstofftheilchen bewegend wirkt, und diese Zahl muss deswegen, um die *ganze wirksame Kraft* zu erhalten, noch mit der Anzahl der Einheiten der freien positiven oder negativen Elektricität multiplicirt werden, welche in der 1 Millimeter langen Wassersäule, d. i. in 1 Milligramm Wasser, enthalten ist, nämlich mit $106\frac{2}{3} \cdot 155\,370 \cdot 10^6$.

Führt man die Rechnung durch und setzt diejenige Stromintensität voraus, bei welcher in einer Sekunde 1 Milligramm Wasser zersetzt wird, so bekommt man einen Kraftunterschied

$$= 2 \cdot (106\tfrac{2}{3})^2 \cdot 127\,476 \cdot 10^6,$$

bei dem die Krafteinheit diejenige Kraft ist, welche der Masseneinheit von 1 Milligramm in einer Sekunde eine Geschwindigkeit von 1 Millimeter ertheilt. Dividirt man also mit der Intensität der Schwere $= 9811$, so bekommt man diesen Kraftunterschied in Gewicht ausgedrückt

$= 2 \cdot 147\,830 \cdot 10^6$ Milligramm $= 2 \cdot 147\,830$ Kilogramm $= 2 \cdot 2956$ Centner unter dem Einflusse der Schwere.

[1]) [WILHELM WEBER's Werke, Bd. II, p. 319.]

Man kann dieses Resultat auf folgende Weise aussprechen: *Wären alle Theilchen Wasserstoff in 1 Milligramm Wasser einer 1 Millimeter langen Säule an einen Faden geknüpft, und an einen anderen Faden alle Theilchen Sauerstoff, so müssten beide Fäden in entgegengesetzten Richtungen jeder mit dem Gewichte von* 2956 *Centnern gespannt werden, um eine Zersetzung des Wassers mit solcher Geschwindigkeit hervorzubringen, nach welcher 1 Milligramm Wasser in der Sekunde zerlegt werden würde.*

Man überzeugt sich leicht, dass diese Spannung dieselbe bleibt für eine Säule von 1 Millimeter Länge aber anderem Querschnitt, dass sie aber proportional der Länge der Säule und ebenso proportional der Stromintensität, d. h. der Geschwindigkeit der elektrolytischen Scheidung sein muss.

Wenn wir nun in der beschriebenen Wassersäule auf den Wasserstofftheilchen insgesammt einen Druck von dem Gewichte von 2956 Centnern sehen und wenn dadurch keine Beschleunigung der Bewegung eintritt, welche doch 1759 Millionen Meilen in der Sekunde betragen müsste, sondern der Wasserstoff mit der konstanten Geschwindigkeit von $\frac{1}{2}$ Millimeter in der Sekunde fortschreitet, so sind wir gezwungen, anzunehmen, dass der Zerlegung des Wassers eine Kraft entgegen wirke, welche mit der Geschwindigkeit der Zerlegung wächst, so dass überhaupt nur diejenige Geschwindigkeit der Zerlegung möglich bleibt, bei welcher die *Widerstandskraft* gleich der elektromotorischen Kraft ist, so dass ihre Wirkung auf die gesammten Wasserstofftheilchen des Milligramms Wasser in dem vorliegenden Falle ebenfalls dem Gewichte von 2956 Centnern gleich wäre. Dann nämlich würden die ponderablen Theilchen mit der gewonnenen Geschwindigkeit gleichförmig fortfliessen.

Es liegt nahe, den Grund dieser Widerstandskraft in den *chemischen Affinitätskräften* zu suchen. Steht auch der Begriff der *„chemischen Affinität“* noch zu unbestimmt da, um daraus entnehmen zu können, wie die aus dieser Affinität hervorgehenden Kräfte mit der *Geschwindigkeit der Scheidung* wachsen, so ist es immerhin interessant, zu sehen, welche ungeheuren Kräfte bei einer chemischen Scheidung, wie sie von der Elektrolyse leicht hervorgebracht wird, in Wirksamkeit treten.

XV.

Elektrodynamische Maassbestimmungen

insbesondere

Zurückführung

der

Stromintensitäts-Messungen

auf mechanisches Maass.

Von

R. Kohlrausch und **W. Weber.**

[Abhandlungen der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften, mathematisch-physische Klasse, Bd. 3, Leipzig 1857, p. 221—290.]

1.

Die Intensität eines elektrischen Stroms pflegt durch die Beobachtung entweder seiner *magnetischen*, oder *elektrodynamischen* oder endlich seiner *elektrolytischen* Wirkung bestimmt zu werden. Es können aber diese Wirkungen unter sehr verschiedenen Verhältnissen beobachtet werden und es ist Sache des Beobachters, diese Verhältnisse so zu wählen, wie er seinen Beobachtungen die grösste Vollkommenheit geben kann, während die *elektromagnetischen*, *elektrodynamischen* und *elektrolytischen Gesetze* dazu dienen, die unter verschiedenen Verhältnissen beobachteten Wirkungen auf einander zu *reduciren*; denn nur durch eine *Reduktion der Beobachtungen auf gleiche Verhältnisse* kann man zu einer *Vergleichung der Stromintensitäten* gelangen. Diese *gleichen Verhältnisse* nun, auf welche alle unter verschiedenen Verhältnissen gemachten Beobachtungen reducirt werden sollen, nennt man die *Normalverhältnisse*, und durch Festsetzung dieser *Normalverhältnisse* wird *das Maass der Stromintensität* nach folgender Regel bestimmt:

> *Das Maass der Stromintensität* ist die Intensität desjenigen Stroms, welcher *unter den Normalverhältnissen* die Einheit der messbaren Wirkung hervorbringt.

Für die Beobachtungen der *magnetischen Wirkungen* eines Stroms sind die Normalverhältnisse folgende: *der Strom geht durch einen kreisförmigen Leiter, welcher die Flächeneinheit umschliesst, und wirkt auf einen Magnet, welcher die Einheit des Magnetismus besitzt, aus einer beliebigen aber grossen Entfernung* $= R$; *der Mittelpunkt des Magnets liegt in der Ebene des Leiters und seine magnetische Axe ist nach dem Mittelpunkte des kreisförmigen Leiters gerichtet.* — Das von dem Strome auf den Magnet ausgeübte *Drehungsmoment* D ist unter diesen Verhältnissen verschieden sowohl nach Verschiedenheit der Stromintensität, als auch nach Verschiedenheit der Entfernung R; das Produkt R^3D hängt aber blos von der Stromintensität ab und ist daher unter diesen Verhältnissen *die messbare Wirkung* des Stroms, wonach man also zum *Maass der Stromintensität* die Intensität desjenigen Stroms erhält, dessen messbare Wirkung unter den beschriebenen Verhältnissen

$$R^3D = 1$$

ist. — Dieses Maass der Stromintensität ergiebt sich dann aus den *elektromagnetischen Gesetzen*, ist zugleich auch die Intensität desjenigen

Stroms, welcher, wenn er eine Ebene von der Grösse der Flächeneinheit umfliesst, in der Ferne überall die Wirkungen eines im Mittelpunkte jener Ebene befindlichen Magnets ausübt, welcher die Einheit des Magnetismus besitzt und dessen magnetische Axe auf der Ebene senkrecht steht —; oder ist auch die Intensität desjenigen Stroms, von welchem eine *Tangentenboussole mit einfachem Multiplikatorkreise vom Halbmesser* $= R$ bei einer Ablenkung vom magnetischen Meridiane

$$\varphi = arc \text{ tang } \frac{2\pi}{RT},$$

wenn T den horizontalen Erdmagnetismus bezeichnet, *im Gleichgewichte* erhalten wird.

Für die Beobachtungen der *elektrodynamischen Wirkungen* eines Stroms sind die Normalverhältnisse folgende: *derselbe Strom geht durch zwei kreisförmige Leiter, von denen jeder die Flächeneinheit umschliesst und die in einer beliebigen aber grossen Entfernung* $= R$ *von einander liegen: die Durchschnittslinie beider auf einander senkrechten Kreisebenen halbirt den ersten kreisförmigen Leiter.* — Das von dem Strome im *ersten* Leiter auf den durchströmten *zweiten* Leiter ausgeübte, nach mechanischem Maasse ausgedrückte *Drehungsmoment* D, ist unter diesen Verhältnissen verschieden sowohl nach Verschiedenheit der Stromintensität, als auch nach Verschiedenheit der Entfernung R; das Produkt $R^3 D$ hängt aber blos von der Stromintensität ab und ist daher unter diesen Verhältnissen die *messbare Wirkung* des Stroms, wonach man also zum *Maass der Stromintensität* die Intensität desjenigen Stroms erhält, dessen messbare Wirkung unter den beschriebenen Verhältnissen

$$R^3 D = 1$$

ist.

Für die Beobachtungen der *elektrolytischen Wirkungen* eines Stroms sind die Normalverhältnisse folgende: *der Strom geht durch Wasser während eines beliebigen genau messbaren Zeitraums* T *hindurch, ohne eine Aenderung der Intensität zu erleiden.* — Die nach dem angenommenen Massenmaasse (Milligramm) ausgedrückte, von dem Strome zerlegte Wassermasse M ist unter diesen Verhältnissen verschieden sowohl nach Verschiedenheit der Stromintensität, als auch nach Verschiedenheit des (in Sekunden ausgedrückten) Zeitraums T; der Quotient M/T hängt aber blos von der Stromintensität ab und ist daher unter diesen Verhältnissen die *messbare Wirkung* des Stroms, wonach man also zum *Maass der Stromintensität* die Intensität desjenigen Stroms erhält, dessen messbare Wirkung unter den beschriebenen Verhältnissen

$$\frac{M}{T} = 1$$

ist.

Es bleibt nur übrig, um die Intensitäten aller Ströme, deren *magnetische, elektrodynamische* oder *elektrolytische* Wirkungen beobachtet worden sind, unter einander vergleichen zu können, die durch die oben beschriebenen Normalverhältnisse gegebenen drei Maasse auf einander zurückzuführen.

Für die *beiden ersten Maasse* ergiebt sich diese Zurückführung aus den *allgemeinen Gesetzen der Elektrodynamik*, welche, wie AMPÈRE gezeigt hat, die Gesetze des Magnetismus und Elektromagnetismus mit umfassen, es ergiebt sich nämlich daraus, wie schon in den Elektrodynamischen Maassbestimmungen II. S. 261 [1]) nachgewiesen worden ist, dass das *erste* Maass sich zum *zweiten* verhält wie

$$\sqrt{2} : 1.^{2)}$$

[1]) [WILHELM WEBER's Werke, Bd. III, p. 360.]

[2]) Es ist hierbei von Interesse zu bemerken, dass sich zwischen diesen beiden Maassen eine vollkommene Identität herstellen lassen würde, wenn man in den oben beschriebenen *Normalverhältnissen für die elektrodynamischen Wirkungen* das von dem Strome im *zweiten* Kreise auf den Strom im *ersten* Kreise ausgeübte Drehungsmoment statt des von dem Strome im *ersten* Kreise auf den im *zweiten* ausgeübten Drehungsmoments setzte. Der Grund, warum dies nicht geschieht, liegt blos darin, dass der von AMPÈRE angegebene Ausdruck der Abstossungskraft zweier Stromelemente unverändert beibehalten werden soll, wonach, wenn α, α' die Länge beider Elemente, i, i' die Stromintensitäten, r die Entfernung, ε den Winkel zwischen α und α', ϑ den Winkel zwischen α und r, ϑ' den Winkel zwischen α' und der verlängerten r bezeichnet, jene Kraft durch

$$-\frac{\alpha\alpha'}{r^2}ii'(\cos\varepsilon-\tfrac{3}{2}\cos\vartheta\cos\vartheta'),$$

oder durch

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha\alpha'}{r^2}ii'(3\cos\vartheta\cos\vartheta'-2\cos\varepsilon)$$

dargestellt wird. Aus dem AMPÈRE'schen *Fundamentalgesetze der Elektrodynamik* folgt im Allgemeinen aber nur, dass jene Kraft diesem Ausdrucke *proportional* ist, wonach also die Kraft selbst, wenn man das Maass der Stromintensität noch unbestimmt lässt, durch das Produkt dieses Ausdrucks in eine beliebige Konstante dargestellt wird, also durch

$$-C\cdot\frac{\alpha\alpha'}{r^2}ii'(\cos\varepsilon-\tfrac{3}{2}\cos\vartheta\cos\vartheta'),$$

oder durch

$$D\cdot\frac{\alpha\alpha'}{r^2}ii'(3\cos\vartheta\cos\vartheta'-2\cos\varepsilon),$$

worin C oder D die erwähnte Konstante bezeichnet. AMPÈRE hat nun zur Feststellung eines bestimmten Stromintensitätsmaasses der Konstanten C den Werth $C=1$ oder der Konstanten D den Werth $D=\frac{1}{2}$ beigelegt und hat dadurch den schon erwähnten Ausdruck der Abstossungskraft zweier Stromelemente

$$-\frac{\alpha\alpha'}{r^2}ii'(\cos\varepsilon-\tfrac{3}{2}\cos\vartheta\cos\vartheta')=\frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha\alpha'}{r^2}ii'(3\cos\vartheta\cos\vartheta'-2\cos\varepsilon)$$

Für das *dritte* Maass hat sich die Zurückführung auf das *erste* und also mittelbar auch auf das *zweite* durch gleichzeitige Beobachtungen der von einem und demselben Strome hervorgebrachten *magnetischen* und *elektrolytischen* Wirkungen ergeben. Aus der Vergleichung dieser auf die oben beschriebenen Normalverhältnisse reducirten Beobachtungen wurde nämlich gefunden, dass das *dritte Maass* der Stromintensität, oder die Intensität desjenigen Stroms, von welchem 1 Milligamm Wasser in 1 Sekunde zersetzt wird, $106\frac{2}{3}$ Mal grösser ist, als das *erste Maass*, oder als die Intensität desjenigen Stroms, welcher, wenn er eine Ebene von der Grösse des Flächenmaasses umfliesst, in grossen Entfernungen überall dieselben Wirkungen hervorbringt, wie ein Magnet im Mittelpunkte jener Ebene, der die Einheit des Magnetismus besitzt und dessen magnetische Axe auf der Ebene senkrecht steht. Siehe „Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins im Jahre 1840", S. 96,[1]) und Casselmann „Ueber die galvanische Kohlenzinkkette, Marburg 1844", S. 70.

2.

Die Intensität eines elektrischen Stroms lässt sich aber nicht blos aus seinen *Wirkungen*, sondern auch aus seinen *Ursachen* bestimmen. Die nächsten Ursachen eines elektrischen Stroms liegen aber in der Masse des neutralen elektrischen Fluidums, welche in einem geschlossenen Leiter enthalten ist, und in der Geschwindigkeit, mit welcher die beiden Bestandtheile desselben, nämlich die Masse des *positiven* und *negativen* Fluidums, gleichzeitig in entgegengesetzten Richtungen sich

erhalten, welcher sich für zwei parallele auf r senkrechte Stromelemente, für die $\varepsilon = 0$ und $\vartheta = \vartheta' = 90^0$ ist, auf

$$-\frac{aa'}{r^2}ii'$$

reducirt. Es würde aber, der Uebereinstimmung mit den elektromagnetischen Messungen wegen, zweckmässiger gewesen sein, $D = 1$ oder $C = 2$ zu setzen, wo dann der Ausdruck der Abstossungskraft zweier Stromelemente

$$\frac{aa'}{r^2}ii'(3\cos\vartheta\cos\vartheta' - 2\cos\varepsilon) = -2\frac{aa'}{r^2}ii'(\cos\varepsilon - \tfrac{3}{2}\cos\vartheta\cos\vartheta')$$

geworden wäre, und sich für zwei mit r zusammen fallende Stromelemente, für die $\vartheta = \vartheta' = \varepsilon = 0$ ist, auf

$$\frac{aa'}{r^2}ii'$$

reducirt hätte. In Uebereinstimmung hiermit würde die angeführte *Aenderung der Normalverhältnisse für die elektrodynamischen Stromwirkungen* stehen und dadurch eine vollkommene Identität des *elektrodynamischen* Maasses der Stromintensität mit dem *magnetischen* gewonnen werden.

[1]) [Wilhelm Weber's Werke, Bd. III, p. 17.]

bewegen. Auf Grund dieser *Ursachen* wird *das Maass der Stromintensität* folgender Maassen festgestellt:

> Das Maass der Stromintensität ist die Intensität desjenigen Stroms, welcher *hervorgebracht* wird durch eine solche Geschwindigkeit der beiden elektrischen Fluida, bei welcher die durch den Querschnitt des Leiters fliessende Masse jedes Fluidums dividirt durch die Zeit, in welcher sie durchfliesst, = 1 ist.

Dieses Maass ist *das mechanische Maass der Stromintensität*, und es ist die Aufgabe dieser Abhandlung, die im vorigen Artikel beschriebenen Maasse auf dieses Maass zurückzuführen, welches im Wesen des Stroms am einfachsten begründet liegt und daher bei Fundamentalbestimmungen vor den anderen Maassen den Vorzug verdient.

Zurückführung des magnetischen, elektrodynamischen und elektrolytischen Maasses der Stromintensität auf mechanisches Maass.

3.

Es ist bisher noch kein Versuch gemacht worden, Stromintensitäten nach *mechanischem Maasse* zu bestimmen, und noch weniger die nach anderen Maassen bestimmten Stromintensitäten auf dieses Maass *zurückzuführen.* Man weiss blos, dass die *Elektricitätsmenge*, welche selbst bei schwachen, mit den geringsten galvanischen Mitteln dargestellten, Strömen durch den Querschnitt der geschlossenen Kette fliesst, auch für eine sehr kurze Zeit schon sehr gross sein müsse, da die kräftigste Elektrisirmaschine, deren Konduktor mit dem Reibzeuge durch einen Leitungsdraht verbunden wird, einen viel schwächeren Strom giebt, als ein einziges galvanisches Element, welches durch einen Leitungsdraht von mässig grossem Widerstande geschlossen wird.

Der Mangel an Bestimmungen der Stromintensität nach *mechanischem Maasse* hat seinen Grund in den Schwierigkeiten, die ihre Ausführung findet, während die Bestimmung der Stromintensitäten nach den anderen oben angeführten Maassen sehr leicht ist und dabei einen viel höheren Grad von Genauigkeit gestattet. Die letzteren Maasse werden daher für den *praktischen* Gebrauch zunächst immer in Anwendung kommen, und es handelt sich wesentlich nur darum, dass nur irgend *einmal* eine einzige nach einem von diesen letzteren Maassen bekannte Stromintensität auch nach *mechanischem Maasse* so genau wie möglich gemessen werde, um das Grössenverhältniss des *mechanischen Maasses* zu einem von jenen Maassen zu ermitteln und dadurch in den Stand gesetzt zu werden, alle nach jenen Maassen gemachten Bestimmungen *auf mechanisches Maass zurückzuführen.*

Zu einer solchen Messung fehlt es vor Allem an der Kenntniss der in einem geschlossenen Leiter in Strömung begriffenen *Elektricitätsmenge*, oder vielmehr, weil diese Kenntniss während der Strömung gar nicht zu erlangen ist, an der Kenntniss einer *Elektricitätsmenge, welche in Strömung versetzt werden soll, und die z. B. in einer Leidener Flasche sich vorher schon angesammelt befindet.* Man besitzt dazu blos die vorzüglich von Coulomb herrührenden Mittel und Methoden, die Elektricität zu messen, von denen aber zur Messung der in einer geladenen Leidener Flasche angesammelten Elektricität noch nie Gebrauch gemacht worden ist.[1])

Die Frage nach der *Elektricitätsmenge*, welche sich in einer Leidener Flasche angesammelt befindet, ist öfters aufgeworfen worden: sie ist, wenn sie gründlich gelöst und die *Elektricitätsmenge* durch die *Kräfte* bestimmt wird, welche sie auszuüben vermag, keineswegs eine blosse Frage der Neugier, sondern es knüpfen sich daran wichtige Bestimmungen, welche der Elektricitätslehre gegenwärtig noch fehlen und ihr den Weg zu interessanten Untersuchungen bahnen können.[2])

Zu den *elektrodynamischen Maassbestimmungen* steht diese die Elektricitätsmenge in einer Leidener Flasche betreffende Frage in einer be-

[1]) Buff hat in den „Annalen der Chemie und Physik", Bd. 86, p. 33, mit Hülfe seiner Tangentenboussole mit langem Leitungsdrahte gefunden, dass die Elektricitätsmenge, durch welche 1 Milligramm Wasserstoff aus 9 Milligramm Wasser elektrisch ausgeschieden wird, wenn man die Mittel besässe dieselbe zu verdichten, hinreichen würde, eine Batterie von 45 480 Leidener Flaschen von 480 Millimeter Höhe und 160 Millimeter Durchmesser bis zu einer Schlagweite von 100 Millimeter zu laden. Diese Bestimmung von Buff ist die beste und genaueste, welche existirt, genügt aber noch nicht zur Bestimmung der *Elektricitätsmenge*, welche in diesen Flaschen enthalten ist, wozu nach *mechanischen Principien* die Kenntniss der *Abstossungskraft* erforderlich ist, welche diese in einem Punkte koncentrirte *Elektricitätsmenge* auf eine gleiche in einem anderen davon entfernten Punkte koncentrirte Elektricitätsmenge ausüben würde; an der Kenntniss dieser *Abstossungskraft* fehlt es aber noch und es ist mit den mannigfaltigen Mitteln und Methoden, welche von Coulomb und Anderen angegeben worden sind, solche Kräfte zu messen, bisher nicht versucht worden, auch nur eine genäherte Kenntniss davon zu erlangen.

[2]) Dahin gehört erstlich, wenn man beachtet, dass die meisten Anwendungen der Naturgesetze von der Werthbestimmung gewisser Konstanten abhängen, die Bestimmung der unbekannten *Konstanten der Elektricitätslehre*, die grossentheils von der Lösung obiger Frage abhängt. — Es ist ferner sehr wahrscheinlich, dass eine Bestimmung der zur *Wasserzersetzung* erforderlichen Elektricität durch die Kräfte, die sie auszuüben vermag, zur Untersuchung derjenigen Kräfte würde benutzt werden können, welche bei der Zersetzung des Wassers wirksam sind; und dass auf gleiche Weise eine Bestimmung der Elektricitätsmenge, durch die ein Draht in bestimmter Frist zum *Erglühen* gebracht wird, durch die *Kräfte*, die sie auszuüben vermag, zur näheren Einsicht in die bei der Wärmeerzeugung wirksamen Kräfte führen würde u. s. w. Im zweiten Theile werden einige von diesen Anwendungen näher erörtert werden.

sonderen Beziehung, die jedenfalls nähere Beachtung verdient. Im ersten Theile dieser Maassbestimmungen ist ein Grundgesetz der elektrischen Wirkung aufgestellt, welches die *Elektrostatik*, *Elektrodynamik* und *Induktion* zugleich umfasst. Es ist nach diesem Grundgesetze die Kraft, welche die elektrische Masse e auf die elektrische Masse e' aus der Entfernung r ausübt, nicht blos eine Funktion dieser *Entfernung*, sondern zugleich eine Funktion des Bewegungszustands der beiden elektrischen Massen gegen einander, welcher durch ihre *relative Geschwindigkeit* $\mathrm{d}r/\mathrm{d}t$ und *Beschleunigung* $\mathrm{d}^2r/\mathrm{d}t^2$, mit welcher sie die Entfernung r passiren, gegeben ist. In diesem Grundgesetze der elektrischen Wirkung:

$$\frac{ee'}{r^2}\left[1-\frac{1}{c^2}\left(\frac{\mathrm{d}r^2}{\mathrm{d}t^2}-2r\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2}\right)\right]$$

bedeutet *die Konstante c diejenige relative Geschwindigkeit, bei welcher, so lange sie unverändert bleibt, die elektrischen Massen gar keine Wirkung auf einander ausüben würden.* Im zweiten Theile dieser Maassbestimmungen ist sodann entwickelt worden, wie die Werthbestimmung dieser *Konstanten c* die Möglichkeit bietet, nicht blos die Messungen der elektromotorischen Kräfte, sondern auch die Stromintensitätsmessungen auf die *Maasse der Mechanik* zurückzuführen, und es ist daselbst die Relation angegeben, nach welcher aus der *Konstanten c* die *Elektricitätsmenge* bestimmt werden kann, welche bei den auf die magnetischen und elektrodynamischen Stromwirkungen begründeten Maasseinheiten der Stromintensität in der Zeiteinheit den Querschnitt des Leiters passirt. Umgekehrt würde also auch die auf anderen Wegen erworbene Kenntniss dieser *Elektricitätsmenge* zur Werthbestimmung jener *Konstanten c* führen, auf die unsere Aufmerksamkeit durch obiges Grundgesetz besonders gelenkt ist. Die Bestimmung einer solchen in der Natur gegebenen *Konstante* ist ein für feinere Messung besonders geeigneter Gegenstand. Im vorliegenden Falle lässt sich diese Bestimmung auf folgende Aufgabe zurückführen.

4.

Aufgabe.

Es soll diejenige *Elektricitätsmenge* bestimmt werden, welche bei einem Strome von der Intensität der auf die *magnetische* oder *elektrodynamische* oder *elektrolytische* Wirkung begründeten Maasseinheit in der Zeiteinheit den Querschnitt des Leiters passirt, und zwar soll diese Elektricitätsmenge *durch die Grösse der von ihr ausgeübten elektrostatischen Grundkraft* bestimmt werden; oder specieller:

es sei ein konstanter Strom gegeben, von welchem eine Tangentenboussole mit einfachem Multiplikatorkreise vom Halbmesser $= R$

bei einer Ablenkung $\varphi = arc$ tang $2\pi/RT$ im Gleichgewichte erhalten wird, wenn T die Intensität des die Boussole lenkenden horizontalen Erdmagnetismus bezeichnet: es soll bestimmt werden, wie die Elektricitätsmenge, welche bei einem solchen Strome in 1 *Sekunde durch den Querschnitt des Leiters fliesst, sich zu der Elektricitätsmenge auf jeder von zwei kleinen gleich geladenen Kugeln verhält, welche einander aus der Einheit der Entfernung mit der Einheit der Kraft abstossen. Es soll dabei zur Einheit der Kraft diejenige Kraft genommen werden, welche der Masse eines Milligramms in* 1 *Sekunde die Einheit der Geschwindigkeit ertheilt.*

Der gegebene *Strom* ist nach obiger Bestimmung ein solcher, welcher, wenn er eine Ebene von der Grösse der Flächeneinheit umfliesst, in der Ferne ganz gleiche Wirkungen ausübt wie ein Magnet, welcher die Einheit des magnetischen Moments besitzt, d. i. derjenige Strom, dessen Stärke gewöhnlich bei Beobachtungen mit der Tangentenboussole zum Maasse für die Stärke aller anderen Ströme gewählt wird; und die auf jeder der kleinen Kugeln vorhandene *Elektricitätsmenge* ist diejenige, welche bei elektrostatischen Messungen mit der Coulomb'schen Drehwaage als Maasseinheit zum Grunde gelegt zu werden pflegt.

5.

Plan zur Lösung der Aufgabe.

Wenn *eine auf einem isolirten Leiter angesammelte Elektricitätsmenge E* durch den Multiplikator eines Galvanometers zur Erde hin entladen wird, so übt sie während ihres Durchfliessens ein Drehungsmoment auf die Magnetnadel des Galvanometers aus. Hat man nun auch durch Einschaltung von *Wassersäulen* in die Strombahn die *Entladungszeit* so viel als nöthig ist verlängert, damit zwischen den Windungen des Multiplikators kein Funke überspringt, sondern alle Windungen nach einander vom Entladungsstrome durchlaufen werden, so bildet diese *Entladungszeit* doch immer nur einen äusserst kleinen Bruchtheil von der *Schwingungsdauer* der Magnetnadel, so dass auch derjenige Theil der Bahn, den die Nadel während dieser *Entladungszeit* (also während der Wirkung des Entladungsstroms) zurücklegt, verschwindend klein ist gegen die ganze Bahn der Nadel, d. i. gegen die Grösse der *Elongation,* zu welcher die Nadel nach Verlauf einer *halben Schwingungsdauer* gelangt. Die Wirkung des Entladungsstroms kann daher wie ein *Stoss* betrachtet werden, welcher der Nadel in ihrer Ruhelage ertheilt wird, wonach aus der *Beobachtung der ersten Elongation der Nadel nach der Entladung* die im Augenblicke des Stosses selbst der Nadel vom Entladungsstrome ertheilte *Angulargeschwindigkeit* nach bekannten Schwingungsgesetzen berechnet werden kann.

Uebrigens verhält sich hierbei Alles ganz so, wie bei einem *Induktionsstosse*, auch darin, dass die Beschaffenheit des Entladungsstroms ganz gleichgültig ist, möge er aus vielen getrennten aber schnell auf einander folgenden Partialentladungen bestehen, oder möge er stetig sein mit einer nach irgend einem Gesetze rasch bis zu Null abnehmenden Intensität, — *immer wird die Angulargeschwindigkeit, welche der Nadel dadurch ertheilt wird, ganz allein von der Elektricitätsmenge E abhängen.*[1])

Mit einem *konstanten Strome* können wir der Nadel desselben Galvanometers einen ähnlichen *Stoss* ertheilen, wenn wir den Strom nur eine sehr kurze Zeit wirken lassen, und zwar wird die erste Elongation dieselbe sein, der Strom mag mit der Intensität i während der Zeit t, oder mit der grösseren Intensität ni während der kürzeren Zeit $t \,.\, 1/n$ gewirkt haben: ist nämlich die Stromdauer t gegen die Schwingungsdauer der Nadel sehr klein, so wird die *Angulargeschwindigkeit* stets gleich gefunden.[2]) Es fliesst aber in der Zeit t bei der Intensität i genau dieselbe *Elektricitätsmenge* durch den Querschnitt des Leiters, wie bei der Intensität ni in der Zeit $t \,.\, 1/n$.

Also auch in diesem Falle, wenn wir der Nadel durch einen *konstanten Strom von kurzer Dauer* einen *Stoss* ertheilen, hängt die *Angulargeschwindigkeit* und folglich auch die *Elongation* der Nadel *lediglich und ganz allein von der Elektricitätsmenge ab, welche während der Dauer des Stroms durch den Querschnitt des Multiplikators sich bewegt hat.*

Haben wir nun bei demselben Multiplikator *einmal* durch die Entladung einer bekannten Menge E von positiver Elektricität, *das andere Mal* durch sehr kurze Dauer eines konstanten Stroms *gleiche Elongationen der Magnetnadel* hervorgebracht, so kann man daraus schliessen, *dass die positive Elektricitätsmenge x, welche während der kurzen Dauer des konstanten Stroms durch den Querschnitt des Leiters floss,*

$$x = \tfrac{1}{2}\,E$$

[1]) Man findet dies durch alle Versuche bestätigt. Die Elongation ist nicht nur, wie unter anderen die Versuche in Anhang II zeigen, proportional der entladenen *Elektricitätsmenge*, sondern ist auch unabhängig von der *Entladungszeit* innerhalb weiter Grenzen; denn es ist einerlei, wie lang oder kurz die Wassersäule ist, welche man einschaltet, sobald nur nicht Windungen des Multiplikators übersprungen werden, oder die Entladungszeit so verlängert wird, dass die Wirkung des Entladungsstroms noch fortdauert, wenn die Nadel schon merklich aus der Ruhelage gewichen ist.

[2]) Die *Beschleunigung*, welche einer Nadel, deren magnetisches Moment M und deren Trägheitsmoment K ist, durch einen *konstanten Strom* von der Intensität i ertheilt wird, ist, so lange die Richtung ihrer magnetischen Axe von der Ebene der Multiplikatorwindungen wenig abweicht, $= AMi/K$, wo A eine von den Dimensionen des Multiplikators und der Vertheilung des Nadelmagnetismus abhängige Konstante bedeutet. Hieraus folgt die während der Zeit t ertheilte *Angulargeschwindigkeit* $= AMit/K$, deren Werth unverändert bleibt, wenn ni für i und gleichzeitig $t \,.\, 1/n$ für t gesetzt wird.

ist, ein Resultat, von dessen Richtigkeit man sich leicht überzeugt, welche Vorstellung man auch von dem Vorgange im Innern der Konduktoren während der Entladung haben möge.

Wollte man z. B. von der Entladung annehmen, die *ganze* angesammelte *positive* Elektricitätsmenge E sei allein blos in der Richtung zur Erde, oder eine ihr *gleiche* Menge *negativer* Elektricität sei allein blos in der entgegengesetzten Richtung von der Erde aus durch den *ganzen* Multiplikator geströmt, so würde die magnetische Wirkung eines solchen *Entladungsstroms* genau gleich der Wirkung eines Stroms sein, bei welchem nur die *Hälfte* jener positiven Elektricitätsmenge in der angegebenen Richtung durch jeden Querschnitt des Leiters fliesst, zugleich aber eine gleiche negative Elektricitätsmenge in der entgegengesetzten Richtung, ein Vorgang, wie er bei jenem *konstanten Strome* angenommen wird. — Sollte man aber der entgegengesetzten Ansicht sein, dass nämlich gar nichts von der im isolirten Leiter angesammelten Elektricitätsmenge E selbst (und eben so wenig von der in der Erde befindlichen) durch die gesammten Windungen des Multiplikators hindurchfliesse, sondern dass dieselbe blos einen Doppelstrom im Drahte *veranlasse*, in welchem so grosse Massen neutralen Fluidums enthalten seien, dass eine sehr kleine Verschiebung dieser Massen genüge, um dem isolirten Leiter so viel negative Elektricität zuzuführen, dass die darin angesammelte positive Elektricität E neutralisirt wird, so würde man auch hiernach zu demselben Ergebniss gelangen; denn es würde alsdann der ganze Ableitungsdraht in eine sehr grosse Zahl kleiner Abtheilungen zerlegt werden können, so dass aus jeder Abtheilung in die nächst *folgende* die Elektricitätmenge $+\frac{1}{2}E$, in die nächst *vorhergehende* die Elektricitätsmenge $-\frac{1}{2}E$ überginge, folglich aus der letzten Abtheilung die Elektricitätsmenge $+\frac{1}{2}E$ in die Erde abströmte, welche der ersten Abtheilung des Drahts aus dem isolirten Leiter ersetzt würde, während aus der ersten Abtheilung die Elektricitätsmenge $-\frac{1}{2}E$ in den isolirten Leiter abströmte und die darin zurückgebliebene Elektricität neutralisirte, welche aber der letzten Abtheilung des Drahts aus der Erde ersetzt wird. — Wäre man endlich auch anzunehmen genöthigt, dass etwas mehr als die Hälfte der positiven Elektricitätsmenge E vom isolirten Leiter zum Drahte überginge, mithin etwas weniger als $-\frac{1}{2}E$ an negativer Elektricität in der entgegengesetzten Richtung vom Drahte zum isolirten Leiter überginge, so ändert auch dies nichts am Resultate, weil die magnetische Wirkung von der Summe der beiden bewegten Elektricitäten bedingt wird. —

Genug, *den Stoss*, welchen die Nadel erhält, wenn die *angesammelte Elektricitätsmenge E* durch den Multiplikator *entladen* wird, *eben denselben* erhält sie auch, wenn ein *konstanter Strom* während eines solchen

Zeitraums τ durch den Multiplikator geht, dass genau die *Hälfte* von E *an positiver Elektricität* in der Richtung des Stroms und eben so viel *an negativer Elektricität* in entgegengesetzter Richtung durch jeden Querschnitt geht, vorausgesetzt, dass der Zeitraum τ nur einen sehr kleinen Theil der Schwingungsdauer der Nadel bildet.

Hiernach läuft die Lösung der Aufgabe auf folgende *zwei Punkte* hinaus:

1. die Elektricitätsmenge E in dem angegebenen elektrostatischen Maasse zu messen und bei ihrer Entladung die Elongation der Magnetnadel eines Galvanometers zu beobachten;
2. die kleine Zeit τ zu bestimmen, während welcher ein konstanter Strom von der Intensität $= 1$ (nach magnetischem Maasse) durch den Multiplikator desselben Galvanometers gehen muss, damit er der Nadel dieselbe Elongation ertheile.

Multiplicirt man dann $\frac{1}{2}E$ mit der Zahl, welche anzeigt, wie oft τ in der Sekunde enthalten ist, so erhält man durch $1/2\tau \,.\, E$ die *positive Elektricitätsmenge* ausgedrückt, welche bei einem Strome, dessen Intensität nach magnetischem Maasse $= 1$ ist, während der Sekunde in der Richtung des Stroms den Querschnitt des Leiters passirt; oder mit anderen Worten: es ist

$$\frac{1}{2\tau} \cdot E : 1$$

das Verhältniss, in welchem diese den Querschnitt passirende *positive Elektricitätsmenge* zu derjenigen steht, welche der Messung der im isolirten Leiter angesammelten Elektricitätsmenge E als Maass zum Grunde gelegt worden ist, die nämlich auf jeder von zwei kleinen Kugeln sich befinden muss, wenn sie sich aus der Entfernung $= 1$ mit der Kraft $= 1$ abstossen sollen.

Was zunächst den *zweiten* Punkt betrifft, so bedarf es zur Bestimmung von τ keiner besonderen Versuche; denn es lässt sich der Werth von τ durch Rechnung aus der Zahl und den Dimensionen der Windungen des Multiplikators, aus der bei der Entladung beobachteten Elongation der Tangentenboussole und aus der Intensität des Erdmagnetismus weit genauer bestimmen, als es durch direkte Versuche möglich sein würde, wie man im Art. 13 sehen wird.

Der *erste* Punkt aber, welcher die Bestimmung der Elektricitätsmenge E betrifft, fordert eine Kombination mehrerer Versuche, welche Art. 6—12 beschrieben werden sollen. Es kam dabei nämlich darauf an, *erstens* eine noch unbekannte grössere Elektricitätsmenge in einem *vorher* bestimmten Verhältnisse in zwei Theile zu theilen, *sodann* den *grösseren* Theil E durch die Tangentenboussole zu *entladen*, um seine magnetische Wirkung zu beobachten, *endlich* aber den *kleineren* Theil

durch die von ihm in der COULOMB'schen Drehwaage ausgeübte elektrische Kraft zu messen, um dadurch auch den entladenen Theil E nach demselben Maasse gemessen zu erfahren.

Zum Gefässe für jene Elektricitätsmenge, deren Theil E nicht unbedeutend sein durfte, wenn seine Entladung eine genau messbare Wirkung auf die Nadel der Tangentenboussole hervorbringen sollte, schien eine *Leidener Flasche*, deren äussere Belegung gut leitend mit der Erde verbunden war, am meisten geeignet. Es wurde also (Art. 6) zunächst *das Verhältniss* erforscht, in welchem sich *die positive Ladung dieser Flasche* zwischen ihr und *einer grossen isolirten Kugel* theilte, wenn letztere mit dem Knopfe der Flasche berührt wurde. Mit Hülfe des *Sinuselektrometers* wurde das Verhältniss $n:1$ bestimmt, in welchem die Ladung der Flasche *vor* Berührung der grossen Kugel zu ihrer Ladung *nachher* stand, woraus sich das Verhältniss $1:(n-1)$ ergab, in welchem die in der Flasche zurückgebliebene Elektricitätsmenge E zu der an die Kugel übergegangenen steht.

Nach einer mehrmals wiederholten genauen Bestimmung dieses *Verhältnisses* wurde zur Messung der nach einer solchen Theilung an die grosse Kugel übergegangenen Elektricitätsmenge fortgeschritten, zu welchem Ende die grosse Kugel, sogleich nach erfolgter Ladung durch Berührung mit der Leidener Flasche selbst wieder mit der 1 Zoll grossen *Standkugel* einer in grossem Maassstabe ausgeführten COULOMB'schen *Drehwaage* berührt wurde. Das Verhältniss, in welchem sich die Elektricität zwischen diesen beiden Kugeln theilt, kann aus dem Verhältniss ihrer Halbmesser berechnet werden, wie POISSON und PLANA bewiesen haben. Es ist dies in Art. 8 geschehen, wonach also aus der auf die *Standkugel der Drehwaage* übergegangenen Elektricitätsmenge e die Ladung gefunden werden kann, welche die *grosse Kugel* von der Leidener Flasche erhalten hat und mithin auch die in der Leidener Flasche zurückgebliebene, welche zum *Entladungsstrome* verwendet wurde, dessen *magnetische Wirkung* beobachtet werden sollte.

Die Elektricitätsmenge e wurde aber gemessen, nachdem die *Standkugel* der COULOMB'schen Drehwaage, in der sie enthalten war, mit der gleich grossen *beweglichen Kugel* berührt und dadurch e zwischen diesen beiden Kugeln gleich getheilt worden war. Es wurde nämlich sodann (Art. 7) aus Beobachtungen über die allmählige Abnahme der Torsion, welche erforderlich war, um die beiden Kugeln in einer *bestimmten Entfernung* von einander zu erhalten, diejenige Torsion berechnet, welche im ersten Augenblicke erforderlich gewesen sein würde, wenn in demselben die Ladung der grossen Kugel durch die Leidener Flasche, der Standkugel durch die grosse, und der beweglichen durch die Standkugel mit der Beobachtung der Torsion zugleich hätte geschehen können.

— Art. 9 findet man diejenige *Elektricitätsmenge* ε berechnet, welche, zwischen den beiden Kugeln der Drehwaage gleich getheilt, bei der nämlichen Entfernung die *Einheit des Drehungsmoments* auf die Waage ausüben würde, wobei auf die ungleichförmige Vertheilung der Elektricität auf den Kugeloberflächen Rücksicht genommen werden musste. — Art. 10 findet man aus verschiedenen Beobachtungen diejenige *Torsion* der Drehwaage bestimmt, die ebenfalls die *Einheit des Drehungsmoments* auf die Waage ausüben würde. — Mit Hülfe der in Art. 9, 10 enthaltenen Bestimmungen liess sich dann leicht aus der in Art. 7 gefundenen Torsion die Elektricitätsmenge e selbst bestimmen und mithin auch die, welche in der Leidener Flasche zurückgeblieben war, was Art. 11 geschehen, wo die letztere mit E' bezeichnet worden ist, um sie von der zum Entladungsstrome, dessen magnetische Wirkung bestimmt werden sollte, verwendeten Elektricitätsmenge E zu unterscheiden. — In der kurzen Zwischenzeit von dem Augenblicke der Theilung bis zum Augenblicke der Entladung der in der Leidener Flasche zurückgebliebenen Elektricität ändert sich nämlich die Ladung der Flasche ein wenig theils durch den Elektricitätsverlust an die Luft, theils durch eine Aenderung des *Rückstands* in der Flasche, und obschon diese Aenderung bei einer so kurzen Zwischenzeit von etwa nur 3 Sekunden und bei der vortrefflichen Qualität der zu diesen Versuchen ausgewählten Flasche äusserst geringfügig war, so ist sie doch Art. 12 in Rechnung gezogen, woraus man wenigstens ersehen wird, wie bei anderen Flaschen und bei längeren Zwischenzeiten die Aenderung $E—E'$ zu bestimmen sein würde.

Mit Hülfe der S. 233[1]) erwähnten, in Art. 13 enthaltenen, Bestimmung von τ ist endlich Art. 14 die Grösse $1/2\tau \,.\, E$ berechnet, und damit die oben gestellte Aufgabe gelöst. Die folgenden Artikel enthalten grossentheils *Anwendungen*, zu denen auch die Bestimmung der mehrmals erwähnten *Konstante* c gehört.

Die beiden *Anhänge* enthalten eine genauere Beschreibung der *Drehwaage* und der *Tangentenboussole;* die des *Sinuselektrometers* siehe POGGENDORFF's Annalen 1853, Bd. 88.

Aus der befriedigenden Uebereinstimmung aller ohne Auswahl mitgetheilten Versuche (von denen die in Art. 6, 7 am schwierigsten auszuführen waren) lässt sich abnehmen, dass das Resultat auf 1 bis 2 Procent als genau betrachtet werden darf. Die Rechnung ist auf noch kleinere Bruchtheile genau geführt worden, damit die Bestimmung der Unsicherheit des Resultats blos von der Grösse der unvermeidlichen Beobachtungsfehler abhänge.

[1]) [WILHELM WEBER's Werke, Bd. III, p. 621.]

6.

Bestimmung des Verhältnisses, nach welchem sich die Elektricität zwischen der inneren Belegung einer Leidener Flasche und einer grossen Kugel theilt, während die äussere Belegung der Flasche mit der Erde verbunden ist.

Die folgende Tafel giebt die Resultate zweier mit dem *Sinuselektrometer* ausgeführten Beobachtungsreihen über die Abnahme der Ladung einer Leidener Flasche durch Mittheilung an eine grosse ungeladene Kugel, welche mit dem Knopfe der Flasche berührt wurde, während die äussere Belegung der Flasche mit der Erde gut leitend verbunden war.

Die Leidener Flasche war vorher mit dem Sinuselektrometer durch einen Leitungsdraht verbunden worden, dessen Ende in einer kleinen, am Knopfe der Flasche angebrachten, Vertiefung lag. Dieses Ende des Leitungsdrahts wurde, nachdem der Stand des Sinuselektrometers beobachtet worden, an einem seidenen Faden in die Höhe gehoben und darauf die grosse Kugel mit dem Knopfe der Flasche berührt, wobei die äussere Belegung der Flasche mit der Erde immer in leitender Verbindung erhalten wurde. Bei zwei-, drei-, viermaliger Berührung folgten die einzelnen Berührungen so schnell auf einander, als die jedes Mal dazwischen auszuführende vollständige Entladung der grossen Kugel es gestattete. Wurde dann das Sinuselektrometer, welches in der Zwischenzeit nur einen geringen Verlust an die Luft erlitten hatte, durch den am seidenen Faden isolirt gehaltenen Leitungsdraht wieder mit der Flasche verbunden, so wurde die in Ruhe befindliche Elektrometernadel dadurch nur in sehr geringe Schwankung gebracht, weil die Flasche von ihrer Ladung durch Berührung der Kugel verhältnissmässig wenig verliert und weil dieser Verlust näherungsweise durch den verhältnissmässig noch geringeren Verlust an die Luft, welchen die Flasche im Vergleich mit dem Sinuselektrometer erleidet, ausgeglichen wird, woraus sich die Kürze der Zeit erklärt, in welcher, namentlich gegen das Ende jeder Versuchsreihe, die einzelnen Messungen bewerkstelligt werden konnten.

Genaue Zeitbestimmungen für die Augenblicke aller einzelnen Berührungen liessen sich nicht machen, und es beruhen daher die Angaben, welche die folgende Tafel darüber enthält, auf blosser Schätzung, die jedoch auf 1—2 Sekunden als zuverlässig betrachtet werden darf, eine Genauigkeit, die hierbei vollkommen genügte. Beide Reihen wurden am 2. April 1854 im physikalischen Institut in Göttingen gemacht.

Erste Reihe.

No.	Zeit	Sinuselektrometer Ablenkung der Nadel	n
1.	8h 49′ 54″	32° 36,2′	
2.	50′ 0″	(4malige Berührung)	1,0324
3.	51′ 25″	24° 13,7′	
4.	53′ 46″	23° 31,3′	
5.	53′ 52″	(4malige Berührung)	1,0299
6.	54′ 42″	17° 45,6′	
7.	58′ 56″	14° 49,3′	
8.	59′ 2″	(4malige Berührung)	1,0167
9.	59′ 55″	12° 47,6′	
10.	9h 2′ 7″	12° 34,3′	
11.	2′ 13″	(4malige Berührung)	1,0325
12.	2′ 50″	9° 41,7′	
13.	4′ 12″	9° 41,7′	
14.	4′ 18″	(4malige Berührung)	1,0355
15.	4′ 53″	7° 21,3′	
16.	7′ 22″	7° 30,2′	
17.	7′ 28″	(4malige Berührung)	1,0311
18.	8′ 9″	5° 51,2′	
19.	10′ 7″	4° 48,3′	
20.	10′ 13″	(4malige Berührung)	1,0305
21.	10′ 51″	4° 32,9′	

Zweite Reihe.

No.	Zeit	Sinuselektrometer Ablenkung der Nadel	n
1.	9h 40′ 7″	46° 30,5′	
2.	41′ 57″	44° 9,0′	
3.	42′ 0″	(1malige Berührung)	1,0330
4.	42′ 23″	40° 23,9′	
5.	44′ 0″	39° 10,5′	
6.	44′ 3″	(1malige Berührung)	1,0308
7.	44′ 23″	36° 15,7′	
8.	46′ 24″	35° 11,7′	
9.	46′ 27″	(1malige Berührung)	1,0379
10.	46′ 51″	32° 24,6′	
11.	48′ 24″	32° 46,6′	
12.	48′ 27″	(1malige Berührung)	1,0490
13.	48′ 51″	29° 21,1′	
14.	51′ 41″	28° 31,0′	
15.	51′ 44″	(1malige Berührung)	1,0390
16.	52′ 9″	26° 14,2′	
17.	52′ 52″	26° 14,2′	
18.	52′ 55″	(1malige Berührung)	1,0375
19.	53′ 25″	24° 14,7′	
20.	58′ 30″	19° 41,9′	

No.	Zeit	Sinuselektrometer Ablenkung der Nadel	n
21.	9h 58′ 33″	(1malige Berührung)	1,0303
22.	59′ 1″	18° 27,6′	
23.	10h 5′ 52″	17° 42,6′	
24.	5′ 56″	(2malige Berührung)	1,0328
25.	6′ 28″	15° 30,1′	
26.	7′ 14″	15° 30,1′	
27.	7′ 19″	(3malige Berührung)	1,0338
28.	7′ 45″	12° 38,7′	
29.	10′ 13″	12° 38,7′	
30.	10′ 19″	(4malige Berührung)	1,0315
31.	11′ 27″	9° 50,0′	
32.	12′ 44″	9° 50,0′	
33.	12′ 50″	(4malige Berührung)	1,0292
34.	13′ 27″	7° 47,8′	

In dieser Tafel ist in der *letzten* Kolumne unter n das *Verhältniss* angegeben, in welchem die Ladung der Flasche vor der Berührung mit der Kugel zu der Ladung nach der Berührung stand, alle Mal für den Augenblick der Berührung aus den beiden unmittelbar vorher und nachher gemachten, in der *zweiten* und *dritten* Kolumne enthaltenen, Beobachtungen nach folgender Regel berechnet:

$q_{\prime\prime}^2$ und $q_{\prime}^2$ bezeichne den Sinus der beobachteten Ablenkung für die beiden vorhergegangenen Beobachtungszeiten,

q'^2 und q''^2 den Sinus der beobachteten Ablenkung für die beiden nachfolgenden Beobachtungszeiten,

$-t_{\prime\prime}$, $-t_{\prime}$, t', t'' die zugehörigen Beobachtungszeiten vom Augenblick der Berührung an gerechnet,

m die Zahl, wie oft die Berührung wiederholt wird;

so ist

$$n = \sqrt[m]{\frac{t''-t'}{t_{\prime\prime}-t_{\prime}} \cdot \frac{t_{\prime\prime}q_{\prime}-t_{\prime}q_{\prime\prime}}{t''q'-t'q''}}. {}^{1)}$$

1) Aus den Beobachtungen der Ablenkung der Nadel in der dritten Kolumne und der Zeit in der zweiten Kolumne ergeben sich unmittelbar die Werthe von $q_{\prime\prime}$, $q_{\prime}$, q', q'' und die zugehörigen Werthe von $-t_{\prime\prime}$, $-t_{\prime}$, t', t'', aus denen die Werthe von q_0 und q^0 berechnet werden sollen, welche für den Augenblick unmittelbar vor und nach der Berührung gelten. Die angeführte Regel ergiebt sich auf folgende Weise:

1. Für die kurze Zeit der Versuche genügt es, den Verlust an die Luft der Zeit und der Ladung im Augenblicke der Beobachtung proportional anzunehmen, wonach man also für die vier auf den Augenblick der Berührung reducirten Beobachtungen folgende Werthe erhält:

$$(1-at_{\prime\prime})\,q_{\prime\prime},\quad (1-at_{\prime})\,q_{\prime},\quad (1+at')\,q',\quad (1+at'')\,q''.$$

2. Fügt man jedem dieser Werthe den jedesmaligen Rückstand der Flasche hinzu, so müssen die beiden ersten, welche die *ganze Ladung vor der Berührung* dar-

Es sind nun zwar in diesen beiden Beobachtungsreihen einige Beobachtungen weniger gelungen, was bei dem Zusammenwirken dreier Beobachter fast unvermeidlich ist, und man könnte sich dadurch veranlasst finden, einige Werthe von n ganz zu verwerfen, z. B. die unter No. 8 in der ersten Reihe und unter No. 12, 15, 33 in der zweiten Reihe angeführten; es ergiebt sich aber, dass die Ausscheidung dieser Werthe auf die Bestimmung des Mittelwerths von n keinen erheblichen Einfluss hat; denn man findet *mit* und *ohne* Ausscheidung den Mittelwerth

$$n = 1{,}03282, \quad n = 1{,}03297.$$

Eine ähnliche mit derselben Flasche und Kugel früher in Marburg ausgeführte Beobachtungsreihe hatte folgenden Mittelwerth für das Verhältniss n ergeben:

$$n = 1{,}03263.$$

Hiernach soll nun künftig das gesuchte Verhältniss

$$n = 1{,}03276$$

angenommen werden. — Aus diesem Verhältnisse der Ladung der Flasche *vor* und *nach* Berührung der grossen Kugel ergiebt sich endlich auch *das Verhältniss der Theilung der Elektricität zwischen der Flasche und der grossen Kugel im Augenblicke ihrer Berührung,*

$$= 1 : 0{,}03276.$$

stellen, gleich sein, und eben so die beiden letzten, welche die *ganze Ladung nach der Berührung* darstellen; man erhält also, wenn man den Rückstand zur Zeit t mit r_t bezeichnet, die Gleichungen

$$(1 - a t_{,,})\, q_{,,} + r_{-t_{,,}} = (1 - a t_{,})\, q_{,} + r_{-t_{,}} = q_0 + r_0,$$
$$(1 + a t')\, q' + r_{t'} = (1 + a t'')\, q'' + r_{t''} = q^0 + r^0.$$

Es kann aber der Rückstand *vor* und *nach* der Berührung (siehe Art. 12) dargestellt werden durch

$$r_t = \beta\left(1 - e^{-\gamma(\vartheta + t)^{\delta}}\right) . (q_0 + r_0), \quad r_t = \beta\left(1 - e^{-\gamma(\vartheta' + t)^{\delta}}\right) . (q^0 + r^0).$$

Im Augenblicke der Berührung bleibt der Rückstand unverändert, also $r_0 = r^0$. Hieraus ergiebt sich leicht, dass *für kleine Werthe von t vor* und *nach* der Berührung

$$r_t = r_0 + a t, \quad r_t = r_0 + a' t$$

gesetzt werden kann, wo a und a' zwei aus den Beobachtungen zu bestimmende Koefficienten bezeichnen. — Durch Substitution dieser Werthe in obige Gleichungen, worin man zugleich αq_0 für $\alpha q_{,,}$ und $\alpha q_{,}$ setzen darf; und ebenso αq^0 für $\alpha q'$ und $\alpha q''$, erhält man:

$$q_0 = q_{,} - (a + \alpha q_0)\, t_{,} = q_{,,} - (a + \alpha q_0)\, t_{,,},$$
$$q^0 = q' + (a' + \alpha q^0)\, t' = q'' + (a' + \alpha q^0)\, t'';$$

folglich

$$q_0 = \frac{t_{,,} q_{,} - t_{,} q_{,,}}{t_{,,} - t_{,}}, \qquad q^0 = \frac{t'' q' - t' q''}{t'' - t'},$$

$$n = \sqrt[m]{\frac{q_0}{q^0}} = \sqrt[m]{\frac{t'' - t'}{t_{,,} - t_{,}} \cdot \frac{t_{,,} q_{,} - t_{,} q_{,,}}{t'' q' - t' q''}}.$$

7.

Korrespondirende Beobachtungen der Ablenkung der Tangentenboussole, welche von der durch den Multiplikator fliessenden Elektricitätsmenge E hervorgebracht wird, und der Torsion der Coulomb'schen *Drehwaage, durch welche die beiden mit der Elektricitätsmenge e geladenen Kugeln in gleicher Entfernung wie die ungeladenen erhalten werden.*

Zur besseren Veranschaulichung der schon Art. 5 erwähnten Versuche diene die Fig. 1 dargestellte Anordnung der dabei gebrauchten Instrumente.

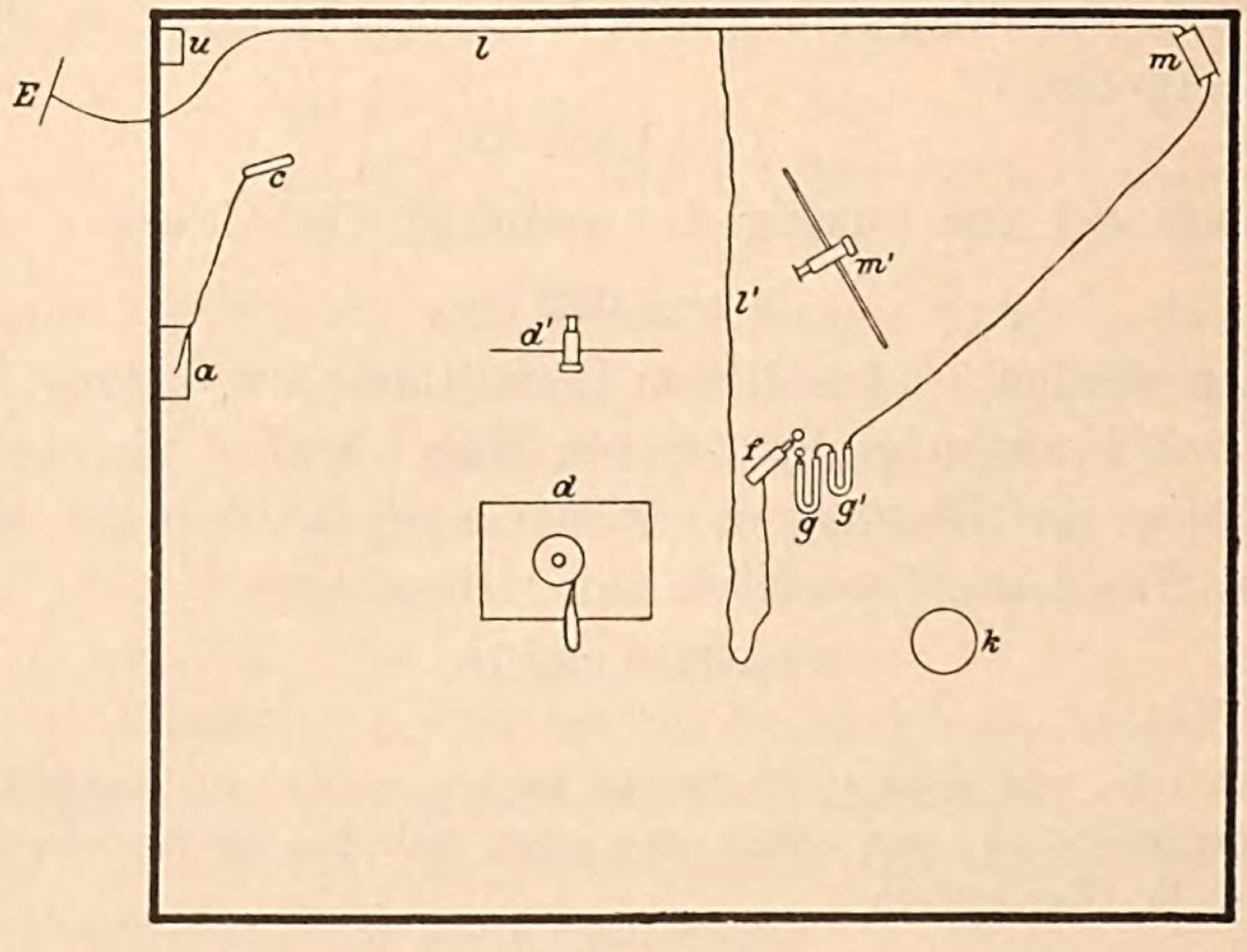


Fig. 1.

Bei *m* ist die *Tangentenboussole* aufgestellt, deren Multiplikatordraht mit seinem einen Ende durch den Leitungsdraht *l* und eine daran gelöthete in nasser Erde vergrabene Platte *E* mit der Erde verbunden war, während er mit seinem anderen Ende durch die Luft zu den langen mit Wasser gefüllten *U*förmigen Glasröhren *g* und *g'* geführt war; *m'* stellt Skala und Fernrohr zur Beobachtung der mit Spiegel versehenen Nadel der Tangentenboussole dar.

Bei *d* ist die Coulomb'sche *Drehwaage* aufgestellt, welche am Ende der Abhandlung, Anhang I, genauer beschrieben werden wird; *d'* stellt Skala und Fernrohr zur Beobachtung des Stands der Drehwaage dar. Es war nämlich am Torsionsdrahte unter dem Arme, welcher die bewegliche Kugel trug, ein lang herabhängendes Schellackstäbchen befestigt, das an seinem Ende einen Spiegel trug, auf welchen das Fernrohr gerichtet war. — Bei *k* hängt die grosse Kugel an einem seidenen Faden von der Decke des Zimmers herab. *l'* ist eine Abzweigung des Leitungsdrahts *l*, um die äussere Belegung der Flasche *f* mit der Erde

zu verbinden. — Bei *u* ist die Uhr, bei *a* eine Klappe in der Decke des Zimmers, durch welche von dem Konduktor einer in dem oberen Zimmer befindlichen Elektrisirmaschine ein Draht zu dem kleinen Konduktor *c* herabgeleitet war, um daran die Flasche *f* zu laden.

Nachdem die Flasche *f* geladen und an dem Drahte l' durch eine Klemmschraube befestigt war, wurde mit ihrem Knopfe die grosse Kugel *k* berührt. Die bei dieser Berührung in der Flasche zurückbleibende freie Elektricitätsmenge werde mit E' bezeichnet. Nach drei Sekunden, wo E' durch Elektricitätsverlust an die Luft und Rückstandsbildung in E übergegangen ist, wird der Knopf der Flasche *f*, wie Fig. 1 angedeutet ist, mit einem aus der *U* förmigen Röhre *g* hervorragenden metallenen Knopfe berührt, und der Beobachter am Fernrohr m' der Tangentenboussole *m* beobachtet die erste Elongation der Magnetnadel, welche von dem durch den Multiplikator gehenden Entladungsstrom der Elektricitätsmenge E hervorgebracht wird.

Unmittelbar nach Entladung der Flasche *f* wurde die in Bereitschaft gehaltene Standkugel der Coulomb'schen Drehwaage an der Kugel *k* geladen und schnell in die Drehawage eingesetzt; die Kugel *k* selbst aber wurde darauf sogleich entladen.

Hierauf wurde in kurzen Zwischenzeiten mehrmals die Torsion gemessen, welche nöthig war, um die beiden Kugeln in ihrer Stellung zu erhalten, bei welcher die beiden von der Drehungsaxe zu den Kugelmittelpunkten gezogenen Radien einen rechten Winkel bildeten. Aus der allmähligen Abnahme dieser Torsion liess sich dann nach dem Coulomb'schen Gesetze, dass bei arithmetisch wachsender Zeit die Ladung geometrisch abnimmt,[1]) diejenige Torsion *berechnen,* welche Statt gefunden haben würde, wenn in dem Augenblicke, wo die grosse Kugel *k* durch die Flasche *f* geladen wurde, auch schon die beiden Kugeln der Drehwaage hätten geladen und eingestellt werden können. In der folgenden Tafel ist die bei jeder Nummer zuerst bemerkte Torsion die auf diese Art *berechnete*; aus ihr wird in Art. 11 die Elektricitätsmenge *e* bestimmt werden, welche von der grossen Kugel *k* auf die Standkugel der Drehwaage in dem Augenblicke ihrer Berührung übergegangen war.

[1]) Durch eine Versuchsreihe, bei welcher die Standkugel zwischen den einzelnen Torsionsbestimmungen bald ausserhalb, bald innerhalb des Gehäuses der Drehwaage sich befunden hatte, war konstatirt worden, dass der Elektricitätsverlust an die Luft innerhalb des Gehäuses und ausserhalb gleich war, wie es bei der Grösse des Gehäuses wohl erwartet werden konnte. Wäre dies nicht der Fall gewesen, so würde die oben erwähnte Anwendung des Coulomb'schen Gesetzes nicht unmittelbar zulässig gewesen sein, weil sich die Standkugel einige Augenblicke ausserhalb des Gehäuses befunden hatte, ehe sie in die Drehwaage eingesetzt werden konnte.

In der letzten Kolumne der folgenden Tafel, welche mit $A/\sqrt{T}$ überschrieben ist, sind die Quotienten der in Skalentheilen ausgedrückten Ablenkung der Magnetnadel in der Tangentenboussole dividirt durch die Quadratwurzel der in Minuten ausgedrückten Torsion der Drehwaage beigefügt. — Der Abstand des Spiegels von der Skala der Tangentenboussole war

$$= 6437\tfrac{1}{2} \text{ Skalentheile.}$$

No.	Zeit	Tangentenboussole, Ablenkung in Skalentheilen $= A$	Drehwaage Torsion in Minuten $= T$	$\frac{A}{\sqrt{T}}$
1.	8h 11′ 8″ 16′ 13″ 21′ 16″ 26′ 35″ 32′ 32″	73,5	175,3′ 152,4′ 136,1′ 118,3′ 99,9′	5,55
2.	8h 37′ 8″ 42′ 4″ 45′ 14″ 50′ 10″ 54′ 40″	80,0	237,1′ 208,7′ 189,1′ 165,3′ 148,1′	5,20
3.	9h 0′ 37″ 5′ 14″ 9′ 19″ 14′ 11″ 18′ 10″	96,5	332,9′ 297,5′ 270,6′ 238,5′ 218,3′	5,29
4.	9h 31′ 14″ 35′ 17″ 41′ 1″ 47′ 43″ 55′ 0″	91,1	265,1′ 249,2′ 226,2′ 201,1′ 178,0′	5,59
5.	10h 1′ 46″ 6′ 24″ 10′ 54″ 16′ 31″ 22′ 4″	97,8	332,4′ 306,0′ 280,4′ 251,1′ 228,6′	5,36

8.

Berechnung des Verhältnisses der beiden Elektricitätsmengen $E' : e$.

Der Halbmesser der grossen Kugel war

$$a = 159{,}46 \text{ Millimeter,}$$

der Halbmesser der Standkugel in der Coulomb'schen Drehwaage war

$$ba = 11{,}537 \text{ Millimeter.}$$

Setzt man nun das Verhältniss, nach welchem sich die nach Art. 6 von der Flasche der ersten Kugel mitgetheilte Elektricität $= 0{,}03276\, E'$ bei der Berührung der letzteren theilt,

$$(0{,}032\,76\, E' - e) : e = A : b^2 B,$$

so ist nach PLANA *(Mémoire sur la distribution de l'électricité à la surface de deux sphères conductrices. Turin,* 1845, *page* 64, 66*)*

$$\frac{B}{h} = \frac{1}{1+b} + \frac{1}{(1+b)^2}\left\{k_2 + \frac{b}{1+b}k_3 + \frac{b^2}{(1+b)^2}k_4 + \frac{b^3}{(1+b)^3}k_5 \cdots\right\},$$

und, wenn $b/(1+b) = \mathfrak{a}$ gesetzt wird,

$$\frac{A}{h} = \frac{1}{2} + \frac{\mathfrak{a}^3}{1-\mathfrak{a}^2} + \frac{\pi\mathfrak{a}}{2}\cot\pi\mathfrak{a} + \mathfrak{a}^3 k_3 + \mathfrak{a}^5 k_5 + \mathfrak{a}^7 k_7 \cdots,$$

$$\text{wo } k_n = \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{5^n} + \cdots$$

Hieraus ergiebt sich für die angeführten Werthe das gesuchte Verhältniss

$$(0{,}032\,76\, E' - e) : e = A : b^2 B = 1 : 0{,}007\,937\,7;$$

folglich

$$E' : e = 3876 : 1.$$

9.

Berechnung derjenigen Elektricitätsmenge ε, mit welcher die beiden Kugeln der COULOMB'schen *Drehwaage geladen sein müssen, um durch ihre Abstossung die Einheit des Drehungsmoments auf die Drehwaage auszuüben.*

Der Halbmesser der Standkugel der COULOMB'schen Drehwaage war $= 11{,}537$ Millimeter, der Halbmesser der beweglichen Kugel war $= 11{,}597$ Millimeter, und es kann daher der mittlere Halbmesser von diesen beiden fast gleichen Kugeln

$$a = 11{,}567 \text{ Millimeter}$$

in folgender Rechnung für beide ohne Nachtheil angenommen werden.

Der Abstand des Mittelpunkts der Standkugel von der Drehungsaxe war ferner $= 93{,}53$ Millimeter, der Abstand des Mittelpunkts der beweglichen Kugel von der Drehungsaxe war $= 61{,}7$ Millimeter, und beide Mittelpunkte bildeten mit der Drehungsaxe einen rechten Winkel. Hieraus ergiebt sich der Abstand der Mittelpunkte von einander

$$= 112{,}05 \text{ Millimeter},$$

was auch durch direkte Messung dieses Abstands bestätigt worden war.

Enthält nun jede der beiden Kugeln die Hälfte der zu bestimmenden Elektricitätsmenge ε, so würde sich, wenn man voraussetzt, *dass*

diese Elektricität auf der Oberfläche jeder Kugel gleichförmig vertheilt sei, aus den bekannten Gesetzen: 1. dass eine auf der Kugeloberfläche gleichförmig vertheilte Elektricitätsmenge auf alle Punkte des äusseren Raums ebenso wirkt, wie wenn sie im Mittelpunkt der Kugel koncentrirt wäre, — 2. dass die Abstossungskraft, welche die in einem Punkte koncentrirte Elektricitätsmenge auf die in einem anderen Punkte koncentrirte ausübt, dem Quotienten aus dem Produkte beider Elektricitätsmengen dividirt durch das Quadrat ihrer Entfernung gleich ist, — unmittelbar *die Abstossungskraft beider Kugeln* ergeben, nämlich

$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{\varepsilon^2}{112{,}05^2}=\frac{\varepsilon^2}{50\,221}.$$

Soll aber diese Abstossungskraft *genau* gefunden werden, so ist obige Voraussetzung nicht zulässig, sondern es muss *die Ungleichförmigkeit der Vertheilung der Elektricität auf der Oberfläche jeder Kugel* bei der gegebenen Grösse und Entfernung derselben genau bestimmt und in Rechnung gebracht werden.

In Poisson's *Mémoire sur la distribution de l'électricité à la surface des corps conducteurs (Mémoires de l'Institut. Année* 1811. *Première partie page* 88*)* findet man für die *Dichtigkeit* z der Elektricität auf der Oberfläche einer kleinen Kugel bei grosser Entfernung von einer anderen Kugel, wenn die *mittlere* Dichtigkeit auf der ersteren Kugel $= B$, auf der letzteren $= A$ gegeben ist, folgenden Ausdruck

$$z = B - \frac{3a^2A}{c^2}\cdot\mu_{\prime} + \frac{5a^2bA}{2c^3}(1-3\mu_{\prime}^2),$$

worin b und a die Halbmesser der beiden Kugeln, c den Abstand ihrer Mittelpunkte und $\mu_{\prime}$ den Cosinus des Winkels φ bezeichnet, welchen der Halbmesser der ersteren Kugel an der betrachteten Stelle mit der Richtung c bildet. — Wendet man diese allgemeine Regel auf den vorliegenden Fall an, so ist

$$A = B,$$
$$a = b$$

zu setzen, folglich, wenn für $\mu_{\prime}$ sein Werth $\cos\varphi$ geschrieben wird, ist die *Dichtigkeit*

$$z = A\left(1 - \frac{3a^2}{c^2}\cos\varphi + \frac{5}{2}\frac{a^3}{c^3}(1-3\cos\varphi^2)\right).$$

Aus dieser *Dichtigkeit* ergiebt sich nun ferner *der gegen die Kugeloberfläche senkrechte von innen nach aussen gerichtete Druck der Elektricität* an der betrachteten Stelle, nach dem bekannten von Poisson in der angeführten Abhandlung bewiesenen Gesetze, wonach der Druck dem

Quadrate der Dichtigkeit proportional, oder, bestimmter ausgedrückt, dem Quadrate der Dichtigkeit z^2 multiplicirt mit der Zahl 2π gleich ist. Jener *Druck* ist also

$$= 2\pi \,.\, z^2.$$

Zerlegt man sodann diesen *Druck* nach der Richtung der verlängerten Linie c und nach einer darauf senkrechten Richtung, so erhält man *die der verlängerten Linie c parallele Komponente*

$$= -\, 2\pi z^2 \,.\, \cos\varphi.$$

Substituirt man hierin endlich obigen Werth von z, so erhält man *für zwei gleiche Elemente der Kugeloberfläche, deren Verbindungslinie mit der Linie c parallel ist*, für welche also die Werthe von φ einander zu π ergänzen, *zusammengenommen den nach der Richtung* der verlängerten Linie c zerlegten *Druck*

$$= 24\,\frac{\pi a^2}{c^2}\,A^2\left(1 + \frac{5}{2}\frac{a^3}{c^3}\,(1 - 3\cos\varphi^2)\right)\cos\varphi^2,$$

woraus die der verlängerten Linie c parallele *Druckkraft erstens*, für die beiden Zonen von der Breite $a\,d\varphi$, welche alle, den beiden sich zu π ergänzenden Werthen von φ angehörige, Elemente der Kugeloberfläche enthalten, durch Multiplikation mit der Fläche $2\pi a^2 \sin\varphi\, d\varphi$,

$$= 48\,\frac{\pi^2 a^4}{c^2}\,A^2\left(1 + \frac{5}{2}\frac{a^3}{c^3}\,(1 - 3\cos\varphi^2)\right)\cos\varphi^2 \sin\varphi\, d\varphi,$$

zweitens, für die ganze Kugeloberfläche, durch Integration,

$$48\,\frac{\pi^2 a^4}{c^2}\,A^2 \int_0^{\frac{1}{2}\pi}\left(1 + \frac{5}{2}\frac{a^3}{c^3}\,(1 - 3\cos\varphi^2)\right)\cos\varphi^2 \sin\varphi\, d\varphi = 16\,\frac{\pi^2 a^4}{c^2}\left(1 - 2\,\frac{a^3}{c^3}\right)A^2$$

gefunden wird, worin A die *mittlere* Dichtigkeit der Elektricität auf der Oberfläche jeder der beiden Kugeln vom Halbmesser a, folglich

$$4\pi a^2 \,.\, A$$

die auf der Oberfläche jeder Kugel vertheilte *Elektricitätsmenge* bezeichnet.

Nun ist aber die *gesuchte*, auf beide Kugeloberflächen zusammen vertheilte *Elektricitätsmenge* (deren Abstossungskraft die Einheit des Drehungsmoments auf die Drehwaage ausüben soll) oben mit ε bezeichnet worden; folglich ist

$$\tfrac{1}{2}\varepsilon = 4\pi a^2 \,.\, A,$$

woraus

$$A = \frac{\varepsilon}{8\pi a^2}.$$

Substituirt man diesen Werth von A, so erhält man die mit der verlängerten Linie c parallel gerichtete *Druckkraft*, d. i. *die Abstossungskraft der beiden Kugeln*,

$$=\frac{1}{4}\left(1-2\frac{a^3}{c^3}\right)\frac{\varepsilon^2}{c^2},$$

oder, wenn man darin für a und c die oben angeführten Werthe

$$a = 11{,}567,$$
$$c = 112{,}05$$

setzt,

$$=\frac{\varepsilon^2}{50\,331}.$$ [1]

Das Produkt der gefundenen Abstossungskraft beider Kugeln in das von der Drehungsaxe auf die Richtung dieser Kraft, d. i. auf die Linie c, gefällte Perpendikel giebt endlich den Werth des von dieser Abstossungskraft auf die Drehwaage ausgeübten *Drehungsmoments*, welches $= 1$ sein soll.

Da aber die die Mittelpunkte beider Kugeln verbindende Linie c mit den von beiden Mittelpunkten zur Drehungsaxe gezogenen Horizontallinien ein an der Drehungsaxe rechtwinkeliges Dreieck bilden, so ist das von der Drehungsaxe auf die Hypotenuse des rechtwinkeligen Dreiecks c gefällte Perpendikel gleich dem Produkte der beiden Katheten dividirt durch die Hypotenuse, oder, da die beiden Katheten 93,53 und 61,7 Millimeter, $c = 112{,}05$ Millimeter lang sind,

$$=\frac{61{,}7\,.\,93{,}53}{112{,}05}=51{,}5025 \text{ Millimeter.}$$

Hieraus folgt nun das von der elektrischen Abstossungskraft der beiden Kugeln auf die Drehwaage ausgeübte *Drehungsmoment*

$$=51{,}5025\cdot\frac{\varepsilon^2}{50\,331}=\frac{\varepsilon^2}{977}.$$

[1] Es ergiebt sich hieraus, dass die in jeder Kugel enthaltene Elektricität wegen ihrer ungleichförmigen Vertheilung auf der Oberfläche, nicht im *Mittelpunkte* der Kugel koncentrirt gedacht werden darf. — Es ist aber

$$\frac{\varepsilon^2}{50331}=\frac{1}{4}\cdot\frac{\varepsilon^2}{112{,}1743^2},$$

woraus sich also ergiebt, dass die Abstossungskraft der beiden Kugeln dieselbe ist, wie wenn die beiden Hälften der ganzen in ihnen enthaltenen Elektricitätsmenge in zwei Punkten, die 112,1734 Millimeter von einander entfernt sind, koncentrirt wären, das heisst, da diese Entfernung um 0,1234 Millimeter grösser ist als der Abstand der Mittelpunkte, in zwei Punkten, die um 0,0617 Millimeter von den beiden Mittelpunkten entfernt liegen.

Es wird also der Forderung, dass das von der elektrischen Abstossungskraft beider Kugeln herrührende *Drehungsmoment*

$$= 1$$

sei, dadurch genügt, dass die in beiden Kugeln zusammengenommen enthaltene *Elektricitätsmenge*

$$\varepsilon = \sqrt{977} = 31{,}25$$

ist. Dieser Bestimmung von ε liegt diejenige Elektricitätsmenge als Einheit zum Grunde, welche auf eine gleiche Elektricitätsmenge in der Einheit der Entfernung, bei relativer Ruhe, die Einheit der Abstossungskraft ausübt.

10.

Berechnung derjenigen Torsion ϑ, welche der Draht, an dem die COULOMB'sche *Drehwaage hängt, erhalten muss, um durch seine Torsionskraft die Einheit des Drehungsmoments auf die Drehwaage auszuüben.*

Das *Drehungsmoment*, welches auf die Drehwaage durch eine Torsion des Drahts, an welchem sie hängt, ausgeübt wird, ist bekanntlich der *Torsion* und dem *Torsionskoefficienten* des Drahts proportional, oder, bestimmter ausgedrückt, ist *dem Produkte des in Theilen des Halbmessers ausgedrückten Torsionswinkels in die vom Drahte auf die Drehwaage ausgeübte Direktionskraft gleich.* Es braucht daher nur diese *Direktionskraft* bestimmt zu werden, um daraus denjenigen Torsionswinkel ϑ kennen zu lernen, bei welchem das auf die Drehwaage ausgeübte Drehungsmoment der *Einheit* gleich ist.

Die Grösse der vom Drahte ausgeübten Direktionskraft ist, nach den bekannten Gesetzen der Elasticität fester Körper, unabhängig von der Grösse und dem Gewicht des am Drahte hängenden Körpers, und es können daher zur Bestimmung der *Direktionskraft* des Drahts andere Körper, statt der Drehwaage, am Drahte aufgehangen und beobachtet werden.

Es wurde *erstens* an dem Drahte, statt der Drehwaage, eine kreisrunde Messingplatte in ihrem Mittelpunkte horizontal aufgehangen. Diese Messingplatte hatte

191 112,4 Milligramm *Masse*,
63,95 Millimeter *Halbmesser*.

Zur Verbindung des Drahts mit der Scheibe diente ein kleiner vertikaler Cylinder von

2626,0 Milligramm *Masse*,
3,25 Millimeter *Halbmesser*.

Es wurde darauf die *Dauer* der Torsionsschwingungen der Platte t beobachtet und

$$t = 47{,}139 \text{ Sekunden}$$

gefunden. — Nach den vorhergehenden Angaben war aber *des Trägheitsmoment der schwingenden Platte*

$$K_1 = \tfrac{1}{2} \,.\, 63{,}95^2 \,.\, 191\,112{,}4 = 390\,790\,000,$$

das Trägheitsmoment des kleinen Cylinders

$$K_2 = \tfrac{1}{2} \,.\, 3{,}25^2 \,.\, 2626 = 13\,868,$$

beide zusammen also

$$K = K_1 + K_2 = 390\,803\,868.$$

Aus diesem *Trägheitsmomente* K und aus der beobachteten *Schwingungsdauer* t ergiebt sich nun nach den bekannten Gesetzen solcher Schwingungen der Werth der *Direktionskraft* D,

$$D = \frac{\pi^2 K}{t^2} = 1\,735\,800.$$

Zweitens wurde an dem nämlichen Drahte ein Messingcylinder in seiner Mitte horizontal aufgehangen. Dieser Cylinder hatte

58 897,1 Milligramm *Masse*,
269,7 Millimeter *Länge*,
2,865 Millimeter *Halbmesser*.

Zur Verbindung mit dem Drahte diente derselbe kleine vertikale Cylinder, wie bei den vorhergehenden Versuchen. Es wurde darauf die *Dauer* der Torsionsschwingungen diesen Stabs t' beobachtet und

$$t' = 44{,}9537 \text{ Sekunden}$$

gefunden. — Nach den vorhergehenden Angaben war *das Trägheitsmoment des schwingenden Stabs*

$$K'_1 = \tfrac{1}{12}\,(269{,}7^2 + 3 \,.\, 2{,}865^2)\, 58\,897{,}1 = 357\,130\,000,$$

und also *das ganze Trägheitsmoment* mit Einschluss des kleinen vertikalen Cylinders

$$K' = 357\,143\,868.$$

Es ergiebt sich daher aus diesen Beobachtungen der Werth der *Direktionskraft* D,

$$D = \frac{\pi^2 K'}{t'^2} = 1\,744\,200;$$

folglich im Mittel aus beiden Beobachtungsreihen

$$D = 1\,740\,000.$$

Soll nun das Produkt dieses Werths von D in den nach Theilen des Halbmessers ausgedrückten Torsionswinkel, d. i. das von dem Drahte

auf die Drehwaage ausgeübte *Drehungsmoment* = 1 sein, so ergiebt sich der Werth des Drehungswinkels oder die gesuchte *Torsion des Drahts* ϑ gleich dem Winkel, dessen Bogen dem 1740000. Theile des Halbmessers gleich ist, oder es ist

$$\vartheta = 0{,}001\,975\,7 \text{ Bogenminuten.}$$

11.

Berechnung der Elektricitätsmengen E' und e in den Art. 7 beschriebenen Beobachtungen.

Bei den in Art. 7 beschriebenen Versuchen befand sich die COULOMB'sche Drehwaage in den nach Nummern unterschiedenen Versuchen für folgende Werthe des Torsionswinkels im Gleichgewichte:

No.	Torsionswinkel in Minuten
1.	175,3
2.	237,1
3.	332,9
4.	265,1
5.	332,4

Das Gleichgewicht der Drehwaage beweist aber, dass das vom Drahte auf die Drehwaage ausgeübte Drehungsmoment dem von der elektrischen Abstossungskraft der beiden Kugeln herrührenden Drehungsmomente entgegengesetzt gleich war. — Das *erstere* Drehungsmoment wird aber gefunden, wenn man den beobachteten Torsionswinkel mit dem im vorigen Artikel bestimmten Winkel $\vartheta = 0{,}001\,975\,7$ Bogenminuten dividirt, um welchen der Draht gedreht werden musste, um die *Einheit des Drehungsmoments* auf die Drehwaage auszuüben. Hiernach erhält man die bei den beschriebenen Versuchen von dem Drahte auf die Drehwaage ausgeübten *Drehungsmomente.*

No.	Drehungsmoment des Drahts
1.	88 728
2.	120 010
3.	168 500
4.	134 180
5.	168 240

Das *letztere* von der elektrischen Abstossungskraft der beiden Kugeln herrührende Drehungsmoment ergiebt sich aus Art. 9

$$= \frac{e^2}{\varepsilon^2} = \frac{e^2}{977},$$

wo e die *Elektricitätsmenge* bezeichnet, mit welcher die beiden Kugeln der Drehwaage zusammen genommen geladen sind, die man hiernach für die angeführten fünf Versuche aus der *Gleichheit* beider Drehungsmomente berechnen kann, wie in folgender Tafel geschehen ist. In der letzten Kolumne dieser Tafel sind ausserdem noch die aus der Art. 8 gefundenen Proportion

$$E' : e = 3876 : 1$$

berechneten Werthe von E' beigefügt worden.

No.	e	E'
1.	9 310	36 086 000
2.	10 828	41 970 000
3.	12 830	49 730 000
4.	11 450	44 379 000
5.	12 821	49 693 000

12.

Berechnung der Korrektion, welche durch den Elektricitätsverlust und die Rückstandsbildung in der Leidener Flasche in der von der Theilung der Elektricität bis zur Entladung der Flasche verflossenen Zeit bedingt wird, $= E' - E$.

Die Elektricitätsmenge E', welche nach der Ladung der grossen Kugel in der Leidener Flasche zurückgeblieben war, erfährt während der Zeit von *drei Sekunden*, bis zu ihrer Entladung, eine kleine Aenderung, theils durch Verlust an die Luft, theils durch Rückstandsbildung. Die dann in der Flasche noch vorhandene Menge E kann aus E' folgendermassen bestimmt werden.

In Poggendorff's Annalen 1854, Bd. 91, findet man eine Methode angegeben, die Bildung des Rückstands in einer Leidener Flasche zu bestimmen. Ist danach Q eine der Flasche plötzlich mitgetheilte Elektricitätsmenge, welche nach t Sekunden durch Verlust an die Luft in Q_t übergegangen ist, so hat sich zur Zeit t ein Rückstand r_t gebildet, welcher der Gleichung

$$\text{(I)} \qquad r_t = p\left(Q_t - Qe^{-\frac{b}{m+1}\cdot t^{m+1}}\right)$$

entspricht. Für die Konstanten bei der angewendeten Flasche hatten sich aus früherer Untersuchung die Werthe

$$p = 0{,}04494\,, \qquad b = 0{,}1834$$

ergeben, während $m+1$ die für alle Flaschen gleiche Grösse $= 0{,}4255$ besitzt.

Sind für eine Flasche diese Konstanten bestimmt, so kann auch die auf den Elektricitätsverlust an die Luft sich beziehende Konstante a leicht gefunden werden. Man theilt der Flasche zu dem Ende durch eine andere Flasche plötzlich eine unbekannte Ladung Q mit und beobachtet mit dem *Sinuselektrometer* zu den Zeiten

$$t_1, t_2, \ldots t_n$$

die disponible Ladung

$$L_{t_1}, L_{t_2}, \ldots L_{t_n}.$$

Nun ist, wenn ν_t die bis zur Zeit t an die Luft entwichene Elektricitätsmenge bezeichnet,

$$L_t = Q - r_t - \nu_t. \qquad \text{(II)}$$

Für kleinere Werthe von t kann aber

$$\nu_t = a \,.\, t \frac{Q + L_t}{2}$$

gesetzt werden, und wird ausserdem in Gleichung (I) $Q - \nu_t$ für Q_t geschrieben, so erhält man

$$L_t = Q(1 - \varrho_t) - a(1 - p)\, t \frac{Q + L_t}{2}, \qquad \text{(III)}$$

worin ϱ_t statt $p\left(1 - e^{-\frac{b}{m+1} t^{m+1}}\right)$ gesetzt ist.

Diese Gleichung soll nun allen Beobachtungen Genüge leisten. Berechnet man ϱ_t für die Zeit der ersten und letzten Beobachtung und setzt diese Werthe nebst den beobachteten Werthen von L_t und t in die Gleichung ein, so erhält man zwei Gleichungen mit den beiden unbekannten Grössen Q und a.

Nachdem nun zur Bestimmung von a der Leidener Flasche in dem Lokal, wo die früheren Versuche gemacht wurden, plötzlich eine Ladung mitgetheilt worden war, wurden aus den Beobachtungen folgende Resultate erhalten:

t	L_t	ϱ_t
23	0,667 6	0,036 19
65	0,657 6	0,041 42
128	0,648 3	0,043 44
226	0,638 9	0,044 35

Es ist hierin $L_t = \sqrt{\sin \varphi}$, und φ ist die am *Sinuselektrometer* beobachtete Ablenkung; ϱ_t ist aber aus t und den Konstanten der Flasche berechnet. — Durch Kombination der ersten und letzten Beobachtung findet man

$$Q = 0{,}6956, \qquad a = 0{,}000\,179\,35.$$

Mit diesen Werthen ergeben sich nun aus Gleichung (III) folgende zusammengehörige Werthe von t und L_t:

t	L_t
23	0,667 6
65	0,659 2
128	0,650 6
226	0,638 9

welche von den beobachteten Werthen so wenig abweichen, dass der gefundene Werth von a für hinreichend genau gelten kann, um ihn zur Korrektion von E' zu benutzen. In *drei Sekunden* betrug also *der Elektricitätsverlust an die Luft*

$$0{,}000\,538$$

von der ganzen Ladung E'.

Der in derselben Zeit entstandene *Rückstand* wird auf folgende Weise gefunden.

Unmittelbar vor der Berührung der grossen Kugel, welche t Sekunden nach der Ladung der Flasche erfolgte, hatte letztere die disponible Ladung L_t und einen nicht entladbaren Rückstand r_t. Schreibt man in der Gleichung (I) $Q - \nu_t$ statt Q_t, setzt für ν_t seinen Werth $a \,.\, t\,(Q + L_t)/2$ und für Q den aus der Gleichung (III) sich ergebenden Werth, so erhält man den Rückstand zur Zeit t durch die zu dieser Zeit vorhandene disponible Ladung ausgedrückt,

$$\text{(IV)} \qquad r_t = \frac{\varrho_t - a\,t\,(p - \frac{1}{2}\varrho_t)}{1 - \varrho_t - \frac{1}{2}a\,t\,(1-p)} \cdot L_t = \beta L_t.$$

Nach der Ladung der Kugel ist in der Flasche (Art. 6) nur die disponible Ladung $L_t\,1/n$, überhaupt also die Elektricitätsmenge $(1/n + \beta)\,L_t$ geblieben. Wie nun die Rückstandsverhältnisse nach dieser partiellen Entladung sich gestalten, hängt davon ab, ob der gebildete Rückstand βL_t kleiner, oder eben so gross, oder grösser ist als der Grenzwerth

$$p\left(\frac{1}{n} + \beta\right) L_t$$

des Rückstands für die noch vorhandene Ladung der Flasche, was wiederum davon abhängt, ob n kleiner, oder eben so gross, oder grösser ist als $p/[\beta\,(1-p)]$.

Bei den vorliegenden Versuchen war t im Mittel nahe 60 Sekunden. Setzt man diesen Werth in die Gleichung (IV), so ergiebt sich

$$\beta = 0{,}042\,86, \qquad \frac{p}{\beta\,(1-p)} = 1{,}0978.$$

Da in Art. 6 $n = 1{,}032\,76$, mithin kleiner als $p/[\beta(1-p)]$, gefunden worden ist, so geht daraus hervor, dass der Rückstand zu wachsen fortfährt; sein Wachsthum ist aber langsamer als vor der partiellen Entladung, weil der jetzige Grenzwerth dem bereits gebildeten Rückstande näher liegt als der vorherige, und zwar wird die Weiterbildung so vor sich gehen, als ob der vorhandene Rückstand βL_t von der jetzigen Ladung $(1/n + \beta)\, L_t$ erzeugt wäre. Dazu würde es aber einer Zeit bedurft haben, welche sich aus der Gleichung

$$r_t = \beta L_t = \left(\frac{1}{n} + \beta\right) L_t \,.\, p \left(1 - e^{-\frac{b}{m+1} t^{m+1}}\right),$$ [1])

aus welcher

$$\log t = \frac{1}{m+1} \log \left[-\frac{m+1}{b} \log \operatorname{nat}\left(1 - \frac{\beta}{\left(\frac{1}{n} + \beta\right) p}\right)\right]$$

folgt, $= 85{,}9$ Sekunden ergiebt.

Von der im Augenblicke nach der Berührung der grossen Kugel vorhandenen Ladung $E' = (1/n)\,.\,L_t$ geht also das in *drei Sekunden*, bis zur Entladung der Flasche, erfolgende Wachsthum des Rückstands noch verloren, welches durch

$$\left[\left(\frac{1}{n} + \beta\right) p \left(1 - e^{-\frac{b}{m+1} \cdot 88{,}9^{m+1}}\right) - \beta\right] L_t = 0{,}000\,10\,.\,L_t,$$

oder, da $L_t = nE'$ ist, durch

$$0{,}000\,103\,.\,E'$$

bestimmt ist.

Darnach ergiebt sich endlich die gesuchte Korrektion

$$E' - E = (0{,}000\,538 + 0{,}000\,103)\, E' = 0{,}000\,641\, E'$$

und man erhält daher für die im vorigen Artikel angegebenen Werthe E' die korrigirten Werthe E, welche die durch den Multiplikator wirklich entladenen Elektricitätsmengen angeben, wie folgt:

No.	E
1.	36 060 000
2.	41 940 000
3.	49 700 000
4.	44 350 000
5.	49 660 000

[1]) Diese Gleichung ist der Rückstandsgleichung (I) gemäss gebildet, in welcher statt Q_t jetzt $Q = (1/n + \beta)\, L_t$ gesetzt werden musste.

13.

Berechnung der Dauer, welche ein Strom von der Art. 4 beschriebenen Normalstärke haben muss, um die Art. 7 beobachteten Ablenkungen der Tangentenboussole hervorzubringen.

Die Art. 7 angeführten *Ablenkungen der Tangentenboussole* waren *in Skalentheilen* beobachtet worden; durch Division derselben mit dem in Skalentheilen ausgedrückten Halbmesser (oder mit dem doppelten Abstande des Spiegels von der Skale) = 12 875, erhält man diese Ablenkungen *in Bogenwerth für den Halbmesser* = 1.

No.	Ablenkung in Skalentheilen	Ablenkung in Bogenwerth für den Halbmesser = 1 φ
1.	73,5	0,0057087
2.	80,0	0,0062136
3.	96,5	0,0074952
4.	91,1	0,0070757
5.	97,8	0,0075962

In den „Elektrodynamischen Maassbestimmungen" II, S. 363 [1]) ist bewiesen worden, dass ein Strom von der Stärke = 1, welcher durch eine Multiplikatorwindung geht, deren Halbmesser = a ist, auf ein Theilchen des *nordmagnetischen* Fluidums + μ, oder auf ein Theilchen des *südmagnetischen* Fluidums — μ, welches sich in der Entfernung = b von der Ebene der Multiplikatorwindung befindet, und dessen Projektion auf diese Ebene in der Entfernung = x vom Mittelpunkte liegt, senkrecht gegen die Ebene der Multiplikatorwindung eine *Kraft F* ausübt,

$$F = +\frac{2\pi a^2\mu}{(a^2+b^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}\cdot\left\{1+\frac{3}{4}(3a^2-2b^2-2x^2)\frac{x^2}{(a^2+b^2+x^2)^2}+\ldots\right\},$$

woraus folgt, dass derselbe Strom auf eine *Nadel*, welche die Theilchen + μ und — μ in einer sehr kleinen, der Multiplikatorebene parallelen, Entfernung = 2ε geschieden enthält, ein *Drehungsmoment D* ausübt,

$$D = \frac{4\pi a^2\mu\varepsilon}{(a^2+b^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}\cdot\left\{1+\frac{3}{4}(3a^2-2b^2-2x^2)\frac{x^2}{(a^2+b^2+x^2)^2}+\ldots\right\},$$

wo $2\mu\varepsilon$ das *magnetische Moment* der Nadel oder den *Nadelmagnetismus* bezeichnet.

Von dieser Gleichung lassen sich nun drei verschiedene Anwendungen machen, *erstlich* auf die Art. 1 für die magnetischen Wirkungen angenommenen *Normalverhältnisse*, *ferner* auf die *Tangentenboussole*

[1]) [WILHELM WEBER's Werke, Bd. III, p. 454.]

mit einfachem Multiplikatorkreise, und *endlich* auf die zu den vorliegenden Versuchen gebrauchte *Tangentenboussole mit vielfachem Multiplikatorkreise.* Die beiden ersten Anwendungen beweisen nur, dass dieser Gleichung, wie schon a. a. O. bemerkt worden, in Beziehung auf die Stromstärke das in Art. 1 aus den magnetischen Wirkungen abgeleitete Stromintensitätsmaass wirklich zum Grunde liegt; die letzte Anwendung führt zur Berechnung des *gesuchten Zeitraums* τ.

Wendet man diese Gleichung *erstens* auf die Art. 1 für die magnetischen Wirkungen eines Stroms angenommenen *Normalverhältnisse* an, so ist $\pi a^2 = 1$, $b = 0$, $2\mu\varepsilon = 1$, $x = R$ und a/R ein verschwindend kleiner Bruch; es ergiebt sich dann *aus obiger Gleichung* das Drehungsmoment D (ohne dem von der Stromrichtung abhängenden Vorzeichen),

$$D = \frac{1}{R^3} \text{ oder } R^3 D = 1,$$

was also mit der in Art. 1 für die Stromintensität $= 1$ festgesetzten magnetischen Stromwirkung übereinstimmt. Hieraus folgt, dass obiger Gleichung das in Art. 1 aus magnetischer Wirkung abgeleitete Stromintensitätsmaass zum Grunde liegt.

Wendet man *zweitens* dieselbe Gleichung auf eine *Tangentenboussole mit einfachem Multiplikatorkreise* vom Halbmesser R an, wo eine kleine Magnetnadel im Mittelpunkte des Kreises, der Kreisebene parallel, nach dem magnetischen Meridian gerichtet ist, so ist $a = R$, $b = 0$, $x = 0$; es ergiebt sich dann *aus obiger Gleichung* das Drehungsmoment, welches vom Strome auf die *im magnetischen Meridiane* befindliche Nadel ausgeübt wird,

$$D = \frac{4\pi\mu\varepsilon}{R}.$$

Bei einer *Ablenkung* der Nadel vom magnetischen Meridiane $= \varphi$ geht dasselbe in

$$D \cos\varphi = \frac{4\pi\mu\varepsilon}{R} \cdot \cos\varphi$$

über. Bezeichnet T den horizontalen Erdmagnetismus, so ist $-2\mu\varepsilon T \sin\varphi$ das *von der Erde* auf die Nadel ausgeübte Drehungsmoment. Die Summe dieser beiden Momente ist $= 0$, wenn die Nadel bei der *Ablenkung* φ in Ruhe beharrt; folglich ist

$$\frac{2\pi}{R} = T \operatorname{tang}\varphi \text{ oder } \varphi = \operatorname{arc\,tang} \frac{2\pi}{RT}.$$

Diese Ablenkung ist aber dieselbe, welche der Art. 4 beschriebene *Normalstrom* bei einer Tangentenboussole mit einfachem Kreise hervorbringen sollte.

Drittens endlich soll die nämliche Gleichung auf die zu den vorliegenden Versuchen gebrauchte *Tangentenboussole mit vielfachen Multiplikatorkreisen* angewendet und daraus das Drehungsmoment bestimmt werden, welches der eben erwähnte, Art. 4 beschriebene *Normalstrom*, wenn er durch alle Windungen des Multiplikators hindurchgeht, auf die Nadel ausübt.

Wir betrachten zunächst *eine* Windung des Multiplikators, vom Halbmesser a, deren Ebene von der Meridianebene der Nadel um b absteht. Das von dieser Windung auf die Nadel ausgeübte Drehungsmoment D' wird durch obige Gleichung bestimmt,

$$D' = \frac{4\pi a^2 \mu\varepsilon}{(a^2+b^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \left\{1 + \frac{3}{4}(3a^2 - 2b^2 - 2x^2)\frac{x^2}{(a^2+b^2+x^2)^2} + \dots\right\},$$

worin, wie bei der vorigen Anwendung, $x = 0$ gesetzt werden könnte, wenn die Länge der Nadel ein sehr kleiner Bruch von dem Durchmesser der Multiplikatorwindung wäre. Nun war zwar bei unserer *Tangentenboussole* die Länge der Nadel blos 60 Millimeter, während der mittlere Durchmesser der Multiplikatorwindungen 267 Millimeter betrug, was aber noch nicht genügt, um x ganz zu vernachlässigen. Doch genügt es, für x einen Näherungswerth zu setzen, welcher sich darbietet, wenn man im Nadelmagnetismus $= 2\mu\varepsilon$ unter $+\mu$ und $-\mu$ die Menge des nach der *idealen Vertheilung* auf der Oberfläche der Nadel vertheilten nordmagnetischen und südmagnetischen Fluidums versteht, und demgemäss 2ε bestimmt, was dann den Abstand des Schwerpunkts des nordmagnetischen von dem des südmagnetischen Fluidums bedeutet, so dass $x = \varepsilon$ zu setzen ist. Nach Länge und Beschaffenheit der gebrauchten Nadel kann 2ε nicht sehr von 40 Millimetern verschieden sein, und es kann daher mit hinreichender Genauigkeit

$$x = \varepsilon = 20 \text{ Millimeter}$$

gesetzt werden.

Bezeichnet man sodann mit a' und a'' den inneren und äusseren Halbmesser des Multiplikatorrings und mit $2b'$ die Breite desselben, so ist der Querschnitt des ganzen Rings

$$= 2(a'' - a')\,b'.$$

Bezeichnet man ferner denjenigen Theil des Querschnitts, welcher auf die betrachtete Multiplikatorwindung kommt (deren Halbmesser $= a$ war und deren Ebene vom gemeinschaftlichen Mittelpunkte der Nadel und des Multiplikatorrings um b abstand), mit $da\,.\,db$, so ist das Produkt dieses Elements des Querschnitts in das von der betrachteten Multiplikatorwindung auf die Boussole ausgeübte Drehungsmoment

$$= \frac{4\pi a^2 \mu\varepsilon}{(a^2+b^2+\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot da\,db \left\{1 + \frac{3}{4}(3a^2 - 2b^2 - 2\varepsilon^2)\frac{\varepsilon^2}{(a^2+b^2+\varepsilon^2)^2} + \dots\right\},$$

oder, weil die Glieder, welche die vierte und höhere Potenzen des Bruchs ε/a enthalten, wegen der Kleinheit dieses Bruchs vernachlässigt werden können,

$$= \frac{4\pi a^2 \mu \varepsilon}{(a^2+b^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot da\, db \left\{1 + \frac{3}{4} \frac{a^2 - 4b^2}{(a^2+b^2)^2} \cdot \varepsilon^2 \right\}.$$

Hieraus folgt nun die Summe der Produkte des Querschnitts jeder Umwindung in das von derselben ausgeübte Drehungsmoment,

$$4\pi\mu\varepsilon \int_{a'}^{a''} a^2\, da \int_{-b'}^{+b'} \frac{db}{(a^2+b^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \left\{1 + \frac{3}{4} \frac{a^2-4b^2}{(a^2+b^2)^2} \cdot \varepsilon^2 \right\}$$

$$= 8\pi\mu\varepsilon b' \left\{ \log \frac{a'' + \sqrt{a''^2 + b'^2}}{a' + \sqrt{a'^2 + b'^2}} + \frac{1}{4} \left(\frac{a''^3}{(a''^2+b'^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{a'^3}{(a'^2+b'^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \cdot \frac{\varepsilon^2}{b'^2} \right\}.$$

Durch Division dieses Werths mit dem Querschnitt des ganzen Rings $= 2(a'' - a')\, b'$ erhält man dasjenige Drehungsmoment, welches im Mittel *eine* Multiplikatorwindung auf die Nadel ausübt, woraus durch Multiplikation mit der Zahl der Umwindungen n das von dem ganzen, vom *Normalstrome* durchflossenen, Multiplikator auf die Nadel ausgeübte *Drehungsmoment* erhalten wird, nämlich

$$D = \frac{4\pi n \mu\varepsilon}{a'' - a'} \left\{ \log \frac{a'' + \sqrt{a''^2 + b'^2}}{a' + \sqrt{a'^2 + b'^2}} + \frac{1}{4} \left(\frac{a''^3}{(a''^2+b'^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{a'^3}{(a'^2+b'^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \frac{\varepsilon^2}{b'^2} \right\}.$$

Dieses *Drehungsmoment* D mit dem *Trägheitsmomente der Nadel* K dividirt, giebt die angulare Beschleunigung der Nadel durch den gegebenen *Normalstrom*

$$= \frac{D}{K},$$

und diese Beschleunigung multiplicirt mit der im Vergleich mit der Schwingungsdauer der Nadel $= t$ sehr kurzen *Stromdauer* τ giebt die vom *Normalstrome* während seiner kurzen Dauer der Nadel ertheilte *Angulargeschwindigkeit*

$$= \frac{D\tau}{K}.$$

Aus dieser der ruhenden Nadel plötzlich ertheilten Angulargeschwindigkeit wird endlich die *Ablenkung*, d. i. *die erste Elongationsweite* φ der dadurch in Schwingung gesetzten Nadel nach bekannten Regeln (siehe „Elektrodynamische Maassbestimmungen“ II, S. 348[1]) berechnet, nämlich, wenn die Abnahme der Schwingungsbögen der Nadel durch das Verhältniss zweier auf einander folgender Schwingungsbögen $e^{\lambda} : 1$ gegeben ist,

[1] [Wilhelm Weber's Werke, Bd. III, p. 440.]

$$\varphi = \frac{D\tau}{K} \cdot \frac{t}{\pi} \cdot \frac{e^{-\frac{\lambda}{\pi}\operatorname{arc\,tang}\frac{\pi}{\lambda}}}{\sqrt{1+\frac{\lambda^2}{\pi^2}}}.$$

Um in dieser Gleichung den Werth des Trägheitsmoments der Nadel K und ihres magnetischen Moments $2\mu\varepsilon$ nicht durch besondere Beobachtungen bestimmen zu müssen, kann man durch Zuziehung der bekannten Gleichung für die Schwingungsdauer beide eliminiren, wobei aber auf die Torsionskraft des Fadens Rücksicht zu nehmen ist. Bezeichnet $1:\vartheta$ das Verhältniss der auf die Nadel wirkenden erdmagnetischen Direktionskraft, $=2\mu\varepsilon T$, zu der vom Faden ausgeübten, so ist die Gleichung für die Schwingungsdauer t,

$$\frac{2\mu\varepsilon . T}{K} = \frac{\pi^2}{t^2} \cdot \frac{1+\frac{\lambda^2}{\pi^2}}{1+\vartheta},$$

folglich, wenn

$$d = \frac{D}{2\mu\varepsilon} = \frac{2\pi n}{a''-a'}\left\{\log\frac{a''+\sqrt{a''^2+b'^2}}{a'+\sqrt{a'^2+b'^2}} + \frac{1}{4}\left(\frac{a''^3}{(a''^2+b'^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{a'^3}{(a'^2+b'^2)^{\frac{3}{2}}}\right)\frac{\varepsilon^2}{b'^2}\right\}$$

gesetzt und die vorhergehende Gleichung mit $D/(2\mu\varepsilon T) = d/T$ multiplicirt wird,

$$\frac{D}{K} = \frac{d}{T} \cdot \frac{\pi^2}{t^2} \cdot \frac{1+\frac{\lambda^2}{\pi^2}}{1+\vartheta}.$$

Substituirt man diesen Werth in der Gleichung für φ, so erhält man

$$\varphi = \pi\frac{d}{T} \cdot \frac{\tau}{t} \cdot \frac{\sqrt{1+\frac{\lambda^2}{\pi^2}}}{1+\vartheta} \cdot e^{-\frac{\lambda}{\pi}\operatorname{arc\,tang}\frac{\pi}{\lambda}}$$

und hieraus die gesuchte *Dauer des Normalstroms*,

$$\tau = t \cdot \frac{\varphi}{\pi} \cdot \frac{T}{d} \cdot \frac{1+\vartheta}{\sqrt{1+\frac{\lambda^2}{\pi^2}}} \cdot e^{\frac{\lambda}{\pi}\operatorname{arc\,tang}\frac{\pi}{\lambda}}.$$

Am Multiplikator der hier gebrauchten Tangentenboussole war nun aber durch Messung bestimmt worden

$2\pi a' = 709{,}0$ Millimeter,
$2\pi a'' = 965{,}35$ „
$2b' = 72{,}04$ „
$n = 5635$

woraus, mit dem oben erwähnten Werthe von $\varepsilon = 20$ Millimeter, sich der Werth von d ergiebt,

$$d = 262,1.$$

Dabei ergiebt sich, dass, wenn auch der Werth von ε auf 1 Millimeter unsicher wäre, die Unsicherheit von d doch nur 0,4 auf 262, d. i. nur $\frac{1}{657}$ betragen würde, was nicht in Betracht kommt.

Ausserdem war die Schwingungsdauer der Nadel t, der horizontale Erdmagnetismus am Orte der Tangentenboussole T, das logarithmische Dekrement für die Abnahme der Schwingungsbögen λ und das Verhältniss ϑ der Direktionskraft des Fadens zu der vom Erdmagnetismus T herrührenden auf gewöhnliche Weise gefunden worden,

$t = 9,244$ Sekunden,
$T = 1,7983$ „
$\lambda = 0,070$ „
$\vartheta = \frac{1}{691}$.

Setzt man diese Werthe in die Gleichung für τ ein, so erhält man

$$\tau = 0,020\,921\,.\,\varphi.$$

Die Werthe, welche sich für φ in den fünf in Art 7 beschriebenen Versuchen ergeben, sind im Anfange dieses Artikels zusammen gestellt worden; setzt man sie in die Gleichung für τ ein, so erhält man folgende fünf Resultate für die genannten Versuche.

No.	τ
1.	0,0001194
2.	0,0001300
3.	0,0001568
4.	0,0001480
5.	0,0001589

14.

Berechnung der Grösse $\frac{1}{2\tau}\cdot E$.

Es bleibt endlich noch übrig, aus den gefundenen Werthen von E und τ die Werthe von $(1/2\tau)\,.\,E$ zu berechnen. Stellen wir nämlich die korrespondirenden Werthe von E und τ aus den beiden vorhergehenden Artikeln in folgender Tafel zusammen,

No.	E	τ
1.	36 060 000	0,0001194
2.	41 940 000	0,0001300
3.	49 700 000	0,0001568
4.	44 350 000	0,0001480
5.	49 660 000	0,0001589

so ergeben sich daraus folgende fünf Werthe von $(1/2\tau) . E$, als Resultate der in Art. 7 beschriebenen fünf Messungen:

No.	$\frac{1}{2\tau} \cdot E$
1.	$151\,000 . 10^6$
2.	$161\,300 . 10^6$
3.	$158\,500 . 10^6$
4.	$149\,800 . 10^6$
5.	$156\,250 . 10^6$

Aus allen Messungen zusammen genommen ergiebt sich also der Mittelwerth:

$$\frac{1}{2\tau} \cdot E = 155\,370 . 10^6.$$

Nun bezeichnet aber nach Art. 5

$$\frac{1}{2\tau} \cdot E : 1$$

das Verhältniss, in welchem bei einem konstanten Strome, der von gleich grossen in entgegengesetzten Richtungen strömenden Massen positiver und negativer Elektricität gebildet wird, und dessen Intensität dem *magnetischen* Stromintensitätsmaasse gleich ist, die den Querschnitt des Leiters in 1 Sekunde passirende *positive Elektricitätsmenge* zu derjenigen steht, welche in einem Punkte koncentrirt auf eine gleiche Elektricitätsmenge in 1 Millimeter Abstand eine Kraft ausübt, die der Masse eines Milligramms während einer Sekunde die Geschwindigkeit von 1 Millimeter in der Sekunde ertheilt. Dieses Verhältniss zu bestimmen war die *Aufgabe*, welche, nach Art. 4, gelöst werden sollte, was hiermit geschehen ist.

15.

Zurückführung des magnetischen, elektrodynamischen und elektrolytischen Maasses der Stromintensität auf mechanisches Maass.

Die Lösung der in Art. 4 gestellten Aufgabe soll nun aber, nach Art. 3, benutzt werden, *das magnetische, elektrodynamische und elektrolytische Maass der Stromintensität auf mechanisches Maass zurückzuführen.*

Bei einem konstanten Strome, der von gleich grossen in entgegengesetzten Richtungen strömenden Massen positiver und negativer Elektricität gebildet wird, und dessen Intensität dem *mechanischen* Stromintensitätsmaasse gleich ist, soll nach Art. 2 die den Querschnitt des Leiters in 1 Sekunde passirende *positive Elektricitätsmenge* = 1 sein, d. i. gleich derjenigen, welche in einem Punkte koncentrirt auf eine

gleiche Elektricitätsmenge in 1 Millimeter Abstand eine Kraft ausübt, die der Masse eines Milligramms während einer Sekunde die Geschwindigkeit von 1 Millimeter in der Sekunde ertheilt.

Zu dieser *Einheit* der positiven Elektricitätsmenge verhält sich aber, nach dem vorgehenden Artikel, die bei einem Strome von der Intensität des *magnetischen* Strommaasses den Querschnitt in 1 Sekunde passirende *positive Elektricitätsmenge* wie

$$155\,370 \,.\, 10^6 : 1.$$

Da nun die Stromintensitäten den in gleicher Zeit den Querschnitt passirenden Elektricitätsmengen proportional sind, so ergiebt sich hieraus unmittelbar *die Zurückführung des magnetischen Maasses der Stromintensität auf mechanisches Maass;* denn es ist hiernach die in gleicher Zeit den Querschnitt passirende Elektricitätsmenge im *magnetischen* Strommaasse

$$155\,370 \,.\, 10^6 \text{ Mal}$$

grösser als im *mechanischen* Strommaasse, folglich ist nach der angeführten Proportion auch *das magnetische Maass der Stromintensität selbst* $155\,370 \,.\, 10^6$ *Mal grösser als das mechanische Maass.*

Ferner, da nach Art. 1, S. 223[1]) das *magnetische* Maass der Stromintensität zum *elektrodynamischen* sich verhält wie $\sqrt{2} : 1$, so ist *das elektrodynamische Maass der Stromintensität* $109\,860 \,.\, 10^6$ ($= 155\,370 \,.\, 10^6 \,.\, \sqrt{\tfrac{1}{2}}$) *Mal grösser als das mechanische Maass.*

Endlich, da nach Art. 1, S. 224[2]) das *magnetische* Maass der Stromintensität sich zum *elektrolytischen* verhält wie $1 : 106\tfrac{2}{3}$, so ist *das elektrolytische Maass der Stromintensität* $16\,573 \,.\, 10^9$ ($= 106\tfrac{2}{3} \,.\, 155\,370 \,.\, 10^6$) *Mal grösser als das mechanische Maass.*

Durch die Zurückführung dieser drei Maasse der Stromintensität auf das mechanische Maass ist die Aufgabe dieser Abhandlung, wie sie Art. 2 ausgesprochen worden ist, gelöst, und es bleiben nur *die Anwendungen* zu erörtern übrig, welche sich von den gefundenen Resultaten machen lassen.

Anwendungen.

16.

Bestimmung der zur Ausscheidung von 1 Milligramm Wasserstoff aus 9 Milligramm Wasser erforderlichen Elektricitätsmenge.

Die erste Anwendung, welche wir von den gefundenen Resultaten machen können, ist die genaue Bestimmung der zur Ausscheidung von

1) [WILHELM WEBER's Werke, Bd. III, p. 613.]

2) [Ebendaselbst, Bd. III, p. 614.]

1 Milligramm Wasserstoff aus 9 Milligramm Wasser erforderlichen Elektricitätsmenge, worüber die von Buff mit Hülfe seiner Tangentenboussole mit langem Leitungsdrahte gefundene und in den „Annalen der Chemie und Physik“ Bd. 86, S. 33 mitgetheilte Bestimmung schon in der Note zu Art. 3, S. 226[1]) angeführt worden ist.

Diese Elektricitätsmenge würde nach Buff hinreichen, eine Batterie von 45 480 Leidener Flaschen, jede von 480 Millimeter Höhe und 160 Millimeter Durchmesser, bis zu einer Schlagweite von 100 Millimeter zu laden. Dieser von Buff gegebenen Bestimmung fehlt nur die genauere Angabe derjenigen Elektricitätsmenge, welche eine Leidener Flasche von der beschriebenen Ladung enthält.

Aus den in dieser Abhandlung gefundenen Resultaten ergiebt sich nun, dass die zur Ausscheidung von $\frac{1}{9}$ Milligramm Wasserstoff aus 1 Milligramm Wasser erforderliche Elektricitätsmenge der bei einem konstanten Strome von der Intensität des *elektrolytischen* Strommaasses den Querschnitt des Leiters in 1 Sekunde passirenden *positiven Elektricitätsmenge* gleich ist. Letztere ist aber, nach Proportion der dem *elektrolytischen* und *magnetischen* Strommaasse entsprechenden Stromintensitäten (siehe Art. 1, S. 224[2]), $106\frac{2}{3}$ Mal grösser als die bei einem konstanten Strome von der Intensität des *magnetischen* Strommaasses den Querschnitt in 1 Sekunde passirende *positive Elektricitätsmenge*, welche nach Art. 14

$$155\,370 \,.\, 10^6 \text{ Mal}$$

grösser ist, als die *Einheit* der Elektricitätsmenge, welche in einem Punkte koncentrirt auf eine gleiche Menge in 1 Millimeter Abstand eine Kraft ausübt, die der Masse eines Milligramms während einer Sekunde die Geschwindigkeit von 1 Millimeter in der Sekunde ertheilt.

Hieraus folgt, dass

$9 \,.\, 106\frac{2}{3} \,.\, 155\,370 \,.\, 10^6 = 149\,157 \,.\, 10^9$ *Einheiten, wie sie soeben bestimmt worden sind, zur Ausscheidung von* 1 *Milligramm Wasserstoff aus* 9 *Milligramm Wasser erforderlich sind.*

Wäre eine solche positive Elektricitätsmenge in einer Wolke, und eine gleiche negative an der senkrecht darunter liegenden Stelle der Erdoberfläche koncentrirt, so würde daraus eine Anziehung der Wolke von der Erde sich ergeben, welche, bei 1000 Meter Abstand beider von einander, einem Gewichte von 45 000 Centnern (= 2 268 000 Kilogramm) gleich wäre.

Dividirt man jene Zahl von Einheiten mit der Zahl der Leidener Flaschen der von Buff beschriebenen Batterie = 45 480, so erhält man

1) [Wilhelm Weber's Werke, Bd. III, p. 616.]

2) [Ebendaselbst, Bd. III, p. 614.]

die genaue Angabe derjenigen Elektricitätsmenge, welche 1 Leidener Flasche von der von Buff beschriebenen Ladung enthält, nämlich

$$= 3280 \cdot 10^6 \text{ Einheiten.}$$

Die geladene Oberfläche einer solchen Flasche enthält aber nach Buff's Beschreibung

$$480 \cdot 160 \cdot \pi = 241\,300 \text{ Quadratmillimeter,}$$

folglich war jedes Quadratmillimeter mit

13 600 Einheiten

geladen, wodurch die zu einer Schlagweite von 100 Millimeter nach Buff erforderliche Verdichtung oder Kondensation der Elektricität in der Flasche bestimmt ist.

17.

Bestimmung der Konstanten c.

Nach dem in der ersten Abhandlung über Elektrodynamische Maassbestimmungen aufgestellten Grundgesetze der elektrischen Wirkung, welches die *Elektrostatik*, *Elektrodynamik* und *Induktion* zusammen umfasst, wird die Kraft, welche die Elektricitätsmenge e auf die Elektricitätsmenge e' aus der Entfernung r bei der relativen Geschwindigkeit dr/dt und Beschleunigung d^2r/dt^2 ausübt, durch

$$\frac{ee'}{r^2}\left[1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{dr^2}{dt^2} - 2r\frac{d^2r}{dt^2}\right)\right]$$

ausgedrückt. Es zerfällt diese Kraft in zwei Theile, wovon man den ersten $= ee'/r^2$ die *elektrostatische*, den zweiten $= -(ee'/c^2r^2)(dr^2/dt^2 - 2r\,d^2r/dt^2)$ die *elektrodynamische* Kraft nennen kann. Durch die *Konstante c* wird das Verhältniss dieser beiden Kräfte bestimmt; c bedeutet denjenigen Werth der, als gleichförmig vorausgesetzten, relativen Geschwindigkeit, bei welcher die *elektrostatische* Kraft von der *elektrodynamischen* aufgehoben wird. Diese *Konstante c* wird nun auf folgende Weise bestimmt.

Art. 14 ist das Verhältniss $(1/2\tau) \cdot E : 1$, das heisst *das Verhältniss des magnetischen Maasses der Stromintensität zum mechanischen*, gefunden worden

$$= 155\,370 \cdot 10^6 : 1.$$

In der zweiten Abhandlung über Elektrodynamische Maassbestimmungen Art. 26, S. 261 [1]) ist das Verhältniss des *magnetischen* Maasses der Stromintensität zum *elektrodynamischen*

$$= \sqrt{2} : 1,$$

[1]) [Wilhelm Weber's Werke, Bd. III, p. 360.]

und Art. 27, S. 269 [1]) das Verhältniss des *elektrodynamischen* Maasses der Stromintensität zum *mechanischen*

$$= c : 4$$

angegeben worden, woraus *das Verhältniss des magnetischen Maasses der Stromintensität zum mechanischen* folgt

$$= c\sqrt{2} : 4.$$

Die Gleichsetzung dieses Verhältnisses mit dem Art. 14 gefundenen giebt also

$$c = 4 \,.\, 155\,370 \,.\, 10^6 \,.\, \sqrt{\tfrac{1}{2}} = 439\,450 \,.\, 10^6.$$

Aus dieser Bestimmung der *Konstanten c* ersieht man also, dass zwei elektrische Massen mit sehr grosser Geschwindigkeit gegen einander bewegt werden müssen, wenn die *elektrodynamische* Kraft die *elektrostatische* aufheben soll, nämlich mit einer Geschwindigkeit von 439 Millionen Meter oder 59 320 Meilen in der Sekunde, welche die Geschwindigkeit des Lichts bedeutend übertrifft.

Die Geschwindigkeit des Lichts ist selbst aber nicht die einer Körperbewegung, sondern die einer Wellenbewegung, während alle uns bekannten Geschwindigkeiten von wirklicher Körperbewegung, auch der Weltkörper, nur sehr kleine Bruchtheile davon bilden. Beachtet man nun dabei, dass das Verhältniss der *elektrodynamischen* Kraft zur *elektrostatischen* dem Quadrate dieses Bruchtheils entspricht, so ergiebt sich, dass die elektrodynamische Kraft gegen die elektrostatische in der Wirklichkeit stets als verschwindend betrachtet werden darf. — Von den Geschwindigkeiten, womit elektrische Fluida in metallenen Leitern sich bewegen, besitzen wir zwar noch keine Kenntniss; doch lässt sich aus verschiedenen Umständen abnehmen, dass die Menge der in diesen Leitern enthaltenen neutralen Elektricität ausserordentlich gross sei; je grösser aber letztere ist, desto kleiner ist die Geschwindigkeit der wirklichen Bewegung, die sich alsdann aus den vorhandenen *Stromintensitätsmessungen* ergiebt. Auch die Geschwindigkeit dieser Bewegungen bildet daher wahrscheinlich nur einen kleinen Bruchtheil von der Geschwindigkeit *c*.

Es ergiebt sich ferner aus dem gefundenen grossen Werthe der *Konstanten c* die interessante Folgerung, dass auch der *Gravitationskraft ponderabler Körper* ein solcher dynamischer Theil beigefügt werden könnte (wodurch eine grössere Analogie zwischen den Wechselwirkungen *ponderabler* und *imponderabler* Körper hergestellt würde), ohne dass dieser dynamische Theil der Kraft den geringsten merklichen Einfluss auf die Bewegungen der Weltkörper äussern würde.

[1]) [Wilhelm Weber's Werke, Bd. III, p. 367.]

Dass bei der Elektricität die Wirkung der *elektrodynamischen* Kraft nicht immer verschwindet, sondern bei galvanischen Strömen oft sehr augenscheinlich hervortritt, hat seinen Grund blos in der bei der *Neutralisation* positiver und negativer Elektricität Statt findenden *vollkommenen Aufhebung aller elektrostatischen Kräfte*, gegen welche jene verschwinden würden. Wo keine solche Neutralisation Statt findet, sondern freie Elektricität vorhanden ist, wird immer in der Wirkung dieser freien Elektricität die *elektrostatische* Kraft allein in Betracht kommen. Hieraus erklärt sich, warum nicht alle Versuche zur Begründung des Grundgesetzes der elektrischen Wirkung blos mit *zwei* Massen freier Elektricität ausgeführt werden können, sondern warum einige Versuche mit *zwei Paaren* von elektrischen Massen (Stromelementen), die sich *elektrostatisch neutralisiren*, gemacht werden müssen.

Bei *ponderablen* Massen, für welche das Gesetz indifferenter Anziehung gilt, kann von *keiner Neutralisation der Massen* die Rede sein.

Anmerkung. Es ist im Anfang dieses Artikels zur Bestimmung der *Konstanten* c die Gleichung aufgestellt worden:

$$c = \frac{E}{\tau} \cdot \sqrt{2},$$

worin $(1/2\tau) \,.\, E : 1$ das Art. 14 gefundene Verhältniss bezeichnet, in welchem bei einem konstanten Strome von der Intensität des *magnetischen* Strommaasses die den Querschnitt des Leiters in 1 Sekunde passirende *positive Elektricitätsmenge* zu derjenigen steht, welche in einem Punkte concentrirt auf eine gleiche Elektricitätsmenge in 1 Millimeter Abstand eine Kraft ausübt, die der Masse eines Milligramms während einer Sekunde die Geschwindigkeit von 1 Millimeter in der Sekunde ertheilt. — Zum Beweis dieser Gleichung wurde auf die zweite Abhandlung über Elektrodynamische Maassbestimmungen verwiesen. Die Richtigkeit dieser Gleichung lässt sich aber auch unmittelbar aus dem *Grundgesetz der elektrischen Wirkung* und aus der *Definition des magnetischen Strommaasses* entnehmen. Zu diesem Zwecke braucht man blos die Wechselwirkung zweier gleicher Stromelemente α, α eines geradlinigen Stroms in der Entfernung r zu betrachten, von denen schon in der Note zu S. 224[1]) angeführt ist, dass sie einander mit der Kraft

$$= \frac{\alpha^2}{r^2}\, i^2$$

abstossen, wenn i nach dem *magnetischen* Strommaasse ausgedrückt wird. Es folgt dies bekanntlich aus dem AMPÈRE'schen *Fundamentalgesetz* und der sich daraus ergebenden Beziehung zwischen *Elektromagnetismus* und *Elektrodynamik.*

Dies vorausgesetzt stelle man sich vor, dass der geradlinige Leiter unseres Stroms in jedem Millimeter langen Stücke die Einheit positiver und negativer Elektricität enthalte. $(1/2\tau) \,.\, E$ bezeichnet dann (nach Art. 14) die Zahl der Millimeter, welche beide Elektricitäten nach entgegengesetzter Richtung in der Sekunde durchlaufen müssen, wenn

$$i = 1$$

[1]) [WILHELM WEBER's Werke, Bd. III, p. 614.]

sein soll. Unter diesen einfachen Verhältnissen sind also nicht allein die Elektricitätsmengen in den beiden Stromelementen α, α, deren Entfernung und übrigen Verhältnisse, von denen ihre Abstossungskraft (nach dem Grundgesetze der elektrischen Wirkung) abhängt, sondern auch die *Grösse dieser Abstossungskraft* selbst gegeben, nämlich, weil $i = 1$ ist,

$$= \frac{\alpha^2}{r^2}.$$

Es kommt also blos darauf an, diese schon bekannte Abstossungskraft aus dem Grundgesetze der elektrischen Wirkung abzuleiten, sodann wird, weil in diesem Grundgesetze c enthalten ist, ein von c abhängiger Ausdruck jener Kraft erhalten werden, den man dem schon bekannten Werthe nur gleich zu setzen braucht, um c zu finden. Unter den beschriebenen einfachen Verhältnissen lässt sich aber die Abstossungskraft der beiden Stromelemente α, α aus dem Grundgesetze der elektrischen Wirkung sehr leicht ableiten; denn zerlegen wir die ganze durch das Grundgesetz gegebene Kraft in zwei Theile, in die *elektrostatische* und *elektrodynamische* Kraft, so leuchtet von selbst ein, dass die Summe der elektrostatischen Kräfte (wegen der in beiden Stromelementen vorhandenen elektrostatischen Neutralisation) zwischen den beiden Stromelementen Null ist. Ebenso leuchtet ein, dass zwischen den elektrischen Massen beider Stromelemente keine Beschleunigung Statt findet, dass also $\mathrm{d}^2 r/\mathrm{d}t^2 = 0$ ist. Hierdurch reducirt sich der allgemeine Ausdruck der elektrischen Wirkung

$$\frac{ee'}{r^2}\left[1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\mathrm{d}r^2}{\mathrm{d}t^2} - 2r\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2}\right)\right]$$

in unserem Falle auf

$$-\frac{1}{c^2}\frac{ee'}{r^2}\frac{\mathrm{d}r^2}{\mathrm{d}t^2}.$$

Dieser Ausdruck nun, angewendet

1. auf die beiden positiven Massen in den beiden Stromelementen $e = +\alpha$ und $e' = +\alpha$, giebt, da die relative Geschwindigkeit dieser Massen $\mathrm{d}r/\mathrm{d}t = 0$ ist (weil beide mit gleicher Geschwindigkeit in gleicher Richtung bewegt werden) die Abstossungskraft $= 0$;

2. dasselbe gilt für die beiden negativen Massen $e = -\alpha$ und $e' = -\alpha$;

3. derselbe Ausdruck aber, angewendet auf die positive Masse $e = +\alpha$ und die negative $e' = -\alpha$, giebt, da die relative Geschwindigkeit dieser Massen $\mathrm{d}r/\mathrm{d}t = (1/\tau) \,.\, E$ ist (weil sie beide mit der Geschwindigkeit $(1/2\tau) \,.\, E$ in entgegengesetzter Richtung bewegt werden) die Abstossungskraft $= + (\alpha^2/c^2 r^2)(E^2/\tau^2)$;

4. dasselbe gilt für die negative Masse $e = -\alpha$ und die positive $e' = +\alpha$.

Hieraus folgt also die Summe aller Abstossungskräfte der in beiden Stromelementen enthaltenen elektrischen Massen

$$= 2 \cdot \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\alpha^2}{r^2} \cdot \frac{1}{\tau^2} E^2,$$

und wird diese Summe ihrem schon bekannten Werthe α^2/r^2 gleich gesetzt, so ergiebt sich zur Bestimmung von c folgende Gleichung:

$$\frac{\alpha^2}{r^2} = 2 \cdot \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\alpha^2}{r^2} \cdot \frac{1}{\tau^2} E^2,$$

oder

$$c = \frac{E}{\tau} \cdot \sqrt{2},$$

was zu beweisen war.

18.

Die elektrischen Gesetze mit numerischer Bestimmung der Konstanten.

Die in der ersten und zweiten Abhandlung über Elektrodynamische Maassbestimmungen entwickelten elektrischen Gesetze sind folgende:

1. *das Grundgesetz der elektrischen Wirkung,* — wonach die Kraft, welche die elektrische Masse e auf die elektrische Masse e' aus der Entfernung r bei der relativen Geschwindigkeit $\mathrm{d}r/\mathrm{d}t$ und Beschleunigung $\mathrm{d}^2r/\mathrm{d}t^2$ ausübt, durch

$$\frac{ee'}{r^2}\left[1-\frac{1}{c^2}\left(\frac{\mathrm{d}r^2}{\mathrm{d}t^2}-2r\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2}\right)\right]$$

ausgedrückt wird;

2. *das Fundamentalgesetz der Elektrodynamik,* — wonach die Kraft, welche ein unveränderliches und unbewegtes Stromelement von der Länge a und der Stromintensität i auf ein gleiches Stromelement von der Länge a' und von der Stromintensität i' aus der Entfernung r ausübt, wenn a mit r den Winkel ϑ, a' mit der verlängerten r den Winkel ϑ', und a mit a' den Winkel ε bilden, durch

$$\frac{aa'}{r^2}\,ii'\,(3\cos\vartheta\cos\vartheta'-2\cos\varepsilon)$$

ausgedrückt wird;

3. *das Gesetz der Voltainduktion eines unveränderlichen gegen den Leiter bewegten Stromelements,* — wonach die elektromotorische Kraft, welche ein Stromelement von der Länge a und von der Stromintensität i auf ein Leiterelement von der Länge a', welches mit der Geschwindigkeit u bewegt wird, aus der Entfernung r ausübt, wenn a mit r den Winkel ϑ, a' mit r den Winkel φ, u mit der verlängerten r den Winkel ϑ', und a mit u den Winkel ε bilden, durch

$$\frac{2\sqrt{2}}{c}\cdot\frac{aa'}{r^2}\cdot ui\cos\varphi\,(3\cos\vartheta\cos\vartheta'-2\cos\varepsilon)$$

ausgedrückt wird;

4. *das Gesetz der Voltainduktion eines veränderlichen, gegen den Leiter unbewegten Stromelements,* — wonach die elektromotorische Kraft, welche ein Stromelement von der Länge a, dessen Stromintensität in der Zeit t gleichförmig um i wächst, auf ein Leiterelement von der Länge a' aus der Entfernung r ausübt, wenn a mit r den Winkel ϑ, und a' mit der verlängerten r den Winkel ϑ' bilden, durch

$$-\frac{2\sqrt{2}}{c}\cdot\frac{aa'}{r}\cdot\frac{i}{t}\cos\vartheta\cos\vartheta'$$

ausgedrückt wird;

5. *das Gesetz der Voltainduktion einer Gleitstelle,* — wonach die elektromotorische Kraft, welche ein durch die Gleitstelle gehender Strom

von der Intensität i bei der Gleitgeschwindigkeit v auf ein Leiterelement von der Länge a' aus der Entfernung r ausübt, wenn v mit r den Winkel ϑ, a' mit der verlängerten r den Winkel ϑ' bilden, durch

$$-\frac{2\sqrt{2}}{c} \cdot \frac{a'}{r} v i \cos\vartheta \cos\vartheta'$$

ausgedrückt wird.

Ein positiver Werth der Ausdrücke (1) und (2) bedeutet eine Abstossungskraft, ein negativer Werth eine Anziehungskraft. Der Zahlenwerth nach unseren Maassen giebt die Grösse der Kräfte im Verhältniss zu derjenigen Kraft an, welche der Masse eines Milligramms während einer Sekunde die Geschwindigkeit von 1 Millimeter in der Sekunde ertheilt. In dem Ausdruck (2), sowie in allen folgenden, werden die Stromintensitäten i, i' nach *magnetischem* Maasse gemessen vorausgesetzt, was immer mit der *Tangentenboussole* leicht geschehen kann. Bezeichnet man die *elektrische Kapacität* des Leiters a', d. h. das Verhältniss der in ihm enthaltenen positiven Elektricitätsmenge (die der negativen gleich ist) zu seiner Länge, mit ε', so geben für $\varepsilon' = 1$ die Ausdrücke (3) (4) (5) den Unterschied der beiden Kräfte, welche in der Richtung von a' auf die in a' enthaltene positive und negative Elektricitätsmenge wirken, und zwar geben sie diesen *Kraftunterschied* im Verhältniss zu derjenigen Kraft an, welche der Masse eines Milligramms während einer Sekunde die Geschwindigkeit von 1 Millimeter in der Sekunde ertheilt. — Ist ε' von 1 verschieden, so müssen die Ausdrücke (3) (4) (5) mit ε' multiplicirt werden, um den angegebenen *Kraftunterschied* zu erhalten.

Eine vollständige Bestimmung aller Kräfte durch die angegebenen Gesetze fordert, dass in allen obigen Ausdrücken für die *Konstante* c der im vorigen Artikel gefundene Zahlenwerth gesetzt werde. Man erhält alsdann:

$$(1.)\quad \frac{ee'}{r^2}\left[1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\mathrm{d}r^2}{\mathrm{d}t^2} - 2r\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2}\right)\right] = \frac{ee'}{r^2}\left[1 - \frac{1}{193120 \,.\, 10^{18}}\left(\frac{\mathrm{d}r^2}{\mathrm{d}t^2} - 2r\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2}\right)\right],$$

$$(2.)\quad \frac{aa'}{r^2} ii' (3\cos\vartheta\cos\vartheta' - 2\cos\varepsilon),$$

$$(3.)\quad \frac{2\sqrt{2}}{c} \cdot \frac{aa'}{r^2} \cdot ui\cos\varphi(3\cos\vartheta\cos\vartheta' - 2\cos\varepsilon)$$

$$= \frac{1}{155370 \,.\, 10^6} \cdot \frac{aa'}{r^2} \cdot ui\cos\varphi(3\cos\vartheta\cos\vartheta' - 2\cos\varepsilon),$$

$$(4.)\quad -\frac{2\sqrt{2}}{c} \cdot \frac{aa'}{r} \cdot \frac{i}{t}\cos\vartheta\cos\vartheta' = -\frac{1}{155370 \,.\, 10^6} \cdot \frac{aa'}{r} \cdot \frac{i}{t}\cos\vartheta\cos\vartheta',$$

$$(5.)\quad -\frac{2\sqrt{2}}{c} \cdot \frac{a'}{r} \cdot vi\cos\vartheta\cos\vartheta' = -\frac{1}{155370 \,.\, 10^6} \cdot \frac{a'}{r} \cdot vi\cos\vartheta\cos\vartheta'.$$

Die elektrischen Gesetze in der letzteren Form, *mit numerischer Bestimmung aller Konstanten,* genügen allen *praktischen* Forderungen; für *theoretische* Untersuchungen aber kann es in manchen Fällen erforderlich sein, statt der in *magnetischem* Maasse zu messenden Stromintensitäten i, i' in obigen Ausdrücken die aus den *Ursachen* der Stromintensität (s. Art. 2) abgeleiteten Werthe von i, i' zu setzen. Bezeichnet nämlich $+a\varepsilon$ und $-a\varepsilon$ die im Leiter a enthaltene positive und negative Elektricitätsmenge, und $+u$ und $-u$ ihre Geschwindigkeiten, womit sie im Leiter bewegt werden, bezeichnet ferner $+a'\varepsilon'$, $-a'\varepsilon'$, $+u'$ und $-u'$ das nämliche für den Leiter a', so sind εu und $\varepsilon' u'$ die Werthe der Stromintensitäten nach *mechanischem* Maasse bestimmt, und es müssen diese Werthe, nach dem Art. 15 gefundenen Verhältnisse, mit $155\,370 \,.\, 16^6$ dividirt werden, um die Werthe derselben Stromintensitäten nach *magnetischem* Maasse ausgedrückt zu erhalten; folglich ist in obigen Ausdrücken

$$i = \frac{\varepsilon u}{155370 \,.\, 10^6}, \quad i' = \frac{\varepsilon' u'}{155370 \,.\, 10^6},$$

und es können diese Werthe, wenn es erforderlich sein sollte, in obigen Ausdrücken für i und i' substituirt werden.

19.

Anwendung auf Elektrolyse.

Alle elektrischen Kräfte, welche durch die im vorhergehenden Artikel angeführten Gesetze bestimmt werden, sind Kräfte, welche unmittelbar nur auf elektrische Massen wirken. *Alle Kräfte aber, welche unmittelbar nur auf elektrische Massen wirken, wirken mittelbar auch auf die ponderablen Träger jener elektrischen Massen.* Es wird dadurch der Anwendung der elektrischen Gesetze auf die Untersuchung der ponderablen Körper ein weites Feld eröffnet; denn die Elektricität wird dadurch für uns zu einem Instrumente, mit dessen Hülfe wir bekannte Kräfte auf ponderable Körper unter Verhältnissen wirken lassen können, unter denen keine anderen bekannten Kräfte wirken.

Obiger Satz leuchtet von selbst ein, wenn elektrische Massen mit ihrem ponderablen Träger so verbunden sind, dass sie ohne denselben nicht bewegt werden können. Aber auch in metallischen Leitern, in denen sich die Elektricität bewegen kann, während ihr ponderabler Träger (das Metall) in Ruhe verharrt, wo also die elektrischen Massen von einem Metalltheilchen zum anderen übergehen, findet doch eine Verbindung Statt, welche die elektrischen Massen mit den Metalltheilchen verknüpft, und welche gelöst werden muss, ehe die elektrische Masse von dem einen Metalltheilchen zum anderen übergehen kann. So

lange diese Verbindung besteht, werden alle Kräfte, welche unmittelbar nur auf die elektrischen Massen wirken, doch mittelbar auf die damit verbundenen Metalltheilchen übertragen, und nur diejenigen Kräfte, welche auf die elektrischen Massen wirken, nachdem sie von den Metalltheilchen sich abgelöst haben, werden auf diese Metalltheilchen nicht mehr übertragen, sondern ertheilen den elektrischen Massen, bis sie zu den nächsten Metalltheilchen gelangen, eine bestimmte Geschwindigkeit, die aber durch die Verbindung, in welche jene elektrischen Massen mit diesen nächsten Metalltheilchen treten, wieder aufgehoben wird, was dieselbe Wirkung hat, wie wenn die elektrischen Kräfte, welche jene Geschwindigkeit hervorgebracht hatten, auf diese nächsten Metalltheilchen übertragen worden wären. Alle diese Kräfte, welche aus der Verbindung elektrischer Massen mit einzelnen Metalltheilchen hervorgehen, nennt man *Widerstandskräfte,* welche das Metall der Bewegung der Elektricität in seinem Innern entgegensetzt, aus denen das Ohm'sche *Gesetz* folgt, dass die Elektricität in den metallischen Leitern in einer gleichförmigen Bewegung nur dann beharren kann, wenn sie fortwährend von einer gleich grossen Kraft vorwärts getrieben wird, und dass der Strom augenblicklich verschwindet, sobald die treibende Kraft aufhört. — Es folgt also hieraus, dass auch bei Leitern, durch den *Widerstand* der Leiter, alle Kräfte, welche unmittelbar auf die Elektricität im Leiter wirken, mittelbar auf den Leiter selbst übertragen werden.

In der *Elektrolyse* hat man es nun mit keinem metallischen Leiter zu thun, welcher in Ruhe verharrt, während die elektrischen Fluida sich in ihm bewegen, sondern mit einem aus verschiedenartigen ponderablen Theilchen zusammen gesetzten Körper (Wasser), von denen die eine Art (Wasserstofftheilchen) der Bewegung der *positiven* Elektricität folgt, die andere Art (Sauerstofftheilchen) der Bewegung der *negativen* Elektricität. Es entsteht also die Frage, woher die Kräfte rühren, welche diese verschiedene Bewegung der beiden Bestandtheile des Wassers hervorbringen? Die elektrolytischen Gesetze beweisen, dass diese Bewegungen, wenn auch keine unmittelbare, doch eine mittelbare Wirkung der elektrischen Kräfte sein müssen. Wenn nun die elektrischen Kräfte unmittelbar nur auf die mit den Wasserstoff- und Sauerstofftheilchen verbundenen elektrischen Massen wirken, so beweist das Faktum, dass die Wasserstofftheilchen der Bewegung der positiven, die Sauerstofftheilchen der Bewegung der negativen Elektricität folgen, dass jene mit freier positiver, diese mit freier negativer Elektricität verbunden im Wasser enthalten sein müssen, wobei es dahin gestellt bleibt, ob sie ausser der freien Elektricität auch noch eine Quantität neutralen Fluidums enthalten. Es mag auch unerörtert bleiben, wie stark diese Verbindung der Wasserstofftheilchen mit der freien posi-

tiven und der Sauerstofftheilchen mit der freien negativen Elektricität im Wasser sei; ob sie so stark sei, dass sie gar nicht gelöst werde, also die Elektricität bei der Elektrolyse sich nur mit ihrem ponderablen Träger bewege, oder ob sie sich verhalte wie in metallischen Leitern, so dass der Elektricität ausser der Bewegung mit dem ponderablen Träger auch noch eine von demselben unabhängige Bewegung zukomme. Nur könnte in letzterem Falle das Gesetz der Zersetzung verschiedener zusammengesetzten Körper durch denselben Strom nach Proportion der chemischen Aequivalente keine strenge Gültigkeit haben, wie es nach den neuesten Untersuchungen der Fall zu sein scheint.

Werden nun die elektrischen Kräfte, welche unmittelbar nur die elektrischen Fluida zu scheiden suchen, durch irgend ein Band, was diese Fluida mit den Bestandtheilen des Wassers verbindet, auf diese Bestandtheile übertragen, so kann eine nähere Bestimmung der *chemischen Scheidungskräfte,* welche die Trennung der ponderablen Bestandtheile hervorbringen, durch die genaue Kenntniss der elektrischen Scheidungskräfte gewonnen werden, und es beruht hierauf das besondere Interesse, welches die Elektrolyse vor anderen Methoden der chemischen Zersetzung besitzt. Die Elektricität lässt sich nämlich wie ein Instrument benutzen, durch welches wir an jedes Wasserstoff- und Sauerstofftheilchen im Wasser einen Faden knüpfen und beide Fäden in entgegengesetzter Richtung mit bekannten Kräften spannen können, bis die Wasserstoff- und Sauerstofftheilchen von einander gerissen werden.

Um dieses Instrument zu benutzen und dadurch wirklich die zur Trennung chemisch verbundener Theile erforderlichen Kräfte nach bekannten Maassen zu bestimmen, mussten *die elektrischen Gesetze mit numerischer Bestimmung ihrer Konstanten* gegeben sein. Nachdem dies geschehen ist, wollen wir auch diese Anwendung von den gewonnenen Resultaten noch zu machen versuchen.

Die Kräfte, welche die elektrischen Fluida in Strombewegung versetzen, werden *elektromotorische Kräfte* genannt. Diese besondere Benennung (welche zur Unterscheidung *dieser Art von Kräften* und nicht blos ihrer Wirkungen gebraucht wird) hat ihren Grund blos darin, dass diese Kräfte bisher nicht nach bekannten Maassen gemessen, sondern nur auf indirekte Weise durch die Wirkungen der von ihnen hervorgebrachten Ströme (Wärmewirkungen, chemische und magnetische Wirkungen) bestimmt werden konnten, wodurch sie zwar unter einander verglichen, aber absolut nach keinem bekannten Maasse ausgedrückt und daher auch mit anderen bekannten Kräften nicht verglichen werden konnten. Dieser Grund fällt weg, wenn man diese Kräfte nach den im vorhergehenden Artikel angegebenen Gesetzen bestimmt, wodurch sie in bekannten Maassen ausgedrückt werden. Auch diejenigen Kräfte,

welche man nicht unmittelbar nach obigen Gesetzen berechnen kann, erhält man in bekannten Maassen ausgedrückt, durch Vergleichung mit jenen. — Da man endlich die Vertheilung des Widerstands in einer geschlossenen Kette genau bestimmen kann und bei einem konstanten Strome nach dem Ohm'schen Gesetz elektromotorische Kraft und Widerstand überall in gleichem Verhältniss stehen müssen, so lernt man dadurch auch die Vertheilung der elektromotorischen Kräfte auf die verschiedenen Theile der Kette kennen. Ist also in einer Kette ein Voltameter eingeschaltet, so lassen sich die im Wasser des Voltameters wirkenden elektrischen Scheidungskräfte, durch welche das Wasser zersetzt wird, genau ermitteln.

Es tritt nun aber beim Wasser der besondere Umstand ein, dass es in reinem Zustand einen sehr schlechten Stromleiter bildet und sehr schwer zersetzbar ist. Alle elektrolytischen Messungen beziehen sich daher auf Wasser, was mit Schwefelsäure oder anderen Stoffen vermischt ist: für verschiedene Mischungen erhält man verschiedene Resultate in Beziehung auf Zersetzbarkeit. Es ist daher nothwendig, sich zunächst auf eine bestimmte Mischung zu beschränken, und es soll hier also nach Horsford's in Poggendorff's Annalen 1847, Bd. 70, S. 238, mitgetheilten Untersuchungen eine Mischung von Wasser und Schwefelsäure von 1,25 specifischem Gewicht gewählt werden, welche unter allen Mischungen von Wasser und Schwefelsäure am leichtesten zersetzt wird.

Der *Widerstand*, welchen diese Mischung dem Strome entgegensetzt, ist von Horsford für gleiche Länge und Querschnitt

696 700 Mal

grösser als der Leitungswiderstand des Silbers gefunden worden, oder, wenn das Leitungsverhältniss von Silber zu Kupfer nach Lenz (Poggendorff's Annalen Bd. 34, 418, Bd. 45, 105) wie 1 : 0,7417 setzt,

516 750 Mal

grösser als der Leitungswiderstand des von Lenz gebrauchten Kupfers. — Nach den in den „Abhandlungen der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen" Bd. 5 (Ueber die Anwendung der magnetischen Induktion auf Messung der Inklination mit dem Magnetometer) mitgetheilten Messungen ist der Widerstand eines Kupferdrahts von 1 Millimeter Länge und 1 Milligramm Masse ($= \frac{1}{8,427}$ Quadratmillimeter Querschnitt) nach absolutem Maasse des *magnetischen* Systems

$$= 2\,310\,000$$

gefunden worden,[1]) d. i. für einen Kupferdraht von 1 Millimeter Länge und 1 Quadratmillimeter Querschnitt

$$= 274\,100.$$

[1]) An der angeführten Stelle [Wilhelm Weber's Werke, Bd. II, p. 319] findet man den Widerstand verschiedener Kupfersorten angegeben, unter denen der obige,

Hieraus ergiebt sich der Widerstand obiger Mischung nach *magnetischem* Widerstandsmaass für 1 Millimeter Länge und 1 Quadratmillimeter Querschnitt

$$= 141\,640 \,.\, 10^6.$$

Es sind aber in dieser Mischung dem Volumen nach nahe 9 Theile Wasser auf 1 Theil Schwefelsäure enthalten und es kommt daher von dem ganzen Querschnitt nur $\frac{9}{10}$ auf das reine Wasser. Setzt man voraus, dass der ganze Strom blos durch das Wasser geht (weil, wenn ein Theil des Stroms durch die Schwefelsäure geleitet würde, dieser einen Nebenstrom bildete, welcher bei Betrachtung der Zersetzung des Wassers ausgeschlossen werden müsste), so würde der Widerstand blos auf Wasser (unter Einfluss der benachbarten Schwefelsäure) bezogen für 1 Milligramm Länge und 1 Quadratmillimeter Querschnitt

$$= 127\,476 \,.\, 10^6$$

zu setzen sein.

Soll nun aber bei diesem *Widerstande* die Stromintensität nach *magnetischem* Maasse $= 106\frac{2}{3}$ sein, nämlich so stark, dass, nach Art. 1 S. 224,[1]) 1 Milligramm Wasser in 1 Sekunde zersetzt wird, so müsste die elektromotorische Kraft für jedes Millimeter nach *magnetischem* Maasse

$$106\tfrac{2}{3} \,.\, 127\,476 \,.\, 10^6$$

betragen, was mit $2\sqrt{2}/c = 1/155\,370 \,.\, 10^6$ zu multipliciren ist, um dieselbe Kraft nach *mechanischem* Maasse ausgedrückt zu erhalten.

Diese Zahl bedeutet nun aber nach dem vorhergehenden Artikel den *Unterschied der Kräfte*, welche in der Richtung des Stroms auf *jede Einheit* der freien positiven Elektricität (in den Wasserstofftheilchen) einer 1 Millimeter langen Wassersäule und auf *jede Einheit* der freien negativen Elektricität (in den darin befindlichen Sauerstofftheilchen) wirken, und diese Zahl muss daher, um die *ganze wirksame Kraft* zu erhalten, noch mit n multiplicirt werden, wenn n Einheiten freier positiver oder freier negativer Elektricität in den Wasserstoff- oder Sauerstofftheilchen der 1 Millimeter langen Wassersäule enthalten sind.

Der Wasserstoff von 1 Milligramm zerlegten Wassers giebt aber an die Elektrode, an der er sich entwickelt, seine freie positive Elektricität ab, welche darauf durch die Elektrode weiter strömt (oder, was in der Wirkung einerlei ist, durch Zuführung von negativer Elektricität daselbst neutralisirt wird) und den Querschnitt in 1 Sekunde durch-

dem von Jacobi zu seinem Widerstands-Etalon gebrauchten Kupfer entsprechende, Werth der grösste ist. Dieser Werth ist gewählt worden, weil Lenz, mit Jacobi zu gemeinschaftlichen Arbeiten oft verbunden, sich bei seinen Versuchen wahrscheinlich auch der nämlichen Kupfersorte von Jacobi bedient hat.

[1]) [Wilhelm Weber's Werke, Bd. III, p. 614.]

fliesst. Da nun aber die Stromintensität nach *elektrolytischem* Maasse = 1 ist und nach Art. 15 bei dieser Stromintensität $106\frac{2}{3} \,.\, 155\,370 \,.\, 10^6$ Einheiten positiver und eben so viel negativer Elektricität durch den Querschnitt in 1 Sekunde hindurchgehen, so ergiebt sich (wenn die Hälfte der an der Elektrode frei gewordenen positiven Elektricität durch die Elektrode weiter strömt, während die andere Hälfte von der durch die Elektrode zugeführten negativen Elektricität neutralisirt wird)

$$\tfrac{1}{2} n = 106\tfrac{2}{3} \,.\, 155\,370 \,.\, 10^6.$$

Multiplicirt man also obige Zahl mit

$$\frac{2\sqrt{2}}{c} \cdot n = 2 \,.\, 106\tfrac{2}{3},$$

so giebt das Produkt

$$2 \,.\, (106\tfrac{2}{3})^2 \,.\, 127\,476 \,.\, 10^6$$

den *Unterschied der Kräfte*, welche in der Richtung des Stroms auf die in den Wasserstofftheilchen von 1 Milligramm Wasser, welches eine 1 Millimeter lange Säule bildet, enthaltene freie positive, und auf die in den Sauerstofftheilchen enthaltene negative Elektricität (unter Einfluss der benachbarten Schwefelsäure) wirken müssen, wenn die Zersetzung des Wassers mit der Geschwindigkeit von 1 Milligramm in der Sekunde erfolgen soll, und zwar ist dieser *Kraftunterschied* durch obige Zahl im Verhältniss zu derjenigen Kraft bestimmt, welche der Masse eines Milligramms während einer Sekunde die Geschwindigkeit von 1 Millimeter in der Sekunde ertheilt.

Das Gewicht eines Milligramms ist eine Kraft, welche der Masse eines Milligramms in 1 Sekunde die Geschwindigkeit von 9811 Millimetern in der Sekunde ertheilt; dividirt man daher die angegebene Zahl mit 9811, so erhält man jenen *Kraftunterschied* im Milligrammgewicht ausgedrückt

$$= \tfrac{2}{9811} \cdot (106\tfrac{2}{3})^2 \,.\, 127\,476 \,.\, 10^6 = 2 \,.\, 147\,830 \,.\, 10^6.$$

Man kann dieses Resultat auf folgende Weise aussprechen: *Wären alle Theilchen Wasserstoff in* 1 *Milligramm Wasser einer* 1 *Millimeter langen Säule an einen Faden geknüpft, und an einen anderen Faden alle Theilchen Sauerstoff, so müssten beide Fäden in entgegengesetzten Richtungen jeder mit dem Gewicht von*

147 830 *Kilogramm*

oder etwa 2956 *Centnern gespannt werden, um eine Zersetzung des Wassers mit solcher Geschwindigkeit hervorzubringen, nach welcher* 1 *Milligramm Wasser in der Sekunde zerlegt werden würde.* Die Spannung bleibt dieselbe für Säulen von verschiedenem Querschnitt, wächst aber proportional mit der Länge der Säule.

Sollte das Wasser unter gleichen Verhältnissen mit geringerer Geschwindigkeit zerlegt werden, z. B. mit der Geschwindigkeit von 1 Milligramm in 2956 Sekunden, so würde obige Spannung proportional kleiner sein, z. B. nur 1 Centner betragen. Ueberhaupt würde die Spannung hiernach beliebig klein sein können, immer würde Zersetzung erfolgen, nur aber mit desto geringerer Geschwindigkeit, je kleiner die Spannung wäre. Doch gilt dies nur unter der Voraussetzung, dass die *Widerstandskraft*, welche das Wasser seiner Zersetzung (der Bewegung des Wasserstoffs und Sauerstoffs in entgegengesetzten Richtungen) entgegensetzt, analog der *Widerstandskraft*, welche nach dem Ohm'schen Gesetze metallische Leiter der Bewegung der positiven und negativen Elektricität in ihrem Innern entgegensetzen, der Geschwindigkeit der Zersetzung proportional sei.[1] Es ist aber selbst bei metallischen Leitern sehr wahrscheinlich, dass das Ohm'sche Gesetz der Wirklichkeit nicht genau entspreche, sondern dass streng genommen die Widerstandskraft aus zwei Theilen bestehe, von denen der eine der Geschwindigkeit proportional, der andere konstant ist, weil dadurch allein die besseren Leiter (Metalle) mit den schlechteren (Isolatoren) unter ein gemeinschaftliches Gesetz gebracht werden können. Dasselbe gilt wahrscheinlich auch von der Widerstandskraft, welche das Wasser der Bewegung des Wasserstoffs und Sauerstoffs nach entgegengesetzten Richtungen in seinem Innern entgegensetzt. Der *Widerstand* (die Widerstandskraft dividirt durch die Stromgeschwindigkeit) wird dann durch die Summe einer Konstanten w und eines der Stromgeschwindigkeit umgekehrt proportionalen Theils k/i dargestellt. Substituirt man nun diese Summe für den *Widerstand* im Ohm'schen Gesetze, so erhält man die Stromintensität i durch die elektromotorische Kraft E und durch die angegebene Summe auf folgende Weise ausgedrückt:

$$i = \frac{E}{w + \frac{k}{i}},$$

oder

$$E = k + wi.$$

Bei den metallischen Leitern ist k sehr klein gegen die bei den Messungen vorkommenden Werthe von wi; bei den Isolatoren verschwindet wi gegen k.

Sind nun auch keine genauen Versuche über das Wasser vorhanden, aus denen der Werth der Konstanten k bestimmt werden könnte, so

[1]) Nach dem Ohm'schen Gesetze ist das Verhältniss der Widerstandskraft, welche ein Leiter der Bewegung der Elektricität in seinem Innern entgegensetzt, zur Geschwindigkeit dieser Bewegung eine *Konstante*, welche der *Widerstand* des Leiters genannt wird.

sind doch Versuche vorhanden, durch welche bewiesen wird, dass diese Konstante, wenn auch einen kleinen, doch keinen ganz verschwindenden Werth hat. Leitet man nämlich magnetisch inducirte Ströme durch Wasser, so lässt sich aus den messbaren Stromwirkungen entnehmen, dass dieselbe Induktion, je nachdem sie schneller oder langsamer ausgeführt wird, mehr oder weniger Wasser zersetze, was nicht der Fall sein dürfte, wenn $k = 0$ wäre. — Bei elektrolytischen Messungen pflegt wi so gross zu sein, dass k dagegen nicht in Betracht kommt.

Man bezeichnet die Kräfte, welche der Trennung des Wasserstoffs und Sauerstoffs im Wasser Widerstand leisten, als *chemische Affinitätskräfte*, die man aber bisher nicht im Stande war, in bekannten Maassen auszudrücken. In diesem Artikel sollte an einem Beispiele gezeigt werden, wie die Resultate der vorhergehenden Untersuchung zur wirklichen Ausführung einer solchen Bestimmung benutzt werden können. Es wird dadurch der Weg zur näheren Erforschung der *Gesetze der chemischen Affinitätskräfte* gebahnt, wozu aber zahlreichere Messungen dieser Kräfte nöthig sind, wovon hier nur eine Messung als Beispiel gegeben werden sollte.

20.

Elektricitätsgehalt der Leiter.

Die Intensität des durch einen Leiter gehenden Stroms ist proportional der Geschwindigkeit, mit welcher die im Leiter enthaltene positive und negative Elektricität *durch den Querschnitt des Leiters* fliesst, und hängt daher von zwei Faktoren ab: 1. von der in jedem *Längenelemente* des Leiters enthaltenen Elektricitätsmenge (welche die *Kapacität* des Leiters genannt werden kann), 2. von der Geschwindigkeit, mit welcher diese Elektricitätsmenge (positive und negative nach entgegengesetzter Richtung) sich im Leiter fortbewegt. Lässt sich nun auch die Intensität des Stroms messen, d. h. die positive und negative Elektricitätsmenge nach bekannten Maassen bestimmen, welche *durch den Querschnitt des Leiters* fliesst, so lässt sich doch weder die in einem *Längenelement* des Leiters enthaltene Elektricitätsmenge noch die *Geschwindigkeit*, mit welcher sich dieselbe im Leiter fortbewegt, einzeln bestimmen: es würde dies nur in solchen Fällen geschehen können, wo die eine Elektricität sich nicht allein bewegte, sondern die Leitertheilchen, in denen sie enthalten wäre, mit fortführte.

Ob nun dieser Fall beim Ueberspringen der Elektricität von einem Konduktor zum anderen (durch eine Luftschicht), wobei kleine Theilchen von dem einen Konduktor abgerissen und zum anderen Konduktor hinübergeführt werden, Statt finde, ist zwar auf experimentellem Wege

nicht ermittelt, und wird sich auch nicht vollständig und sicher ermitteln lassen, doch scheint es unter gewissen Verhältnissen faktisch festzustehen, dass nur von dem positiv geladenen Konduktor kleine Theilchen abgerissen und zum negativen Konduktor hinüber geführt werden. Auch unterliegt es keinem Zweifel, dass diese kleinen abgerissenen Theilchen mit freier positiver Elektricität geladen sind und dass durch dieselben der Uebergang einer bestimmten Elektricitätsmenge von einem Konduktor zum anderen vermittelt werde. Ob aber nur der Uebergang eines Theils oder aller positiver Elektricität von jenem Konduktor zu diesem auf diese Weise vermittelt werde, ferner ob in diesen kleinen abgerissenen Theilchen blos freie positive Elektricität oder ausserdem auch eine bestimmte Menge neutralen Fluidums enthalten sei, endlich wie sich dabei die negative Elektricität des anderen Konduktors verhalte, ist bisher keiner näheren Erörterung unterworfen worden.

Was zunächst das Verhalten der Elektricität des negativ geladenen Konduktors betrifft, von welcher unter den erwähnten Verhältnissen kein Theilchen abgerissen und zum positiven Konduktor geführt wird, so scheint daraus hervorzugehen, dass die negative Ladung dieses Konduktors unter jenen Verhältnissen irgend eine Verzögerung erlitten, und dass daher, ehe diese Ladung die zum Abreissen kleiner Theilchen erforderliche Stärke erreicht habe, die vom positiv geladenen Konduktor abgerissenen Theilchen schon zum negativen gelangen und durch Mittheilung ihrer positiven Ladung das Wachsthum der negativen Ladung verhindern. Unter diesen Verhältnissen würde also gar keine Elektricität vom negativ geladenen Konduktor zum positiv geladenen übergehen.

Was die andere Frage betrifft, ob die abgerissenen Theilchen blos freie positive Elektricität enthalten, oder ob sie ausserdem eine bestimmte Quantität neutrales Fluidum mit sich führen, so lässt sich eine bestimmte Ansicht hierüber nur auf das Faktum der äussersten Feinheit der abgerissenen Theilchen begründen.

Es ist nämlich bekannt, dass, wenn eine grössere und kleinere Kugel nach der Berührung getrennt werden, die in beiden enthaltene freie Elektricität sich zwischen ihnen nach einem bestimmten Verhältnisse theilt, und zwar so, dass die mittlere Dicke der an der Oberfläche jeder Kugel befindlichen Elektricitätsschicht nicht gleich, sondern dass die an der Oberfläche der kleineren Kugel grösser ist, als die an der Oberfläche der grösseren, und zwar dass das Verhältniss sich dem Verhältniss

$$1{,}6449 : 1$$

desto mehr nähert, je ungleicher beide Kugeln sind.

Ein abgerissenes Theilchen kann nun als eine äusserst kleine Kugel betrachtet werden, und es wird daher, wenn man die Dicke der an der

Oberfläche des positiv geladenen Konduktors vorhandenen Elektricitätsschicht mit ε bezeichnet, die Dicke der an der Oberfläche des abgerissenen Theilchens vorhandenen $= 1{,}6449 \, . \, \varepsilon$ zu setzen sein. Während nun bekanntlich bei dem positiv geladenen Konduktor ε gegen den Krümmungshalbmesser seiner Oberfläche verschwindet, lässt sich keineswegs annehmen, dass auch $1{,}6449 \, . \, \varepsilon$ gegen den Halbmesser des kleinen abgerissenen Theilchens verschwinde, im Gegentheil darf man bei der äussersten Kleinheit dieses Theilchens voraussetzen, dass sein Halbmesser kleiner oder wenigstens nicht grösser sei als $1{,}6449 \, . \, \varepsilon$. Alsdann folgt aber, dass diese Schicht freier positiver Elektricität das ganze Theilchen erfülle und dass also kein von dieser Schicht eingeschlossener Raum vorhanden sei, der eine bestimmte Menge neutralen Fluidums enthielte. Die kleinen abgerissenen Theilchen würden also blos freie positive Elektricität enthalten.

Was endlich die Frage betrifft, ob von dem positiv geladenen Konduktor die freie Elektricität nur von den abgerissenen Theilchen zum negativen Konduktor hinübergeführt werde, oder ob daneben eine andere Quantität positiver Elektricität ohne ponderablen Träger sich selbst einen Weg zum negativ geladenen Konduktor bahne, so kann nur der Mangel alles physischen Grunds geltend gemacht werden, von dem es abhinge, dass der eine Theil der Elektricität, unter ganz gleichen Verhältnissen, sich unabhängig von seinem ponderablen Träger bewegen sollte, während der andere seinen ponderablen Träger mit nachziehen müsste. Da es also von einem Theile der übergehenden Elektricität faktisch feststeht, dass sie ihren ponderablen Träger mit fortzieht, so muss dasselbe von aller übergehenden Elektricität so lange angenommen werden, bis das Gegentheil bewiesen wird.

Es würde hier also der Fall eines Stroms wirklich vorliegen, bei welchem sich die Leitertheilchen, welche nur positive Elektricität enthalten, fortbewegen. Nun lässt sich nach den gewonnenen Maassbestimmungen die fortbewegte Elektricitätsmenge, welche von dem einen Konduktor zum anderen übergangen ist (durch Messung der Stromintensität) genau bestimmen; folglich bleibt nur übrig, auch die Menge der ponderablen Masse genau zu bestimmen, welche gleichzeitig von dem positiven Konduktor abgerissen und an den negativen Konduktor angesetzt worden ist. So klein diese ponderable Masse auch sein mag, so lässt sie sich doch deutlich beobachten und es ist danach anzunehmen, dass auch ihr Gewicht mit den feinsten Waagen, die wir besitzen, sich werde bestimmen lassen.

Jedenfalls wird sich ergeben, dass selbst für sehr grosse Elektricitätsmengen, welche vom positiv geladenen Konduktor zum negativ geladenen übergehen, die ponderable Masse der mit fortgerissenen Leitertheilchen

sehr klein sei, dass folglich die in jedem *Längenelemente* des Leiters enthaltene Elektricitätsmenge ausserordentlich gross sei. Je grösser aber diese Elektricitätsmenge ist, desto kleiner ist, bei gegebener Stromintensität, die *Geschwindigkeit*, mit welcher sich diese Elektricitätsmenge im Leiter fortbewegt, und es darf daher diese geringe Geschwindigkeit, mit welcher sich die elektrischen Fluida in ihren Leitern bewegen, in keiner Weise mit der ausserordentlich grossen Geschwindigkeit verwechselt werden, mit welcher die Störung des Gleichgewichts der elektrischen Fluida durch metallische Leiter fortgepflanzt wird, auf welche die bekannten von Wheatstone gemachten Versuche sich beziehen.

Das die in einem Längenelemente eines *metallischen Leiters* enthaltene Elektricitätsmenge sehr gross, und die Geschwindigkeit, mit welcher sich diese Elektricitätsmenge im Leiter bewegt, bei allen wirklich dargestellten Strömen sehr klein sei, liess sich nach Analogie aus dem für *feuchte Leiter* (Wasser) in Art. 15 gefundenen Resultate im voraus erwarten. Denn es ist dort gefunden worden, dass bei einem Strome, dessen Intensität nach *elektrolytischem* Maasse = 1 ist, eine positive Elektricitätsmenge von $106\frac{2}{3} \,.\, 155\,370 \,.\, 10^6$ Einheiten zusammen mit $\frac{1}{9}$ Milligramm Wasserstoff in der einen Richtung, und eine gleich grosse negative Elektricitätsmenge mit $\frac{8}{9}$ Milligramm Sauerstoff verbunden in entgegengesetzter Richtung durch den Querschnitt des Leiters in 1 Sekunde geht, woraus folgt, dass in 1 Milligramm Wasser $106\frac{2}{3} \,.\, 155\,370 \,.\, 10^6$ Einheiten positiver und gleich viel negativer Elektricität enthalten sein müsse, die sich aber (zusammen mit ihren ponderablen Trägern) nur mit der geringen Geschwindigkeit von $\frac{1}{2}$ Millimeter in der Sekunde fortbewegen, wenn der Querschnitt des feuchten Leiters nur 1 Quadratmillimeter gross ist. Ist der Querschnitt grösser, so ist die Geschwindigkeit nach Verhältniss noch kleiner.

21.

Anwendung auf Maasse.

Die in der Physik gebräuchlichen Maasse werden in *Grundmaasse* und *abgeleitete Maasse* eingetheilt. In der allgemeinen Mechanik, wo alle Kräfte einzeln als gegeben betrachtet werden, lassen sich alle Maasse auf die drei bekannten Grundmaasse für *Raum*, *Zeit* und *Masse* zurückführen. — In allen denjenigen Theilen der Physik, wo das *Gravitationsgesetz* vorausgesetzt werden darf, lassen sich alle Maasse blos auf die beiden Grundmaasse für *Raum* und *Zeit* zurückführen, aus denen mit Hülfe des Gravitationsgesetzes auch das Maass der *Masse* abgeleitet wird. Man kann nämlich diejenige Masse zum Maasse nehmen, welche, wenn sie in einem Punkte koncentrirt wäre, auf eine andere Masse in

der Einheit der Entfernung nach dem Gravitationsgesetze eine Kraft ausübt, die ihr in der Zeiteinheit eine Geschwindigkeit ertheilt gleich der Längeneinheit in der Zeiteinheit.

Es ist nun interessant zu bemerken, dass auch dieses Maasssystem noch einer Vereinfachung fähig ist, und dass es möglich ist alle in der Physik gebrauchten Maasse *aus dem einzigen Grundmaass für Raum* abzuleiten, wenn man zwei Grundgesetze der Natur zu diesem Zwecke voraussetzen darf, nämlich ausser dem *Gravitationsgesetze ponderabler Massen* das *Grundgesetz der elektrischen Wirkung.* Denn mit Hülfe des letzteren kann auch *das Maass der Zeit aus dem Raummaasse abgeleitet werden.* Man kann nämlich diejenige Zeit zum Maasse nehmen, in welcher sich zwei mit gleichförmiger relativer Geschwindigkeit bewegte elektrische Massen um die Längeneinheit einander nähern oder von einander entfernen müssen, wenn sie nach diesem Gesetze gar keine Wirkung auf einander ausüben sollen.

Wählt man das *Millimeter* zum Raummaasse, so würde unter Voraussetzung des Grundgesetzes der elektrischen Wirkung aus diesem Raummaass ein Zeitmaass abgeleitet werden, welches der

439450 *Millionste Theil einer Sekunde*

wäre; denn wenn zwei mit gleichförmiger relativer Geschwindigkeit bewegte elektrische Massen in diesem kleinen Zeitraume um 1 Millimeter sich einander nähern oder von einander entfernen, so üben sie nach dem Grundgesetz der elektrischen Wirkung gar keine Wirkung auf einander aus.

Nachdem auf diese Weise aus dem Raummaass das Zeitmaass abgeleitet worden ist, kann ferner aus diesen beiden Maassen unter Voraussetzung des Gravitationsgesetzes auch das Maass der Masse abgeleitet werden. Es ist nämlich nach dem Gravitationsgesetze die Erde eine Masse, welche, wenn sie in einem Punkte koncentrirt wäre, einer anderen Masse in einer dem Erdhalbmesser gleichen Entfernung die Beschleunigung $= 9811$ ertheilt, wenn das Millimeter zum Raummaass und die Sekunde zum Zeitmaass gebraucht werden. Nimmt man nun statt der Sekunde das eben abgeleitete Zeitmaass, welches 439450 Millionen Mal kleiner ist, so ist das abgeleitete Beschleunigungsmaass 439450^2 Billionen Mal grösser, und es ist nach diesem grösseren Maasse obige Beschleunigung

$$= \frac{9811}{439450^2 \, . \, 10^{12}}.$$

Setzt man nun den Erdhalbmesser $= 6370 \, . \, 10^6$ (Millimeter), so ergiebt sich nach dem Gravitationsgesetze die Erde als eine Masse, welche,

wenn sie in einem Punkte koncentrirt wäre, einer anderen Masse in der Einheit der Entfernung die Beschleunigung

$$= \frac{9811 \,.\, 6370^2 \,.\, 10^{12}}{439\,450^2 \,.\, 10^{12}}$$

ertheilt, folglich ist eine Masse, welche $439\,450^2/(9811 \,.\, 6370^2)$ oder fast die Hälfte von der Erdmasse beträgt, diejenige Masse, welche nach dem Gravitationsgesetze, unter Annahme des Millimeters als Raummaasses und mit Hülfe des daraus schon abgeleiteten Zeitmaasses, als *abgeleitetes Massenmaass* erhalten wird.

Aus dem Millimeter als Raummaass und aus dem daraus eben abgeleiteten Zeit- und Massenmaasse werden endlich alle übrigen in der Physik gebrauchten Maasse auf bekannte Weise abgeleitet.

Nach diesem Systeme, wo alle Maasse aus dem einzigen Grundmaasse des Raums abgeleitet werden, ist die Anziehungskraft zweier Massen m, m' in der Entfernung r gleich mm'/r^2 und die Abstossungskraft zweier Elektricitätsmengen e, e' in der Entfernung r gleich $(ee'/r^2)\,(1 - dr^2/dt^2 + 2r\,d^2r/dt^2)$, ohne dass diesen Ausdrücken oder einzelnen Gliedern derselben konstante Faktoren beizufügen sind.

Anhang.

I. *Beschreibung der Torsionswaage.*

Um eine ungleiche Rückwirkung der von den geladenen Kugeln durch Influenz elektrisirten Wände der Torsionswaage auf die bewegliche Kugel möglichst zu vermeiden, ist die Waage in ungewöhnlich grossem Maassstabe ausgeführt. Der Kasten, in welchem die Kugeln hingen, war parallelepipedisch 1,16 Meter lang, 0,87 Meter breit und 1,44 Meter hoch. Die zwölf Kanten des Parallelepipeds waren aus quadratischen Pfosten (80 Millimeter Seite) von hartem Holze gezimmert. Nachdem das Gerüst auf einem grossen fundamentirten Stein festgestellt war, wurde als Deckel eine schwere Holzplatte aufgelegt, die Seitenwände aber wurden in der Weise mit scharf angespanntem Wachstuch bekleidet, dass die Kanten der Pfosten nicht in das Innere des Raums hineinragten. Nach dieser Bekleidung, welche zum Einhängen der Apparate blos das obere Viertel einer Wand offen liess, wurde die Festigkeit des Kastens durch angeschraubte Streben noch sehr vermehrt. Bei der Messung selbst wurde die Oeffnung, nachdem die Standkugel eingebracht war, durch einen Schieber geschlossen. Ausserdem war aber der ganze Kasten mehrfach mit Tüchern und Decken, die auf dem Steine noch auflagen, behängt, um jeden Luftzug abzuhalten. Dennoch war es nöthig, Nachts in dem ungeheizten Zimmer zu beobachten, weil das Oeffnen und Schliessen der Thüren in anderen Theilen des Gebäudes und die ungleiche Erwärmung namentlich des Fussbodens durch die Sonne zu Luftströmungen Veranlassung wurden, welche ein Schwanken der beweglichen Kugel zuweilen bis zu einem halben Grade hervorbrachten. Nachts aber, wenn die Luft draussen nicht zu unruhig war, schwankte die Kugel nicht um eine Minute.

Ueber der Mitte des Deckels, dessen Durchschnitt Fig. 2 mit D bezeichnet ist, war der Torsionskreis T befestigt, dessen Alhidade AA' die einzelne Minute durch ihre Nonien ablesen liess und zur feineren Regulirung der Torsion durch einen Hook'schen Schlüssel H, oder nach dessen Auslösung auch frei durch die Hand geführt werden konnte. Weiter bedeuten die Buchstaben der Figur:

a den hartgezogenen Messingdraht (No. 12) 398 Millimeter lang, in der Axe der Alhidade befestigt;

b einen kleinen Messingcylinder mit Seitenschraube, um ihn am unteren Ende von *a* festzuklemmen. Unten an ihm ist

c eine 5 Millimeter vorragende Schraubenspindel, entweder um die Körper anzuschrauben, durch deren Schwingungsdauer der Torsionskoefficient bestimmt werden sollte, oder den Messingdraht

d, an welchen die 5 Millimeter dicke, 450 Millimeter lange cylindrische Stange *ef* von reinem Schellack angeschmolzen war.[1])

hi bedeutet den Schellackhebel für die bewegliche Kugel, der sich beiderseits bei etwa 60 Millimeter Länge bis zu 2,5 Millimeter Dicke verjüngte.

fg ist ein Draht, unten einen Zoll weit in Olivenöl tauchend, mit einem in Holz gefassten Spiegel *s*. Das Oel hat die Wirkung, nicht nur die Schwankungen der beweglichen Kugel, sondern auch die durch Erschütterungen entstandenen Pendelbewegungen der langen Stange in kürzester Zeit zu beruhigen, während es andererseits durchaus kein Hinderniss ist, dass der Hebel der allergeringsten Torsionsänderung folgt.

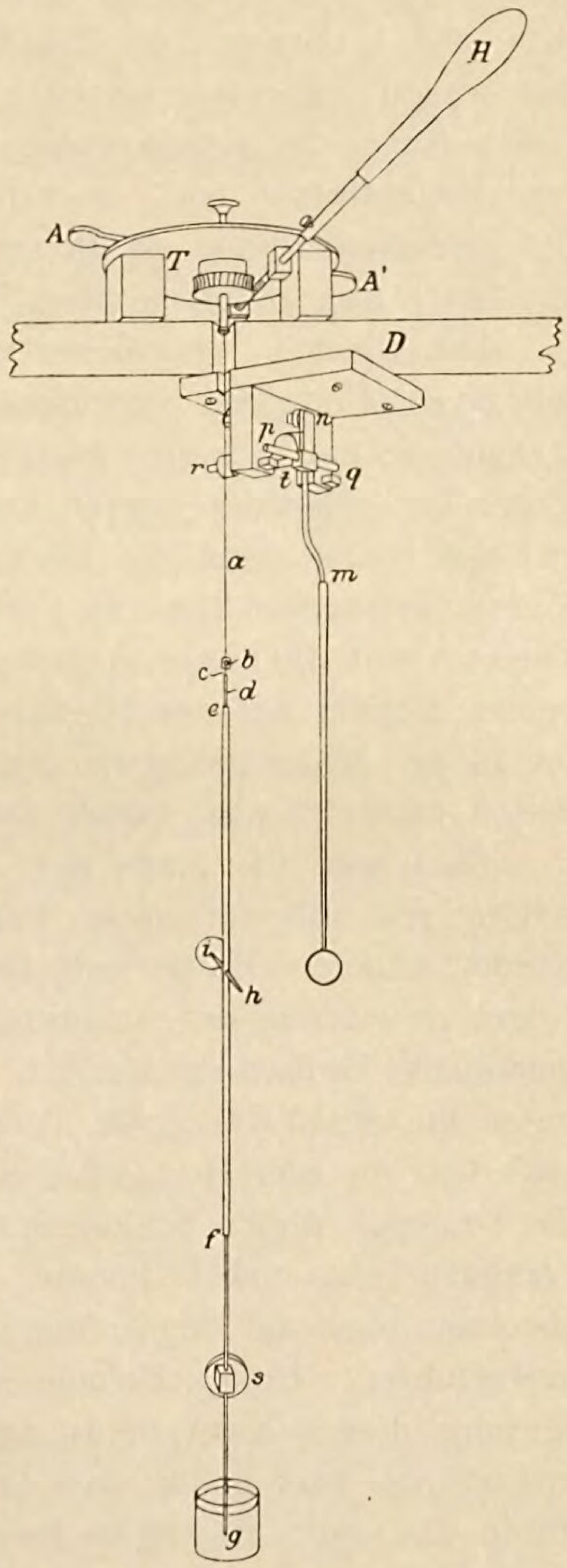


Fig. 2.

Die beiden Kugeln der Drehwaage bestanden aus sehr dünnem Argentanblech, waren fein polirt und vergoldet, und blos durch Erhitzen an das Schellack angeklebt.

Die lange, unten sich verdünnende vertikale Schellackstange für die *Standkugel* war an eine gekrümmte Messingstange *mn* geklebt. Mit

[1]) Gegen die Grösse des oberen Theils der Figur ist die Länge *ef*, wie überhaupt die Länge *Tg*, zu gering gezeichnet. Die Kugeln waren vom Deckel weiter entfernt.

dieser war eine horizontale Axe *pq* mit zwei Stahlspitzen und rechtwinkelig dazu ein Messingstab *rt* mit einem Laufgewichte fest verbunden. Die Spitzen standen auf Messinglagern, *q* in einem konischen Loch, *p* in einem Schlitz. Das Laufgewicht drückte das obere Ende der Messingstange *mn* gegen eine Stellschraube, so dass jedes Mal nach erneutem Aus- und Einbringen die Standkugel genau dieselbe Lage in der Torsionswaage bekommen musste. Drückte man zum Laden der beweglichen Kugel die Messingstange *mn* nach vorn, bis der Stab *tr* gegen eine Stellschraube trat, so befand sich die geladene Standkugel neben der beweglichen, zog sie an und lud sie, ohne dass letztere erst einen grossen Bogen zu beschreiben brauchte.

Dem Spiegel *s* gegenüber war in der Wand der Torsionswaage eine mit einem Planglase verschlossene Oeffnung. Aussen in einiger Entfernung befand sich eine horizontale Skala, deren Spiegelbild in einem Fernrohr beobachtet werden konnte. Die Entfernung der Skala war so gewählt, dass, wenn die Drehung des Hebels der Torsionswaage eine Minute betrug, die Skala im Fernrohr sich um einen Skalentheil bewegte. Zugleich war die Skala so gestellt, dass dann, wenn die Mittelpunkte der beiden Kugeln mit der Drehaxe genau einen rechten Winkel bildeten, ihr in der Mitte gelegener Nullpunkt, von dem aus sie nach beiden Seiten numerirt war, gerade im Faden des Fernrohrs erschien.

Dies war die Lage der Kugeln, in der sie beobachtet werden sollten und die auf diese Weise mit grosser Schärfe immer erkannt werden konnte. Hatte sich nach ihrer Elektrisirung die bewegliche Kugel weiter von der Standkugel entfernt, so konnte der am Fernrohr befindliche Beobachter sogleich ablesen, um wie viele Grade oder Minuten ihr Stand durch die Torsion korrigirt werden musste. Andererseits war an dem HOOK'schen Schlüssel eine Scheibe angebracht, welche die Drehung dieses Schlüssels in Minuten der Drehung der Alhidade erkennen liess, und so konnte der die Torsion regulirende zweite Beobachter, ohne auf den Nonius zu sehen, auf Kommando[1]) die Korrektion herbeiführen. Einige Uebung in der rechtzeitigen Ertheilung und Ausführung dieses Kommandos und die vortreffliche Wirkung des Oels brachten es bald dahin, dass in verhältnissmässig sehr kurzer Zeit die durch das Laden in heftige Bewegung gerathene bewegliche Kugel voll-

[1]) Will man den Hebel einer nicht geladenen Torsionswaage aus einer Lage in eine andere bringen, ohne dass lange andauernde Oscillationen entstehen, so mache man, wenn der Hebel noch ruht, die halbe Korrektion plötzlich, die andere Hälfte dann eben so plötzlich in dem Augenblicke, wo der Hebel seine grösste Elongation erreicht und umkehren will. Dann wird er desto ruhiger stehen, je weniger der Widerstand der Luft gegen sein Trägheitsmoment in Betracht kommt. Bei der geladenen Torsionswaage erreicht man auf diese Weise den Zweck angenähert.

kommen ruhig so stand, dass die Mittelpunkte der beiden Kugeln mit der Drehaxe einen Winkel bildeten, der um wenige Minuten grösser als ein Rechter war, d. h. dass im Fernrohr der Nullpunkt der Skala um einige Theilstriche vom Faden des Fernrohrs abstand. Der Elektricitätsverlust führte dann durch die vorhandene Torsion von selbst die Kugel allmählig näher an die Standkugel heran, so dass der Zeitpunkt, in welchem der Nullpunkt der langsam wandernden Skala den Faden des Fernrohrs passirte, mit Schärfe zu bestimmen war. Darauf wurde die Torsion abgelesen.

Derjenige Stand, bei welchem die Mittelpunkte der beiden Kugeln mit der Drehaxe der Torsionswaage genau einen rechten Winkel bildeten, ist folgendermassen gefunden.

Nachdem statt der Schellackstange an dem kleinen Cylinder des Torsionsdrahts ein unten beschwerter feiner Faden befestigt war, dessen Projektion Fig. 3 m die Drehaxe vorstellt, wurde ein Theodolith T in

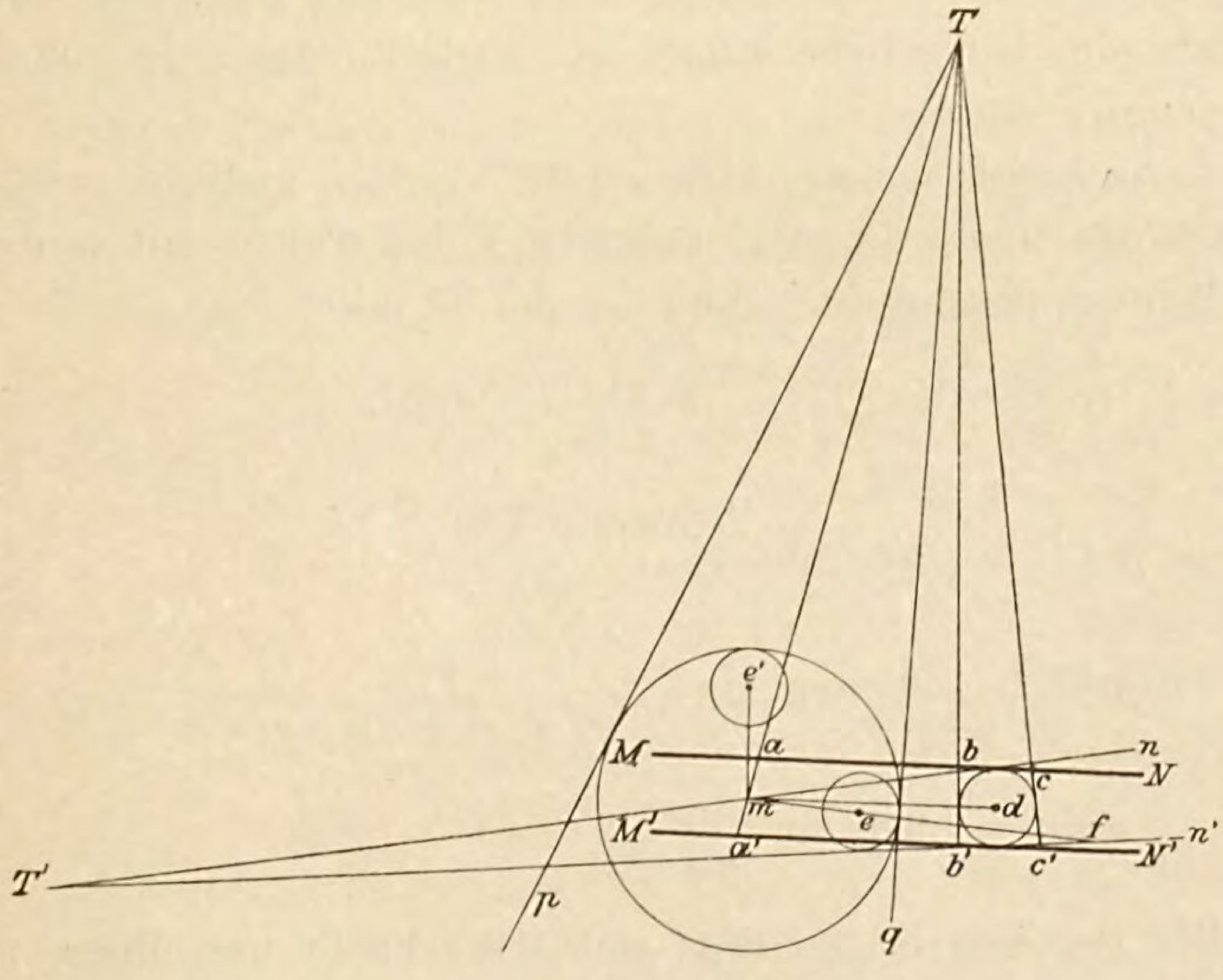


Fig. 3.

der Entfernung von einigen Metern aufgestellt und die Entfernung Tm genau gemessen. Darauf wurde ein in Millimeter getheilter Maassstab von Elfenbein horizontal in die Lagen MN und $M'N'$ gebracht, so dass er jedes Mal parallel mit md stand und die Standkugel in der halben Höhe tangirte. Der vertikale Faden im Fernrohr des Theodolithen liess die Längen ab, ac, $a'b'$ und $a'c'$ bei der starken Vergrösserung auf den zehnten Theil eines Millimeters schätzen. Es ist dann

$$md = \frac{1}{4}(ab + ac + a'b' + a'c').$$

Darauf wurde ein zweiter Theodolith in einen solchen Punkt T' gestellt, dass der vertikale Faden seines Fernrohrs die Drehaxe m deckte

und die Standkugel tangirte. Nachdem $T'm$ gemessen war, wurde das Fernrohr in die Lage $T'n$ gedreht, so dass der Faden die andere Seite der Standkugel tangirte, und blieb dann unverrückt so stehen.

Jetzt hängte man die Schellackstange mit der beweglichen Kugel wieder an den Torsionsdraht und maass mit dem Theodolithen T den Winkel pTq. Die vor Lichtreflexen geschützte bewegliche Kugel zeichnete sich auf weissem Hintergrunde sehr scharf ab und wies dem Theodolithen bei langsamer Drehung die Tangenten des Kreises, innerhalb dessen sie sich bewegte. Der Abstand des Mittelpunktes der beweglichen Kugel von der Drehaxe ist also

$$me = Tm \sin \tfrac{1}{2}\, pTq - r',$$

wobei r' der vorher gemessene Radius der beweglichen Kugel ist.

Nun wurde die Standkugel herausgenommen, der Kasten der Torsionswaage, um Luftströmungen zu vermeiden, ganz geschlossen bis auf zwei kleine Oeffnungen in der schon bekannten Richtung $T'n'$, und durch den Torsionsdraht die bewegliche Kugel so gestellt, dass sie von der Richtung $T'n'$ tangirt wurde.

Die bewegliche Kugel musste jetzt um $90^0 + dme$ gedreht werden, wenn ihr Mittelpunkt in die Lage e' kommen sollte, welche mit m und d einen rechten Winkel beschreibt. Nun ist der Winkel

$$dme = mfT' + mT'f - nmd,$$

während

$$mfT' = \text{arc} \sin \frac{T'm \sin mT'n' - r'}{me},$$

$$mT'f = 2 \,.\, \text{arc} \sin \frac{r}{T'm + md \cos nmd},$$

$$nmd = \text{arc} \sin \frac{r}{md}.$$ [1]

Da hier Alles gegeben ist, so liess sich dme leicht berechnen, und es wurde nun die Drehung der beweglichen Kugel um $90^0 + dme$ mittelst des Torsionskreises vorgenommen und der Nullpunkt der Beobachtungsskala richtig gestellt.

II. *Beschreibung der Tangentenboussole.*

Der zu dem Multiplikator verwendete Kupferdraht war vorzüglich gut mit Seide besponnen und darauf in seiner ganzen Länge von fast

[1] Diese vielen Umstände wurden durch die Undurchsichtigkeit des hängenden Schellackstabs geboten.

$\frac{2}{3}$ Meilen durch Kollodium gezogen.[1]) Von der grossen Rolle, auf welcher er sich dann befand, wurde er, durch Hülfe eines Flaschenzuges sehr gleichmässig gespannt, auf den kreisförmigen Ring der Tangentenboussole in 5635 Windungen aufgewunden. Dieser Metallring, der eine Rinne von rechteckigem Querschnitt bildete, war überall, wo sich der Draht an ihn anlegte, vorher in der Hitze dick mit Siegellack überzogen. In den Ring wurde nachher ein 20 Pfund schwerer Kupferring als Dämpfer gestellt. Alles Uebrige solcher Einrichtungen ist bekannt.

Die Hauptsache war, die Ueberzeugung zu erlangen, dass wirklich alle Windungen der Tangentenboussole von dem Entladungsstrom durchlaufen wurden und nicht etwa ein Ueberspringen eines Theils derselben durch einen in der Tiefe der Windungen vielleicht nicht sichtbaren Funken geschah. Nun war ein in Marburg oft gebrauchter kleiner Multiplikator von 1000 Windungen zur Hand, und es liess sich aus den Dimensionen der beiden Instrumente vorhersehen, dass sie gegen die Entladung einer Leidener Flasche ungefähr gleiche Empfindlichkeit haben würden. Beide Multiplikatoren wurden so verbunden, dass dieselbe durch Wassersäulen verzögerte Entladung einer grösseren Leidener Flasche durch die Windungen beider fliessen musste. Wenn nun nicht nur das vorhergesehene Verhältniss der Empfindlichkeit eintrat, sondern bei einer Steigerung der Ladung sowohl die Angaben beider Boussolen unter einander proportional blieben, als auch den Angaben eines Sinuselektrometers entsprachen, welches, mit der Leidener Flasche verbunden, deren einzelne Ladungen vergleichen liess, so konnte man überzeugt sein, dass die grosse Tangentenboussole ihrem Zwecke entsprach. Bei allen Entladungen, welche durch ein besonders konstruirtes Pendel regulirt wurden, blieb der Knopf der Flasche dieselbe Zeit und zwar nur $\frac{2}{3}$ Sekunden lang mit dem Multiplikator in Verbindung, um von dem wieder auftretenden Rückstande nur einen sehr kleinen und zwar proportionalen Theil zur Wirkung kommen zu lassen. Folgendes sind die Resultate:

No.	*a.* Ablenkung φ des Sinuselektrometers	*b.* $\sqrt{\sin\varphi}$	*c.* Kleiner Multiplikator. Elongation in Skalentheilen	*d.* Tangentenboussole. Elongation in Skalentheilen	$\frac{d}{c}$	$\frac{d}{b}$
1.	9° 31′	0,4078	41,75	170,40	4,1060	417,85
2.	19° 59′	0,5845	59,50	244,85	4,1151	418,91
3.	34° 57′	0,7569	76,95	316,10	4,1078	417,62
4.	49° 54′	0,8746	88,97	365,45	4,1076	417,85

[1]) Versuche, ob dadurch das Isolationsvermögen wirklich wächst, sind nicht angestellt, man sollte es aber annehmen. Jedenfalls erreicht man dadurch, dass die

Jede der Zahlen unter *c* und *d* ist das Mittel aus 2 bis 3 Messungen, die unter einander höchstens um 1 Skalentheil differirten. Die verlangte Proportionalität stellt sich also sehr vollkommen heraus. Nun war der Abstand des Spiegels von der Skala bei dem kleinen Multiplikator 1633, bei dem grossen 6437,6 Skalentheile und ihre Empfindlichkeit verhält sich also, wie oben ungefähr gefordert wurde, nämlich wie 1 : 1,0423.

Diese Messungen, von denen die zweite offenbar bei der Tangentenboussole einen Beobachtungsfehler voraussetzen lässt, zeigen bei allen drei Instrumenten eine ausserordentliche Feinheit in der Vergleichung der disponiblen Ladung einer Leidener Flasche.

Seide nicht nur auf dem Drahte sehr fest haftet, sondern auch, dass sie an der Oberfläche nicht leicht rauh wird. Das Verfahren ist einfach: Von der Originalrolle leitet man den Draht um eine kleine feste Rolle mit horizontaler Axe und von da in grosser Entfernung zu einer grossen Rolle, auf die er vorläufig aufgewunden wird. Die kleine feste Rolle taucht zur Hälfte in ein Gefäss mit Kollodium.

sieben Schriften von Wilhelm Weber über die *Elektrodynamischen Maassbestimmungen,* sowie denjenigen der in ihren Berichten erschienenen kleineren Aufsätze genehmigt. Die Erben von Rudolph Kohlrausch haben der Aufnahme der mit jenem gemeinsam verfassten Arbeiten gern zugestimmt.

Nach dem im Juni 1891 erfolgten Tode Wilhelm Weber's sind dessen Papiere durchgesehen worden, und es hat sich literarischer Nachlass vorgefunden, welcher die *Elektrodynamik* betrifft. Derselbe wird bei den zugehörigen Untersuchungen in den gesammelten Werken veröffentlicht werden.

Wilhelm Weber's gesammelte Werke werden in 6 Bänden erscheinen, und zwar wird enthalten:

Band I: **Akustik, Mechanik, Optik und Wärmelehre.** Besorgt durch Woldemar Voigt (Göttingen).

Band II: **Magnetismus.** Besorgt durch Eduard Riecke (Göttingen).

Band III und IV: **Galvanismus und Elektrodynamik.** Besorgt durch Heinrich Weber (Braunschweig).

Band V: **Wellenlehre auf Experimente gegründet.** Besorgt durch Eduard Riecke (Göttingen).

Band VI: **Mechanik der menschlichen Gehwerkzeuge.** Besorgt durch Friedrich Merkel (Göttingen) und Otto Fischer (Leipzig).

Die Kommission
für die Herausgabe der Werke Wilhelm Weber's.
E. Schering, Vorsitzender.

Verlag von Julius Springer in Berlin N.

Michael Faraday:

Experimental-Untersuchungen über Elektricität. Deutsche Uebersetzung von Dr. S. Kalischer, Privatdocenten an der Technischen Hochschule zu Berlin. In 3 Bänden. Mit in den Text gedruckten Abbildungen und Tafeln.
I. Band. Preis M. 12,—; geb. M. 13,20. II. Band. Preis M. 8,—; geb. M. 9,20. III. Band. Preis M. 16,—; geb. M. 17,20.

M. Fourier:

Analytische Theorie der Wärme. Deutsche Ausgabe von Dr. B. Weinstein. Mit 21 in den Text gedruckten Holzschnitten. Preis M. 12,—; geb. M. 13,20.

Carl Friedrich Gauss:

Untersuchungen über höhere Arithmetik. (Disquisitiones arithmeticae. Theorematis arithmetici demonstratio nova. Summatio quarumdam serierum singularium. Theorematis fundamentalis in doctrina de residuis quadraticis demonstrationes et ampliationes novae. Theoria residuorum biquadraticorum, commentatio prima et secunda. Etc.) Deutsch herausgegeben von H. Maser. Preis M. 14,—; geb. M. 15,40.

Allgemeine Untersuchungen über die unendliche Reihe

$$1 + \frac{\alpha\beta}{1 . \gamma}x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1 . 2 . \gamma(\gamma+1)}xx + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1 . 2 . 3 . \gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}x^3 + \text{u. s. w.}$$

Mit Einschluss der nachgelassenen Fortsetzung aus dem Lateinischen übersetzt von Dr. Heinrich Simon. Preis M. 3,—.

J. L. Lagrange:

Analytische Mechanik. Deutsch herausgegeben von Dr. H. Servus. Preis M. 16,—; geb. M. 17,20.

E. Mascart und J. Joubert:

Lehrbuch der Elektricität und des Magnetismus. Autorisirte deutsche Uebersetzung von Dr. Leopold Levy. In 2 Bänden. Mit zahlreichen in den Text gedruckten Abbildungen. Preis M. 30,—; geb. M. 32,40.

Émile Mathieu:

Theorie des Potentials und ihre Anwendungen auf Elektrostatik und Magnetismus. Autorisirte deutsche Ausgabe von H. Maser. Mit 18 in den Text gedruckten Figuren. Preis M. 10,—.

James Clerk Maxwell:

Lehrbuch der Elektricität und des Magnetismus. Autorisirte deutsche Uebersetzung von Dr. B. Weinstein. In 2 Bänden. Mit zahlreichen Holzschnitten und 21 Tafeln. Preis M. 26,—; geb. M. 28,40.

H. Poincaré:

Elektricität und Optik. Vorlesungen. Autorisirte deutsche Ausgabe von Dr. W. Jaeger und Dr. E. Gumlich. In 2 Bänden. Band I: Die Maxwell'schen Theorien und die elektromagnetische Lichttheorie. Mit 39 in den Text gedruckten Figuren. Preis M. 8,—.
Band II: Die Theorien von Ampère und Weber. Die Theorie von Helmholtz und die Versuche von Hertz. Mit 15 in den Text gedruckten Figuren. Preis M. 7,—.

H. A. Schwarz:

Gesammelte mathematische Abhandlungen. In zwei Bänden. Mit zahlreichen Textfiguren und 4 Tafeln Preis M. 25,—; geb. M. 28,—.

Werner Siemens:

Wissenschaftliche und technische Arbeiten. I. Band: Wissenschaftliche Abhandlungen und Vorträge. Mit in den Text gedruckten Abbildungen und dem Bildniss des Verfassers. Zweite Auflage. Preis M. 5,—; geb. M. 6,20.
II. Band: Technische Arbeiten. Mit 204 in den Text gedruckten Abbildungen. Zweite Auflage. Preis M. 7,—; geb. M. 8,20.

William Thomson:

Gesammelte Abhandlungen zur Lehre von der Elektricität und dem Magnetismus. (Reprint of Papers on Electrostatics and Magnetism.) Autorisirte deutsche Ausgabe von Dr. L. Levy und Dr. B. Weinstein. Mit 59 in den Text gedruckten Abbildungen und 3 Tafeln. Preis M. 14,—; geb. M. 15,20.

J. Violle:

Lehrbuch der Physik. Deutsche Ausgabe von Dr. E. Gumlich, Dr. L. Holborn, Dr. W. Jaeger, Dr. D. Kreichgauer, Dr. St. Lindeck. Mit zahlreichen in den Text gedruckten Figuren.
I. Theil: Mechanik. Erster Band: Allgemeine Mechanik und Mechanik der festen Körper. Preis M. 10,—; geb. M. 11,20.
Zweiter Band: Mechanik der flüssigen und gasförmigen Körper. Preis M. 10,—; geb. M. 11,20.

Karl Weierstrass:

Abhandlungen aus der Functionenlehre. Preis M. 12,—; geb. M. 13,20.

— *Zu beziehen durch jede Buchhandlung.* —

Druck von Oscar Brandstetter in Leipzig.

[illegible]

Bayerische StaatsBibliothek
Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Werke

Bd.: 3.

1893

4 Phys.g. 178 s-3
urn:nbn:de:bvb:12-bsb11521559-7